О гамильтоновой геометрии уравнений ассоциативности

Стрижова Надежда Александровна

3 апреля 2019 г.

Уравнения ассоциативности

Рассмотрим функцию $F(t^1, t^2, ..., t^n)$, удовлетворяющую условиям:

1) $\eta_{ij} = \dfrac{\partial^3 F}{\partial t^1 \partial t^i \partial t^j} = const, \quad i, j = 1, \ldots, n, \quad det\,(\eta_{ij}) \neq 0$

2) $c^i_{jk}(t) = \eta^{il} \dfrac{\partial^3 F}{\partial t^l \partial t^j \partial t^k}, \quad i, j, k = 1, ..., n \quad \forall t$ задают структуру ассоциативной алгебры с базисом $e_1, \ldots, e_n$ и умножением $e_i \circ e_j = \ c^p_{ij} e_p$.

Требование ассоциативности умножения

$$c^p_{ij} c^s_{pk} = c^s_{ip} c^p_{jk}$$

приводит к системе уравнений в частных производных

$$\eta^{pq} \frac{\partial^3 F}{\partial t^p \partial t^i \partial t^j} \frac{\partial^3 F}{\partial t^q \partial t^k \partial t^l} = \eta^{pq} \frac{\partial^3 F}{\partial t^p \partial t^i \partial t^l} \frac{\partial^3 F}{\partial t^q \partial t^j \partial t^k},$$

которая называется уравнениями ассоциативности или системой уравнений Виттена–Дейкхрафа–Верлинде–Верлинде.

Уравнения ассоциативности

Матрица η_{ij} фиксирует зависимость функции $F(t^1, t^2, ..., t^n)$ от переменной t^1:

$$F(t^1, ..., t^n) = \frac{1}{6}\eta_{11}(t^1)^3 + \sum_{j\geq 2} \frac{1}{2}\eta_{1j}(t^1)^2 t^j + \sum_{i\geq 2}\sum_{j>i} \eta_{ij} t^1 t^i t^j + \sum_{i\geq 2} \frac{1}{2}\eta_{ii} t^1 (t^i)^2 + f(t^2, ..., t^n).$$

Таким образом, уравнения ассоциативности являются уравнениями в частных производных на функцию $f(t^2, ..., t^n)$.

Уравнения ассоциативности с антидиагональной η_{ij}

Рассмотрим антидиагональную матрицу

$$(\eta_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial^3 F}{\partial t^1 \partial t^i \partial t^j} \right)$$

Матрице η_{ij} соответствует функция $F = \frac{1}{2}(t^1)^2 t^3 + \frac{1}{2} t^1 (t^2)^2 + f(t^2, t^3)$ и уравнения ассоциативности ($x = t^2,\ t = t^3$):

$$f_{ttt} = f_{xxt}^2 - f_{xxx} f_{xtt}, \tag{1}$$

Возьмем за новые переменные $A = f_{xxx}$, $B = f_{xxt}$, $C = f_{xtt}$, $D = f_{ttt}$, то

$$\begin{aligned} A_t &= B_x, \\ B_t &= C_x, \\ C_t &= D_x = D(A, B, C)_x = (B^2 - AC)_x, \end{aligned}$$

Уравнения ассоциативности с антидиагональной η_{ij}

Теорема (Мохов)

Уравнение ассоциативности (1) эквивалентно недиагонализуемой системе гидродинамического типа

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -C & 2B & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_x \qquad (2)$$

Теорема (Мохов, Ферапонтов)

Система (2) гамильтонова: $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_t = M_1 \delta H_1, \quad H_1 = \int C dx,$

$$M_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}A & B \\ \frac{1}{2}A & B & \frac{3}{2}C \\ B & \frac{3}{2}C & 2(B^2 - AC) \end{pmatrix} \frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}A_x & B_x \\ 0 & \frac{1}{2}B_x & C_x \\ 0 & \frac{1}{2}C_x & (B^2 - AC)_x \end{pmatrix},$$

Уравнения ассоциативности с антидиагональной η_{ij}

Теорема (Мохов, Ферапонтов, Гальвао, Нутку)

Система гидродинамического типа (2), эквивалентная уравнениям ассоциативности (1), бигамильтонова:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_t = M_1 \delta H_1 = M_2 \delta H_2$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -A \\ 1 & -A & A^2+2B \end{pmatrix} \frac{d^3}{dx^3} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2A_x \\ 0 & -A_x & 3(B_x + AA_x) \end{pmatrix} \frac{d^2}{dx^2} + \\ + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{xx} + A_x^2 + AA_{xx} \end{pmatrix} \frac{d}{dx},$$

$$H_2 = -\int \left(\frac{1}{2} A \left(\left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} B \right)^2 + \left(\left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} B \right) \left(\left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} C \right) \right) dx$$

Уравнения ассоциативности

Рассмотрим антидиагональную матрицу

$$(\eta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial^3 F}{\partial t^1 \partial t^i \partial t^j} \right)$$

Матрице η_{ij} соответствует функция $F = \frac{1}{6}(t^1)^3 + t^1 t^2 t^3 + f(t^2, t^3)$ и уравнения ассоциативности $(x = t^2,\ t = t^3)$:

$$f_{xxx} f_{ttt} - f_{xxt} f_{xtt} = 1, \tag{3}$$

Возьмем за новые переменные $A = f_{xxx}$, $B = f_{xxt}$, $C = f_{xtt}$, $D = f_{ttt}$, то

Уравнения ассоциативности

Теорема (Мохов)

Уравнение ассоциативности (3) эквивалентно недиагонализуемой системе гидродинамического типа

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -(1+BC)/A^2 & C/A & B/A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_x \tag{4}$$

Теорема (Мохов, Ферапонтов)

Система (4) не обладает никакой гамильтоновой структурой Дубровина–Новикова первого порядка.

Замена, сохраняющая наличие гамильтоновой структуры Дубровина–Новикова первого порядка

Утверждение

Невырожденные линейные преобразования независимых переменных в уравнениях ассоциативности, не затрагивающие выделенную первую переменную t^1:

$$\left\{\begin{array}{l} t^1 = \tilde{t}^1 \\ t^2 = \alpha\tilde{t}^2 + \beta\tilde{t}^3 \\ t^3 = \gamma\tilde{t}^2 + \delta\tilde{t}^3 \end{array}\right. , \quad \Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0, \tag{5}$$

сохраняют наличие гамильтоновой структуры первого порядка типа Дубровина–Новикова для систем гидродинамического типа, эквивалентных уравнениям ассоциативности.

Классификация матриц η_{ij}

Утверждение

Матрицы η_{ij}, задающие уравнения ассоциативности, можно разбить на следующие 4 группы относительно невырожденных линейных преобразований (5), не затрагивающих переменную t^1:

$$1)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & \mu \end{pmatrix},\ 2)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix},\ 3)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ 4)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & \mu \end{pmatrix},$$

$$\lambda^2 = 1, \qquad \lambda^2 = \mu^2 = 1, \qquad \lambda^2 = 1.$$

Замечание

Матрица η_{ij} определяет уравнения ассоциативности, то классификация уравнений ассоциативности относительно наличия гамильтоновой структуры Дубровина–Новикова первого порядка сводится к классификации уравнений ассоциативности, заданных матрицами типов 1) – 4).

Тензор Хантьеса

Напомним определение тензора Нейенхейса

$$N(X, Y) = A^2[X, Y] + [AX, AY] - A[AX, Y] - A[X, AY]$$

и Хантьеса

$$H(X, Y) = A^2 N(X, Y) + N(AX, AY) - AN(AX, Y) - AN(X, AY)$$

задаваемых произвольным аффинором $A^i_j(u)$. Также необходимо напомнить следующее важное утверждение.

Теорема (Хантьес)

Если в любой точке окрестности у аффинора $A^i_j(u)$ есть полный набор собственных векторов, то тензор $A^i_j(u)$ диагонализуем в окрестности тогда и только тогда, когда его тензор Хантьеса тождественно равен нулю.

Критерий Богоявленского–Рейнольдса

Пусть $h_{ij}(u) = H^{\alpha}_{i\beta} H^{\beta}_{j\alpha}$, H^{i}_{jk} — тензора Хантьеса аффинора $A^i_j(u)$, а также $B^i_j = A^i_j - \frac{1}{3}(TrA)\delta^i_j$ и $T^k_{ij} = A^k_{i,j} - A^k_{j,i}$, запятая означает ковариантное дифференцирование Леви-Чивиты, порожденное $h_{ij}(u)$.

Теорема (Богоявленский, Рейнольдс)

Система гидродинамического типа $\frac{\partial u^i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{3} A^i_j(u) \frac{\partial u^j}{\partial x}$ с невырожденной метрикой $h_{ij}(u)$ обладает гамильтоновой структурой с невырожденной плоской метрикой $g_{ij}(u)$ тогда и только тогда, когда

1. $V^k_{ij} = Tr(B^2) T^k_{ij} + (A^k_i T^{\alpha}_{j\beta} - A^k_j T^{\alpha}_{i\beta} + (A^{\gamma}_i \delta^k_j - A^{\gamma}_j \delta^k_i) T^{\alpha}_{\gamma\beta}) B^{\beta}_{\alpha} \equiv 0$,

2. 1-форма $w_i = \frac{1}{TrB^2} T^{\alpha}_{i\beta} B^{\beta}_{\alpha}$ точна, то есть существует функция $\sigma(u): \ \partial\sigma/\partial u^i = w_i$,

3. $\sigma_{,ij} = \sigma_{,i}\sigma_{,j} + \frac{1}{4} R h_{ij} - R_{ij} - \frac{1}{2} h_{ij} \sigma_{,\alpha} \sigma_{,\beta} h^{\alpha\beta}$, где R_{ij} и R — тензор Риччи и скалярная кривизна метрики $h_{ij}(u)$.

При выполнении условий $1 - 3$ метрика $g_{ij}(u) = h_{ij}(u) e^{2\sigma(u)}$ является плоской и задает гамильтонову структуру данной системы.

Классификация уравнений ассоциативности

Теорема

Произвольное уравнение ассоциативности в случае трех примарных полей можно свести заменами (5), сохраняющими наличие гамильтоновой структуры Дубровина–Новикова первого порядка, к одному из следующих 4 типов, заданных матрицами η_{ij}:

$$1)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & \mu \end{pmatrix},\ 2)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix},\ 3)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ 4)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & \mu \end{pmatrix},$$

$$\lambda^2 = 1, \qquad \lambda^2 = \mu^2 = 1, \qquad \lambda^2 = 1.$$

Классификация уравнений ассоциативности

Теорема (продолжение)

Системы гидродинамического типа, эквивалентные уравнениям ассоциативности типа 1) ($\eta_{11} = 0$), при $\lambda^2 = 1$ и любых μ имеют гамильтонову структуру первого порядка с плоской метрикой

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{u^1}{2} & \frac{\lambda\mu}{2} - u^2 \\ -\frac{u^1}{2} & \frac{\lambda\mu}{2} - u^2 & -\frac{3}{2}u^3 \\ \frac{\lambda\mu}{2} - u^2 & -\frac{3}{2}u^3 & 2u^1u^3 + 2\lambda\mu u^2 - 2(u^2)^2 - \frac{1}{2}\lambda^2\mu^2 \end{pmatrix}.$$

Системы гидродинамического типа, эквивалентные уравнениям ассоциативности типов $2) - 4)$, не имеют гамильтоновой структуры Дубровина–Новикова первого порядка.

Системы гидродинамического типа, получающиеся из уравнений ассоциативности с $\eta_{ij} = \delta_{i+j,4}$ при заменах (5)

Утверждение

Системы гидродинамического типа, эквивалентные уравнениям ассоциативности, получающимся из уравнения ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} при произвольной замене (5), имеют следующий вид

$$\begin{pmatrix} \widetilde{A} \\ \widetilde{B} \\ \widetilde{C} \end{pmatrix}_{\tilde{t}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ q & r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{A} \\ \widetilde{B} \\ \widetilde{C} \end{pmatrix}_{\tilde{x}},$$

где

Системы гидродинамического типа, получающиеся из уравнений ассоциативности с $\eta_{ij} = \delta_{i+j,4}$ при заменах (5)

Утверждение (продолжение)

$$q = \frac{\alpha^3\beta^3\Delta^2 + \beta^2\gamma\Delta(\beta\gamma - 3\alpha\delta)\widetilde{B} + \alpha^2\delta\Delta(3\beta\gamma - \alpha\delta)\widetilde{C} + \gamma\delta^3\widetilde{B}^2}{(\alpha^3\Delta + \gamma^2\widetilde{B} - \gamma\delta\widetilde{A})^2} +$$

$$+ \frac{-2\gamma^2\delta^2\widetilde{B}\widetilde{C} + \gamma^3\delta\widetilde{C}^2}{(\alpha^3\Delta + \gamma^2\widetilde{B} - \gamma\delta\widetilde{A})^2},$$

$$r = \frac{\Delta(\beta^2\gamma(3\alpha\delta - \beta\gamma)\widetilde{A} + 2\alpha^3\delta^2\widetilde{B} - \alpha^2\gamma(\alpha\delta + 3\beta\gamma)\widetilde{C} - 3\alpha^4\beta^2\Delta)}{(\alpha^3\Delta + \gamma^2\widetilde{B} - \gamma\delta\widetilde{A})^2} +$$

$$+ \frac{-2\gamma\delta^3\widetilde{A}\widetilde{B} - \gamma^4\widetilde{C}^2 + \gamma^2\delta^2(2\widetilde{A}\widetilde{C} + \widetilde{B}^2)}{(\alpha^3\Delta + \gamma^2\widetilde{B} - \gamma\delta\widetilde{A})^2},$$

$$s = \frac{3\alpha^2\beta\Delta - \delta^2\widetilde{A} - \gamma\delta\widetilde{B} + 2\gamma^2\widetilde{C}}{\alpha^3\Delta + \gamma^2\widetilde{B} - \gamma\delta\widetilde{A}}.$$

Системы гидродинамического типа, получающиеся из уравнений ассоциативности с $\eta_{ij} = \delta_{i+j,4}$ при заменах (5)

Примеры системы гидродинамического типа Калайджи–Нутку, сводящиеся заменами (5) к системе (2), эквивалентной уравнениям с антидиагональной матрице η_{ij}

1)

$$(\eta_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f_{xxx} - (f_{xtt})^2 + f_{ttt} f_{xxt} = 0, \quad (x = t^3, \ t = t^2)$$

$$A = f_{xxx}, \quad B = f_{xxt}, \quad C = f_{xtt}$$

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-1}{B} & \frac{A - C^2}{B^2} & \frac{2C}{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_x .$$

Системы гидродинамического типа, получающиеся из уравнений ассоциативности с $\eta_{ij} = \delta_{i+j,4}$ при заменах (5)

2)

$$(\eta_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$f_{ttt} + f_{ttt} f_{xxx} - f_{xxt} f_{xtt} + f_{xxt} f_{ttt} - f_{xtt}^2 + f_{xxx} f_{xtt} - f_{xxt}^2 = 0, \quad (x = t^2,\ t = t^3)$$

$$A = f_{xxx}, \quad B = f_{xxt}, \quad C = f_{xtt}$$

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-2BC-C-B^2-C^2}{(A+B+1)^2} & \frac{2AB+2AC+B^2-C^2+2B+C}{(A+B+1)^2} & \frac{-A+B+2C}{A+B+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_x.$$

Системы гидродинамического типа, получающиеся из уравнений ассоциативности с $\eta_{ij} = \delta_{i+j,4}$ при заменах (5)

3)

$$(\eta_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$f_{xxx} f_{ttt} - f_{xxt} f_{xtt} + f_{xtt} f_{xxx} - f_{xxt}^2 + f_{ttt} f_{xxt} - f_{xtt}^2 + f_{xxx} = 0, \quad (x = t^3,\ t = t^2)$$

$$A = f_{xxx}, \quad B = f_{xxt}, \quad C = f_{xtt}$$

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-2BC-B-B^2-C^2}{(A+B)^2} & \frac{2AB+2AC+B^2-C^2+A}{(A+B)^2} & \frac{B-A+2C}{A+B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_x.$$

Редукция на множество стационарных точек интеграла

Рассмотрим произвольную эволюционную систему уравнений

$$u_t^k = F^k(x, u, ..., u^i_{(r)}...), \qquad u = \left(u^1, ..., u^N\right), \quad u^i_{(r)} = \frac{\partial^r u^i}{\partial x^r}, \qquad (6)$$

обладающую невырожденным первым интегралом

$$I = \int L(x, u, ..., u^i_{(r)}, ...)d^n x, \quad 0 \leq r \leq n_i$$

Лемма (Лакс)

Множество стационарных точек интеграла I, т.е. пространство решений лагранжевой системы

$$\frac{\delta I}{\delta u^k(x)} = 0, \;\; 1 \leq k \leq N \qquad (7)$$

является инвариантным для эволюционного потока.

Редукция на множество стационарных точек интеграла

Лагранжиан L, $det\left(\partial^2 L/\partial u^k_{(n_k)}\partial u^j_{(n_j)}\right) \neq 0$, определяет $\left(\sum_{s=1}^N 2n_s\right)$-мерное фазовое пространство лагранжевой системы. Введем стандартным образом фазовые переменные:

$$q_i^k = u^k_{(i-1)}, \qquad p_k^i = \sum_{s=0}^{n_k - i} (-1^s) \frac{d^s}{dx^s} \frac{\partial L}{\partial u^k_{i+s}}$$

Лагранжева система (7) является конечномерной гамильтоновой системой относительно стандартной конечномерной скобки Пуассона

$$\left(q_i^k\right)_x = \frac{\partial H}{\partial p_k^i} = \left\{q_i^k, H\right\}, \qquad \left(p_k^i\right)_x = -\frac{\partial H}{\partial q_i^k} = \left\{p_k^i, H\right\},$$

$$H = \sum_{k=1}^N \left(\sum_{s=1}^{n_k - 1} p_k^s q_{s+1}^k + p_k^{n_k} (q^k_{n_k})_x \right) - L\left(x, q_i^k, \left(q^k_{n_k}\right)_x\right).$$

I — первый интеграл потока (6), то существует функция Q, такая что

$$\frac{\delta I}{\delta u^k(x)} F^k \equiv \frac{dQ}{dx}, \qquad Q = Q(x, u^k, u^l_x, \ldots, u^j_{(i)}, \ldots) \;\to\; \widehat{Q}(q, p).$$

Редукция на множество стационарных точек интеграла

Теорема (Мохов)

Произвольный одномерный эволюционный поток, ограниченный на множество стационарных точек его невырожденного интеграла I, является канонической конечномерной гамильтоновой динамической системой с гамильтонианом $-\widehat{Q}$:

$$
\begin{aligned}
(q_i^k)_t &= -\{q_i^k, \widehat{Q}\}, \\
(p_k^i)_t &= -\{p_k^i, \widehat{Q}\},
\end{aligned}
$$

причем в случае трансляционной инвариантности потока и интеграла I гамильтониан $-\widehat{Q}$ находится в инволюции с гамильтонианом H лагранжевой системы, определяемой I, относительно стандартной конечномерной скобки Пуассона на фазовом пространстве:

$$\{\widehat{Q}, H\} = 0.$$

Первые интегралы уравнения ассоциативности с антидиагональной η_{ij}

Вернемся к системе (2)

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -C & 2B & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_x ,$$

эквивалентной уравнениям ассоциативности (1) с антидиагональной матрицей

$$(\eta_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Введем новые переменные

$$A = u^1 + u^2 + u^3, \qquad B = -(u^1 u^2 + u^2 u^3 + u^1 u^3)/2, \qquad C = u^1 u^2 u^3.$$

Координаты u^1, u^2, u^3 являются плоскими для метрики гамильтоновой структуры M_1 первого порядка

$$M_1(u) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{d}{dx}$$

Первые интегралы уравнения ассоциативности с антидиагональной η_{ij}

При помощи схемы Ленарда–Магри

$$M_1^{ij}(u)\frac{\delta I^m}{\delta u^j(x)} = M_2^{ij}(u)\frac{\delta K^m}{\delta u^j(x)}, \qquad K^m = \int u^m dx, \quad m = 1, 2, 3,$$

были найдены первые интегралы I^m, квадратичные по первым производным:

$$I^1 = \int \frac{2u^1 - u^2 - u^3}{2(u^2 - u^1)^3(u^3 - u^1)^3}((u^3 - u^2)^2(u_x^1)^2 + ((u^2u^3)_x - u^1(u^2 + u^3)_x)^2) +$$

$$+ \frac{(u^2 - u^1)^2 + (u^3 - u^1)^2}{(u^2 - u^1)^3(u^3 - u^1)^3}u_x^1((u^2u^3)_x - u^1(u^2 + u^3)_x)\, dx = \int g_{ij}^m(u)u_x^i u_x^j dx$$

Интегралы I^2, I^3 получаются из I^1 перестановкой индексов $1 \leftrightarrow 2$ и $1 \leftrightarrow 3$ соответственно, причем $I^1 + I^2 + I^3 = 0$.

Первые интегралы уравнения ассоциативности с антидиагональной η_{ij}

Произвольная линейная комбинация I^1, I^2, K^m, $m = 1, 2, ..., 5$, где

$$K^m = \int u^m dx, \quad m = 1, 2, 3,$$

$$K^4 = \int (u^1 u^2 + u^2 u^3 + u^1 u^3) dx, \quad K^5 = \int u^1 u^2 u^3 dx$$

определяет первый интеграл

$$\bar{I} = \lambda I^1 + \mu I^2 + \sum_{m=1}^{3} \alpha_m K^m + \alpha_4 K^4 + \alpha_5 K^5 = \int g_{ij}(u) u_x^i u_x^j + V(u) dx, \quad (8)$$

$$g_{ij} = \lambda g_{ij}^1 + \mu g_{ij}^2, \quad V(u) = \sum_{m=1}^{3} \alpha_m u^m + \alpha_4 (u^1 u^2 + u^2 u^3 + u^1 u^3) + \alpha_5 u^1 u^2 u^3$$

Интеграл $\bar{I}$ (8) невырожден ($det\ g_{ij} \neq 0$) при любых λ, μ, кроме $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\lambda = \mu$.

Редукция системы (2) на множество стационарных точек интеграла (8)

В переменных u^1, u^2, u^3 система (2)

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -C & 2B & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_x ,$$

эквивалентная уравнениям ассоциативности (1), будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}_t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -u^2 - u^3 & u^3 - u^1 & u^2 - u^1 \\ u^3 - u^2 & -u^1 - u^3 & u^1 - u^2 \\ u^2 - u^3 & u^1 - u^3 & -u^1 - u^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}_x = \bar{A}(u) u_x$$

$$\bar{I} = \int L(x, u, u_x) dx = \int g_{ij}(u) u_x^i u_x^j + V(u) dx.$$

Перейдем к фазовым переменным:

$$q^k = u^k, \quad p_k = \frac{\partial L}{\partial u_x^k} = 2 g_{kj} u_x^j.$$

$$H = \frac{1}{4} g^{ij}(q) p_i p_j - V(q), \quad g_H = \frac{1}{4} g^{-1}.$$

Редукция системы (2) на множество стационарных точек интеграла (8)

Теорема

Ограничение системы (2), ограниченной на множество стационарных точек интеграла $\bar{I}$ ($\bar{I}$ невырожден при $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, $\lambda \neq \mu$) является канонической гамильтоновой системой с гамильтонианом $-\widehat{Q}$:

$$(q_i^k)_t = -\{q_i^k, \widehat{Q}\}, \quad (p_k^i)_t = -\{p_k^i, \widehat{Q}\},$$

$$\widehat{Q} = g_{\widehat{Q}}^{ij} p_i p_j + V_{\widehat{Q}}(q),$$

$$V_{\widehat{Q}} = \alpha_5\left((q^1q^2)^2 + (q^1q^3)^2 + (q^2q^3)^2 - 2q^1q^2q^3(q^1+q^2+q^3)\right)/4 - \\ - 2\alpha_4 q^1q^2q^3 - \left((\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)q^1q^2 + (\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)q^1q^3 + \right. \\ \left. + (-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)q^2q^3\right)/2.$$

Редукция системы (2) на множество стационарных точек интеграла (8)

Теорема (продолжение)

$$g^{11}_{\widehat{Q}} = \frac{(q^2 - q^1)(q^1 - q^3)(-\mu q^2(q^1 - q^3)^2 + \lambda(q^2 - q^3)((q^1)^2 - q^2 q^3))}{8\lambda(\lambda - \mu)(q^2 - q^3)}$$

$$g^{12}_{\widehat{Q}} = g^{21}_{\widehat{Q}} = \frac{(q^2 - q^1)^3 q^3}{8(\lambda - \mu)},$$

$$g^{13}_{\widehat{Q}} = g^{31}_{\widehat{Q}} = \frac{(q^3 - q^1)^3 q^2}{8\lambda},$$

$$g^{22}_{\widehat{Q}} = \frac{(q^1 - q^2)(q^2 - q^3)}{8\mu(\lambda - \mu)(q^1 - q^3)} \cdot (\lambda q^1 (q^2 - q^3)^2 + \mu((q^1)^2 q^3 + (q^2)^2 q^3 - \\ - q^1((q^2)^2 + (q^3)^2))),$$

$$g^{23}_{\widehat{Q}} = g^{32}_{\widehat{Q}} = \frac{q^1(q^3 - q^2)^3}{8\mu},$$

$$g^{33}_{\widehat{Q}} = \frac{(\mu q^2 (q^1 - q^3)^2 - \lambda q^1 (q^2 - q^3)^2)(q^1 - q^3)(q^3 - q^2)}{8\lambda\mu(q^1 - q^2)}.$$

Редукция системы (2) на множество стационарных точек интеграла (8)

Теорема (продолжение)

Гамильтониан редукции $-\widehat{Q}$ и гамильтониан лагранжевой системы H находятся в инволюции:

$$\left\{\widehat{Q}, H\right\} = 0.$$

Также следует отметить связь метрик $\widehat{Q}$ и H:

$$(g_{\widehat{Q}})^{ij}(g_H)_{jk} = -\bar{A}^i_k(q).$$

Утверждение

В невырожденном случае метрика g_H имеет нулевую скалярную кривизну (соответственно и метрика g интеграла $\bar{I}$).

Редукция на множество стационарных точек интеграла

Задача

Доказать интегрируемость полученной гамильтоновой редукции системы гидродинамического типа (2).

Следствие (Мохов)

Произвольные коммутирующие эволюционные потоки $u^k_t = F^k$ и $u^s_\tau = G^s$, обладающие общим интегралом I, порождают по предъявленной конструкции интегралы $\widehat{Q}_F$ и $\widehat{Q}_G$ для стационарной системы $\delta I / \delta u^i(x) = 0$, причем

$$\left\{\widehat{Q}_F, \widehat{Q}_G\right\} = const$$

для стандартной скобки Пуассона на фазовом пространстве стационарной системы.

Интегрируемость по Лиувиллю построенной редукции

Для поиска интеграла найденной редукции рассмотрим гамильтоновы потоки вида

$$u^i_t = M_1^{ik}\frac{\delta J}{\delta u^k}, \tag{9}$$

где J — интеграл исходной системы (2). Согласно следствию гамильтониан $\widehat{Q}$ уже построенной редукции и гамильтониан $-\widehat{Q}_J$ редукции потока на множество стационарных точек того же интеграла $\overline{I}$ будут удовлетворять соотношению $\left\{\widehat{Q}_J, \widehat{Q}\right\} = const$, а значит $\widehat{Q}_J$ могут быть первыми интегралами построенной редукции.

J	$\widehat{Q}_J$
$K^m = \int u^m\,dx, \quad m = 1,2,3,$	0
$K^4 = \int \left(u^1u^2 + u^1u^3 + u^2u^3\right)\,dx$	H
$K^5 = H_1 = \int u^1u^2u^3\,dx,$	$\widehat{Q}$
$I^m = \int g^m_{ij}u^i_xu^j_x\,dx, \quad m = 1,2,$	$\widehat{Q}_{I^m} = G^{ijkl}_{I^m}(q)p_ip_jp_kp_l + B^{ij}_{I^m}(q)p_ip_j + C_{I^m}(q), \; m = 1,2.$

Интегрируемость по Лиувиллю построенной редукции

Утверждение

Интегралы $\widehat{Q}_{I^m}$ находится в инволюции относительно канонической скобки Пуассона с гамильтонианами $-\widehat{Q}$ и H

$$\left\{\widehat{Q}_{I^m}, \widehat{Q}\right\} = 0, \qquad \left\{\widehat{Q}_{I^m}, H\right\} = 0, \qquad m = 1, 2,$$

также каждый интеграл $\widehat{Q}_{I^m}$ функционально независим с $-\widehat{Q}$ и H.

Теорема

Построенная редукция системы (2), эквивалентной уравнениям ассоциативности (1) с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае трех примарных полей, интегрируема по Лиувиллю.

Интегрируемость по Лиувиллю построенной редукции

$$\widehat{Q}_{I^1} = G^{ijkl}(q)p_ip_jp_kp_l + B^{ij}(q)p_ip_j + C(q).$$

$$G^{1111} = \frac{(q^1 - q^2)(q^1 - q^3)}{256\lambda^3(\lambda-\mu)^3(q^2-q^3)^3}\big(- \mu^3(q^1 - q^3)^5 + \lambda^3(q^2 - q^3)^5 - \lambda^2\mu(q^1 -$$
$$- q^3)(q^2 - q^3)^2\big(4(q^1)^2 + 5(q^2)^2 - 4q^2q^3 + 3(q^3)^2 - 2q^1(3q^2 + q^3)\big) +$$
$$+ \lambda\mu^2(q^1 - q^3)^2(q^2 - q^3)\big(5(q^1)^2 + 4(q^2)^2 - 2q^2q^3 + 3(q^3)^2 -$$
$$- 2q^1(3q^2 + 2q^3)\big)\big),$$

$$G^{1112} = \frac{(q^1 - q^2)^2}{256\lambda^2(\lambda-\mu)^3(q^2-q^3)^2}\big(- \lambda^2(2q^1 - q^2 - q^3)(q^2 - q^3)^3 + \mu^2(q^1 -$$
$$- q^3)^3(q^1 - 2q^2 + q^3) + 2\lambda\mu(q^1 - q^3)(-q^2 + q^3)\big((q^1)^2 + (q^2)^2 + q^2q^3 -$$
$$- (q^3)^2 + q^1(-3q^2 + q^3)\big)\big),$$

$$G^{1113} = \frac{\big(\mu(q^1 - q^3)^2 - \lambda(q^2 - q^3)^2\big)(q^1 - q^3)^2}{256\lambda^3(\lambda-\mu)^2(q^2-q^3)^2}\big(\mu(q^1 - q^3)^2 +$$
$$+ \lambda(q^2 - q^3)(-2q^1 + q^2 + q^3)\big),$$

Интегрируемость по Лиувиллю построенной редукции

$$G^{1122} = (q^1 - q^2)\big(\lambda^3(2q^1 - q^2 - q^3)(q^2 - q^3)^4 + \mu^3(q^1 - q^3)^4(q^1 - 2q^2 +$$
$$+ q^3) + \lambda\mu^2(q^1 - q^3)^2\big(2(q^1)^3 - 8(q^2)^3 - 3(q^3)^3 + 2(q^2)^2q^3 + 7q^2(q^3)^2 +$$
$$+ (q^1)^2(7q^3 - 13q^2) + 2q^1\big(11(q^2)^2 - 9q^2q^3 + (q^3)^2\big)\big) - \lambda^2\mu(q^2 - q^3)^2\cdot$$
$$\cdot\big(2(q^2)^3 - 8(q^1)^3 + 7(q^2)^2q^3 + 2q^2(q^3)^2 - 3(q^3)^3 + 2(q^1)^2(11q^2 + q^3) +$$
$$+ q^1\big(7(q^3)^2 - 13(q^2)^2 - 18q^2q^3\big)\big)\big)/(768\lambda^2(\lambda - \mu)^3\mu(q^1 - q^3)(q^3 - q^2)),$$
$$G^{1123} = (-2q^1 + q^2 + q^3)\big(2\lambda\mu(q^1 - q^3)(q^2 - q^3)^3 - \lambda^2(q^2 - q^3)^4 +$$
$$+ \mu^2(q^1 - q^3)^3(q^1 - 2q^2 + q^3)\big)/\big(768\lambda^2(\lambda - \mu)^2\mu(q^2 - q^3)\big),$$
$$G^{1133} = (q^1 - q^3)\big(3(q^1 - q^3)\big(\mu^2(q^1 - q^3)^4 + \lambda^2(2q^1 - q^2 - q^3)(q^2 - q^3)^3 +$$
$$+ 2\lambda\mu(q^1 - q^3)^3(-q^2 + q^3)\big) - \frac{\lambda}{\mu}\big(\lambda^2(2q^1 - q^2 - q^3)(q^2 - q^3)^4 - 2\lambda\mu(q^1 -$$
$$- q^3)(q^2 - q^3)^2(-2q^1 + q^2 + q^3)^2 + \mu^2(q^1 - q^3)^2\big(2(q^1)^3 - 4(q^2)^3 +$$
$$+ 6(q^2)^2q^3 - 3q^2(q^3)^2 - (q^3)^3 - 3(q^1)^2(q^2 + q^3) + 6q^1\big((q^2)^2 - q^2q^3 +$$
$$+ (q^3)^2\big)\big)\big)\big)/(768\lambda^3(\lambda - \mu)^2(q^1 - q^2)(q^2 - q^3)),$$

Первые интегралы системы (2) и схема Ленарда–Магри

Утверждение

В явном виде вычислены интегралы, следующие за интегралами I^m, $m = 1, 2$, в схеме Ленарда–Магри:

$$M_1^{ij}(u)\frac{\delta I_{(2)}^m}{\delta u^j(x)} = M_2^{ij}(u)\frac{\delta I^m}{\delta u^j(x)}, \quad m = 1, 2,$$

$$I_{(2)}^m = \int \left(G_{ij}^{(2,m)}(u) u_{xx}^i u_{xx}^j + D_{i,j,k}^{(2,m)}(u) u_x^i u_x^j u_{xx}^k + E_{ijkl}^{(2,m)}(u) u_x^i u_x^j u_x^k u_x^l \right) dx$$

Интеграл $I_{(2)}^2$ совпадает с $I_{(2)}^1$ при перестановке индексов 1 и 2. Метрики $G_{ij}^{(2,m)}$ вырождены. Произвольная линейная комбинация интегралов $\lambda I_{(2)}^1 + \mu I_{(2)}^2$ задает невырожденную метрику при всех λ, μ, $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, $\lambda \neq \mu$.

Интегрируемость по Лиувиллю построенной редукции

$$I^1_{(2)} = \int G^{(2,1)}_{ij}(u)u^i_{xx}u^j_{xx} + D^{(2,1)}_{ijk}(u)u^i_x u^j_x u^k_{xx} + E^{(2,1)}_{ijkl}(u)u^i_x u^j_x u^k_x u^l_x \, dx$$

$$G^{(2,1)}_{11} = \frac{(u^2-u^3)^2(u^2-2u^1+u^3)((u^1-u^2)^2+(u^1-u^3)^2)}{(u^1-u^2)^5(u^1-u^3)^5},$$

$$G^{(2,1)}_{12} = G^{(2,1)}_{21} = \frac{((u^1-u^2)^4+(u^1-u^3)^4)}{(u^1-u^2)^5(u^1-u^3)^4},$$

$$G^{(2,1)}_{13} = G^{(2,1)}_{31} = \frac{((u^1-u^2)^4+(u^1-u^3)^4)}{(u^1-u^2)^4(u^1-u^3)^5},$$

$$G^{(2,1)}_{22} = \frac{(u^2-2u^1+u^3)((u^1-u^2)^2+(u^1-u^3)^2)}{(u^1-u^2)^5(u^1-u^3)^3},$$

$$G^{(2,1)}_{23} = G^{(2,1)}_{32} = \frac{(u^2-2u^1+u^3)((u^1-u^2)^2+(u^1-u^3)^2)}{(u^1-u^2)^4(u^1-u^3)^4},$$

$$G^{(2,1)}_{33} = \frac{(u^2-2u^1+u^3)((u^1-u^2)^2+(u^1-u^3)^2)}{(u^1-u^2)^3(u^1-u^3)^5},$$

Первые интегралы системы (2) и схема Ленарда–Магри

Теорема

Интегралы $I^m_{(n)}$, получающиеся на n-ном шаге схемы Ленарда–Магри

$$M_1^{ij}(u)\,\frac{\delta I^m_{(n)}}{\delta u^j} = M_2^{ij}(u)\,\frac{\delta I^m_{(n-1)}}{\delta u^j},$$

$$I^m_{(0)} = K^m = \int u^m\,dx, \quad I^m_{(1)} = I^m, \quad m = 1, 2,$$

являются интегралами порядка n:

$$I^m_{(n)} = \int \Big(G^{(n,m)}_{ij}(u) u^i_{(n)} u^j_{(n)} + D^{(n,m)}_{ijk}(u) u^i_x u^j_{(n-1)} u^k_{(n)} +$$

$$+ \dots + E^{(n,m)}_{i_1 \dots i_{2n}}(u) u^{i_1}_x u^{i_2}_x \dots u^{i_{2n}}_x \Big)\,dx,$$

где $u^i_{(n)} = \partial^n_x u^i$. Старший коэффициент плотности интеграла $I^m_{(n)}$ определяет метрику $G^{(n,m)}_{ij}$, причем метрика каждого интеграла $I^m_{(n)}$ связана с метрикой предыдущего по формуле

Первые интегралы системы (2) и схема Ленарда–Магри

Теорема (продолжение)

$$G_{ij}^{(n,m)} = R_i^q\, G_{qj}^{(n-1,m)}, \text{ где}$$

$$R_1^1 = -\frac{1}{(u^1-u^2)^2} - \frac{1}{(u^1-u^3)^2}, \qquad R_1^2 = -\frac{u^1-2u^2+u^3}{(u^1-u^2)^2(u^2-u^3)},$$

$$R_1^3 = \frac{u^1+u^2-2u^3}{(u^1-u^3)^2(u^2-u^3)}, \qquad R_2^1 = -\frac{-2u^1+u^2+u^3}{(u^1-u^2)^2(u^1-u^3)},$$

$$R_2^2 = -\frac{1}{(u^1-u^2)^2} - \frac{1}{(u^2-u^3)^2}, \qquad R_2^3 = \frac{u^1+u^2-2u^3}{(u^1-u^3)(u^2-u^3)^2},$$

$$R_3^1 = -\frac{-2u^1+u^2+u^3}{(u^1-u^2)(u^1-u^3)^2}, \qquad R_3^2 = \frac{u^1-2u^2+u^3}{(u^1-u^2)(u^2-u^3)^2},$$

$$R_3^3 = -\frac{1}{(u^1-u^3)^2} - \frac{1}{(u^2-u^3)^2}.$$

Уравнения ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае 4 примарных полей

Рассмотрим случай 4 примарных полей и антидиагональную матрицу

$$(\eta_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрице η_{ij} соответствуют функция $F(t^1, t^2, t^3, t^4) = \frac{1}{2}(t^1)^2 t^4 + t^1 t^2 t^3 + f(t^2, t^3, t^4)$ и уравнения ассоциативности $(x = t^2,\ y = t^3,\ z = t^4)$:

$$\begin{aligned} &- 2f_{xyz} - f_{xyy} f_{xxy} + f_{yyy} f_{xxx} = 0, \\ &- f_{xzz} - f_{xyy} f_{xxz} + f_{yyz} f_{xxx} = 0, \\ &- 2f_{xyz} f_{xxz} + f_{xzz} f_{xxy} + f_{yzz} f_{xxx} = 0, \\ &f_{zzz} - (f_{xyz})^2 + f_{xzz} f_{xyy} - f_{yyz} f_{xxz} + f_{yzz} f_{xxy} = 0. \end{aligned} \qquad (10)$$

Уравнения ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае 4 примарных полей

В новых переменных

$$f_{xxx} = a, \quad f_{xxy} = b, \quad f_{xxz} = c, \quad f_{xyy} = d, \quad f_{xyz} = e, \quad f_{xzz} = f$$

уравнения ассоциативности (10) можно записать в виде пары коммутирующих шестикомпонентных систем гидродинамического типа (Мохов, Ферапонтов):

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}_y = \begin{pmatrix} b \\ d \\ e \\ R \\ P \\ S \end{pmatrix}_x, \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}_z = \begin{pmatrix} c \\ e \\ f \\ P \\ S \\ Q \end{pmatrix}_x, \tag{11}$$

где

$$f_{yyz} = P = \frac{cd + f}{a}, \quad f_{yyy} = R = \frac{2e + bd}{a}, \quad f_{yzz} = S = \frac{2ec - bf}{a},$$

$$f_{zzz} = Q = e^2 - fd + \frac{c^2 d + cf - 2bec + b^2 f}{a}.$$

Уравнения ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае 4 примарных полей

Введем переменные

$$
\begin{aligned}
a =& u^1 \\
b =& (u^2 + u^3 + u^4 + u^5)/2, \\
c =& \left((u^2)^2 + (u^3)^2 + (u^4)^2 + (u^5)^2\right)/4 - (u^2 + u^3 + u^4 + u^5)^2/8 - ad/2, \\
e =& (2bc + u^2 u^3 u^4 + u^2 u^3 u^5 + u^2 u^4 u^5 + u^3 u^4 u^5)/(2a), \\
f =& (c^2 - u^2 u^3 u^4 u^5)/a, \\
d =& u^6.
\end{aligned}
$$

Уравнения ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае 4 примарных полей

Теорема (Мохов, Ферапонтов)

Системы (11) представляются в следующей гамильтоновой форме

$$u^i_y = M^{ij}(u)\frac{\delta H^y}{\delta u^j}, \qquad u^i_z = M^{ij}(u)\frac{\partial H^z}{\partial u^j},$$

$$H^y = \int e(u)\,dx, \qquad H^z = \int f(u)/2\,dx,$$

$$(M^{ij}(u)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{d}{dx}$$

Уравнения ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае 4 примарных полей

Теорема (Павлов, Витоло)

Системы (11) бигамильтоновы.

Также в работе Павлова и Витоло найдены квадратичные по скоростям законы сохранения обеих систем

$$h_{1k} = G_{ij}^{(k)} u_x^i u_x^j, \qquad k = 1, \dots, 4,$$

Метрики удовлетворяют линейному условию:

$$G_{ij}^{(4)} = -\left(G_{ij}^{(1)} + G_{ij}^{(2)} + G_{ij}^{(3)}\right),$$

Все метрики $G_{ij}^{(k)}$ вырожденны, однако их произвольная линейная комбинация

$$G_{ij} = \lambda G_{ij}^{(1)} + \mu G_{ij}^{(2)} + \nu G_{ij}^{(3)}, \tag{12}$$

невырожденна при всех λ, μ, ν, кроме $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 0$, $\lambda = \mu$, $\lambda = \nu$, $\mu = \nu$.

Редукция уравнений ассоциативности в случае 4 примарных полей

Ограничим системы гидродинамического типа (11), эквивалентные уравнениям ассоциативности (10) с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае четырех примарных полей на множество стационарных точек интеграла

$$I = \int G_{ij} u^i_x u^j_x \, dx = \int \left(\lambda G^{(1)}_{ij} + \mu G^{(2)}_{ij} + \nu G^{(3)}_{ij} \right) u^i_x u^j_x \, dx, \qquad (13)$$

$$\lambda \neq 0, \quad \mu \neq 0, \quad \nu \neq 0, \quad \lambda \neq \mu, \quad \lambda \neq \nu, \quad \mu \neq \nu.$$

Редукция уравнений ассоциативности в случае 4 примарных полей

Теорема

Системы гидродинамического типа (11), ограниченные на множество стационарных точек их общего невырожденного интеграла I (13), являются каноническими конечномерными гамильтоновыми динамическими системой с гамильтонианами $-\widehat{Q}^y$ и $-\widehat{Q}^z$ соответственно:

$$\left(q_i^k\right)_y = -\left\{q_i^k, \widehat{Q}^y\right\}, \quad \left(p_k^i\right)_y = -\left\{p_k^i, \widehat{Q}^y\right\}, \qquad \widehat{Q}^y = g^{(y)ij} p_i p_j,$$

$$\left(q_i^k\right)_z = -\left\{q_i^k, \widehat{Q}^z\right\}, \quad \left(p_k^i\right)_z = -\left\{p_k^i, \widehat{Q}^z\right\}, \qquad \widehat{Q}^z = g^{(z)ij} p_i p_j.$$

Также гамильтонианы $-\widehat{Q}^y$, $-\widehat{Q}^z$ и гамильтониан лагранжевой системы $H = g_H^{ij} p_i p_j = G^{ij} p_i p_j / 4$, $G^{ij} G_{jk} = \delta_k^i$, в инволюции относительно канонической скобки Пуассона:

$$\left\{\widehat{Q}^y, H\right\} = \left\{\widehat{Q}^z, H\right\} = 0.$$

$$G^{(1)}_{11} = \frac{3(u^2)^2 + (u^3)^2 + (u^4)^2 + (u^5)^2 - 2u^2(u^3 + u^4 + u^5)}{8(u^1)^2(u^2 - u^3)(u^2 - u^4)(u^2 - u^5)},$$

$$G^{(1)}_{12} = -\frac{(3u^2 - u^3 - u^4 - u^5)}{16u^1(u^2 - u^3)^2(u^2 - u^4)^2(u^2 - u^5)^2}\big(3(u^2)^3 - (u^3)^2(u^4 + u^5) -$$
$$- u^4u^5(u^4 + u^5) - 3(u^2)^2(u^3 + u^4 + u^5) - u^3\big((u^4)^2 - 3u^4u^5 +$$
$$+ (u^5)^2\big) + u^2\big(2(u^3)^2 + 2(u^4)^2 + u^4u^5 + 2(u^5)^2 + u^3(u^4 + u^5)\big)\big),$$

$$G^{(1)}_{13} = \frac{7(u^2)^2 + 3(u^3)^2 + (u^4 + u^5)^2 - 2u^2(3u^3 + 2(u^4 + u^5))}{16u^1(u^2 - u^3)^2(u^2 - u^4)(u^2 - u^5)},$$

$$G^{(1)}_{14} = \frac{7(u^2)^2 + (u^3)^2 + 3(u^4)^2 + 2u^3u^5 + (u^5)^2 - 2u^2(2u^3 + 3u^4 + 2u^5)}{16u^1(u^2 - u^3)(u^2 - u^4)^2(u^2 - u^5)},$$

$$G^{(1)}_{15} = \frac{7(u^2)^2 + (u^3)^2 + 2u^3u^4 + (u^4)^2 + 3(u^5)^2 - 2u^2(2u^3 + 2u^4 + 3u^5)}{16u^1(u^2 - u^3)(u^2 - u^4)(u^2 - u^5)^2},$$

$$G^{(1)}_{16} = \frac{1}{4(u^2 - u^3)(u^2 - u^4)(u^2 - u^5),}$$

$$
\begin{aligned}
G^{(1)}_{22} =& \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{(u^2-u^3)^3}+\frac{1}{(u^2-u^4)^3}+\frac{1}{(u^2-u^5)^3}+\\
&+\frac{1}{(u^2-u^3)(u^2-u^4)(u^2-u^5)}\Big),\\
G^{(1)}_{23} =& -\frac{1}{8(u^2-u^3)^3(u^2-u^4)^2(u^2-u^5)^2}\big(6(u^2)^4+2(u^4)^2(u^5)^2+(u^3)^3(u^4+\\
&+u^5)+(u^3)^2\big((u^4)^2+(u^5)^2\big)-(u^2)^3(10u^3+7(u^4+u^5))+\\
&+(u^2)^2\big(8(u^3)^2+3(u^4)^2+8u^4u^5+3(u^5)^2+7u^3(u^4+u^5)\big)-\\
&-u^2\big(5(u^3)^2(u^4+u^5)+4u^4u^5(u^4+u^5)+2u^3\big((u^3)^2+(u^4)^2+(u^5)^2\big)\big)\big),\\
G^{(1)}_{24} =& \frac{-1}{8(u^2-u^3)^2(u^2-u^4)^3(u^2-u^5)^2}\big(6(u^2)^4+u^3(u^4)^3+(u^4)^2u^5(u^4+u^5)-\\
&-(u^2)^3(7u^3+10u^4+7u^5)+(u^3)^2\big((u^4)^2+2(u^5)^2\big)+(u^2)^2\big(3(u^3)^2+\\
&+8(u^4)^2+7u^4u^5+3(u^5)^2+u^3(7u^4+8u^5)\big)-u^2\big(2(u^3)^2(u^4+\\
&+2u^5)+u^4\big(2(u^4)^2+5u^4u^5+2(u^5)^2\big)+u^3\big(5(u^4)^2+4(u^5)^2\big)\big)\big),
\end{aligned}
$$

$$G_{25}^{(1)} = \frac{-1}{8(u^2-u^3)^2(u^2-u^4)^2(u^2-u^5)^3}\big(6(u^2)^4 + u^3(u^5)^3 + u^4(u^5)^2(u^4+u^5) -$$
$$- (u^2)^3(7u^3+7u^4+10u^5) + (u^3)^2\big(2(u^4)^2+(u^5)^2\big) + (u^2)^2\big(3(u^3)^2 +$$
$$+ 3(u^4)^2 + 7u^4u^5 + 8(u^5)^2 + u^3(8u^4+7u^5)\big) - u^2\big(2(u^3)^2(2u^4+u^5) +$$
$$+ u^5\big(2(u^4)^2 + 5u^4u^5 + 2(u^5)^2\big) + u^3\big(4(u^4)^2 + 5(u^5)^2\big)\big)\big),$$

$$G_{26}^{(1)} = -\frac{u^1\left(3(u^2)^2 + u^4u^5 + u^3(u^4+u^5) - 2u^2(u^3+u^4+u^5)\right)}{4(u^2-u^3)^2(u^2-u^4)^2(u^2-u^5)^2},$$

$$G_{33}^{(1)} = \frac{2(u^2)^2 + (u^3)^2 + u^4u^5 - u^2(2u^3+u^4+u^5)}{4(u^2-u^3)^3(u^2-u^4)(u^2-u^5)},$$

$$G_{34}^{(1)} = \frac{4(u^2)^2 + (u^3)^2 + u^3u^5 + u^4(u^4+u^5) - u^2(3u^3+3u^4+2u^5)}{8(u^2-u^3)^2(u^2-u^4)^2(u^2-u^5)},$$

$$G_{35}^{(1)} = \frac{4(u^2)^2 + (u^3)^2 + u^3u^4 + u^5(u^4+u^5) - u^2(3u^3+2u^4+3u^5)}{8(u^2-u^3)^2(u^2-u^4)(u^2-u^5)^2},$$

$$G^{(1)}_{36} = \frac{u^1}{4(u^2-u^3)^2(u^2-u^4)(u^2-u^5)},$$

$$G^{(1)}_{44} = \frac{2(u^2)^2+(u^4)^2+u^3u^5-u^2(u^3+2u^4+u^5)}{4(u^2-u^3)(u^2-u^4)^3(u^2-u^5)},$$

$$G^{(1)}_{45} = \frac{4(u^2)^2+(u^4)^2+(u^5)^2+u^3(u^4+u^5)-u^2(2u^3+3(u^4+u^5))}{8(u^2-u^3)(u^2-u^4)^2(u^2-u^5)^2},$$

$$G^{(1)}_{46} = \frac{u^1}{4(u^2-u^3)(u^2-u^4)^2(u^2-u^5)},$$

$$G^{(1)}_{55} = \frac{2(u^2)^2+u^3u^4+(u^5)^2-u^2(u^3+u^4+2u^5)}{4(u^2-u^3)(u^2-u^4)(u^2-u^5)^3},$$

$$G^{(1)}_{56} = \frac{u^1}{4(u^2-u^3)(u^2-u^4)(u^2-u^5)^2},$$

$$G^{(1)}_{66} = 0.$$

Спасибо за внимание!