

# Конечномерные динамики систем эволюционных дифференциальных уравнений со многими пространственными переменными

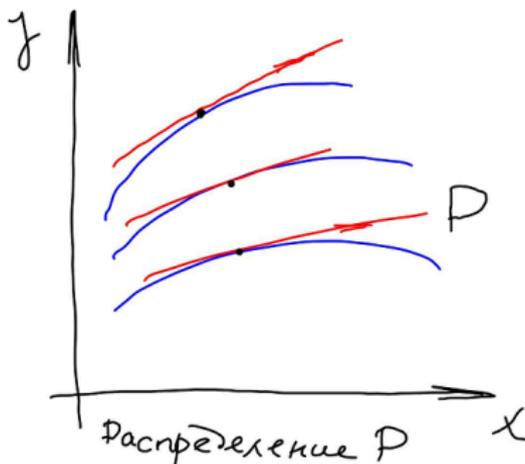
А.Г. Кушнер

Семинар И.С. Красильщика

Москва, НМУ  
26 апреля 2023 г.

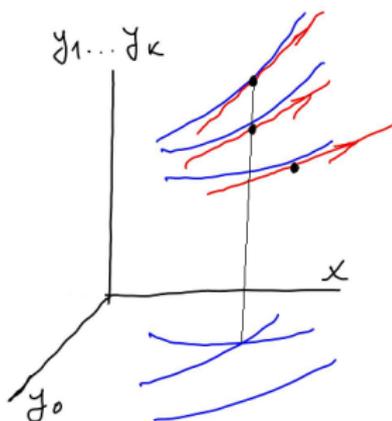
$$\frac{\partial u}{\partial t} = f \left( x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right)$$

$$y' = f(x, y)$$



$$D = \frac{\partial}{\partial x} + f(x, y) \frac{\partial}{\partial y}, \quad \omega = dy - f(x, y) dx$$

$$y^{(k+1)} = f(x, y, y', \dots, y^{(k)})$$



Распределение P в  $J^k$

$$\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial x} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_0} + \dots + f \frac{\partial}{\partial y_k}$$

$$\omega_0 = dy_0 - y_1 dx,$$

$$\omega_1 = dy_1 - y_2 dx, \dots$$

$\vdots$

$$\omega_{k-1} = dy_{k-1} - y_k dx$$

$$\omega_k = dy_k - f dx$$

**Инфинитезимальная симметрия** — векторное поле  $X$ , сдвиги вдоль которого являются симметриями ОДУ, т.е.  $\Phi_t^*(\omega_i) \wedge \omega_0 \cdots \wedge \omega_k = 0$  для всех  $i = 0 \dots k$ .

$$L_X(\omega_i) \wedge \omega_0 \cdots \wedge \omega_k = 0$$

Инфинитезимальные симметрии ОДУ образуют алгебру Ли  $\text{Symm } P$ .

Инфинитезимальные симметрии, сдвиги вдоль которых сохраняют каждую интегральную кривую распределения  $P$  называются **характеристическими**.

### Теорема

*Характеристические симметрии образуют идеал  $\text{Char } P$  в алгебре Ли  $\text{Symm } P$ , т.е.*

- если  $X \in \text{Char } P$  и  $Y \in \text{Symm } P$ , то  $[X, Y] \in \text{Char } P$ ;
- если  $X \in \text{Char } P$  и  $f \in C^\infty(J^k)$ , то  $fX \in \text{Char } P$ .

Фактор-алгебра Ли  $\text{Shuff } P := \text{Symm } P / \text{Char } P$  называется алгеброй Ли тасующих симметрий ОДУ.

$$S = \sum_{i=0}^k a_i \frac{\partial}{\partial y_i}, \quad a_i \in C^\infty(J^k)$$

### Теорема

Всякая тасующая симметрия определяется одной функцией  $\varphi \in C^\infty(J^k)$ , которая называется производящей функцией:

$$S = \sum_{i=0}^k \mathcal{D}^i(\varphi) \frac{\partial}{\partial y_i}.$$

$$\mathcal{D}^0 = \text{id}, \quad \mathcal{D}^i = \underbrace{\mathcal{D} \circ \dots \circ \mathcal{D}}_{i \text{ times}}$$

$$\mathbf{y}^{(k+1)} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \dots, \mathbf{y}^{(k)})$$

$$\mathbf{y} = (y^1, \dots, y^n)^T, \mathbf{f} = (f^1, \dots, f^n)^T$$

$J^k := J^k(1; n)$  – пространство  $k$ -джетов функций  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ .

Координаты  $x, y_i^j$  ( $i = 0, \dots, k; j = 1, \dots, n$ ).

$$\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{\substack{i=0, \dots, k-1 \\ j=1, \dots, n}} y_{i+1}^j \frac{\partial}{\partial y_i^j} + \sum_{j=1}^n f^j \frac{\partial}{\partial y_k^j}$$

$$\omega_i^j = dy_i^j - y_{i+1}^j dx, \quad \omega_k^j = dy_k^j - f^j dx \quad (i = 0, \dots, k-1; j = 1, \dots, n).$$

## Теорема

Всякая тасующая симметрия системы ОДУ определяется одной вектор-функцией  $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^n)$ :

$$S = \sum_{\substack{i=0, \dots, k \\ j=1, \dots, n}} \mathcal{D}^i(\varphi^j) \frac{\partial}{\partial y_i^j}.$$

## Теорема

Векторное поле  $S$  является инфинитезимальной симметрией системы ОДУ тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{D}^{k+1}(\varphi^j) - \sum_{i=0, \dots, k} \mathcal{D}^i(\varphi^j) \frac{\partial f^j}{\partial y_i^j} = 0.$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \varphi \left( x, \mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^k \mathbf{u}}{\partial x^k} \right)$$

Пусть  $\varphi(x, \mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_k)$  — производящая вектор-функция тасующих симметрий системы ОДУ

$$\mathbf{y}^{(k+1)} = \mathbf{f} \left( x, \mathbf{y}, \dots, \mathbf{y}^{(k)} \right).$$

Эта система ОДУ называется **конечномерной динамикой** системы эволюционных уравнений. Число  $k + 1$  называется **порядком** динамики

## Теорема

Обыкновенное дифференциальное уравнение

$$F = y_{k+1} - f(x, y_0, y_1, \dots, y_k) = 0$$

является динамикой эволюционного уравнения

$u_t = \varphi(x, u, u_x, u_{xx}, \dots)$  тогда и только тогда, когда

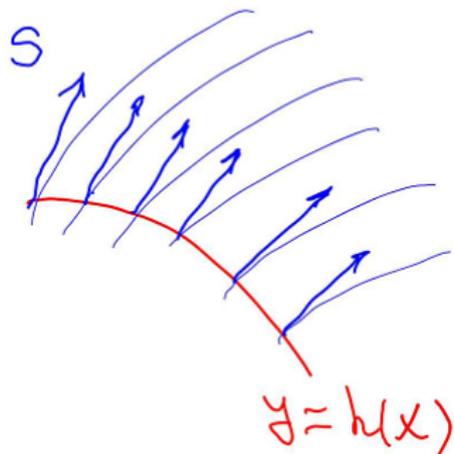
$[\varphi, F] = 0 \bmod \mathbf{DF}$ , где  $\mathbf{DF} = \langle F, D(F), D^2(F), \dots \rangle$  —

дифференциальный идеал, порожденной функцией  $F$ ,

$D = \frac{\partial}{\partial x} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_0} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots$  оператор полной производной по  $x$  и

$$[\phi, F] = \sum_{i \geq 0} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y_i} D^i(F) - \frac{\partial F}{\partial y_i} D^i(\phi) \right)$$

скобка Пуассона–Ли, продолженная в пространство джетов.



Пусть  $\Phi_t$  сдвиг вдоль  $S$  от  $t = 0$  до  $t$  и  $\Gamma_{y(x)}^k = \{y_0 = y(x), \dots\}$  —  $k$ -график решения  $y(x)$  системы ОДУ.

### Теорема

Поверхность  $\Phi_t \left( \Gamma_{y(x)}^{(k)} \right) \subset J^k(2; n)$  является  $k$ -графиком решения эволюционного уравнения.

$$u_t = u_{xx} + f(u)$$

## Теорема

Уравнение КПП допускает динамики второго порядка вида  $F := y_2 - A(y_0)y_1 - B(y_0)$  тогда и только тогда, когда

$$f(u) = f_3 u^3 + f_2 u^2 + f_1 u + f_0,$$

где  $f_0, \dots, f_3 \in \mathbb{R}$ .

Рассмотрим случай  $f_3 < 0$ , т.е.  $f_3 = -2q^2$ . Динамика:

$$y'' + \left(3qy - \frac{f_2}{2q}\right) y' + q^2 y^3 - \frac{f_2}{2} y^2 - \frac{f_1}{2} y - \frac{f_0}{2} = 0.$$

Распределение P:

$$\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial x} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_0} - \left( \left( 3qy_0 - \frac{f_2}{2q} \right) y_1 + q^2 y_0^3 - \frac{f_2}{2} y_0^2 - \frac{f_1}{2} y_0 - \frac{f_0}{2} \right) \frac{\partial}{\partial y_1}$$

$$\omega_1 = dy_0 - y_1 dx,$$

$$\omega_2 = dy_1 + \left( \left( 3qy_0 - \frac{f_2}{2q} \right) y_1 + q^2 y_0^3 - \frac{f_2}{2} y_0^2 - \frac{f_1}{2} y_0 - \frac{f_0}{2} \right) dx.$$

Тасующие симметрии:

$$\begin{aligned} S_1 &= \bar{\phi} \frac{\partial}{\partial y_0} + \mathcal{D}(\bar{\phi}) \frac{\partial}{\partial y_1} \\ &= \left( -3q^2 y_0^3 + \frac{3}{2} f_2 y_0^2 + \left( -3q y_1 + \frac{3}{2} f_1 \right) y_0 + \frac{1}{2q} f_2 y_1 + \frac{3}{2} f_0 \right) \frac{\partial}{\partial y_0} \\ &\quad \left( 3q^3 y_0^4 - 2qf_2 y_0^3 + \frac{1}{4q^2} (-6q^3 f_1 + qf_2^2) y_0^2 + \frac{1}{4q^2} (qf_1 f_2 - 6q^3 f_0) y_0 \right. \\ &\quad \left. - 3q y_1^2 + \frac{1}{4q^2} (6f_1 q^2 + f_2^2) y_1 + \frac{1}{4q} f_0 f_2 \right) \frac{\partial}{\partial y_1} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} S_2 &= y_1 \frac{\partial}{\partial y_0} + \mathcal{D}(y_1) \frac{\partial}{\partial y_1} \\ &= y_1 \frac{\partial}{\partial y_0} + \left( -q^2 y_0^3 + \frac{1}{2} f_2 y_0^2 + \left( -3q y_1 + \frac{1}{2} f_1 \right) y_0 + \frac{1}{2q} f_2 y_1 + \frac{1}{2} f_0 \right) \frac{\partial}{\partial y_1}. \end{aligned}$$

$$[S_1, S_2] = 0.$$

$$W = \begin{vmatrix} \omega_1(S_1) & \omega_1(S_2) \\ \omega_2(S_1) & \omega_2(S_2) \end{vmatrix}$$

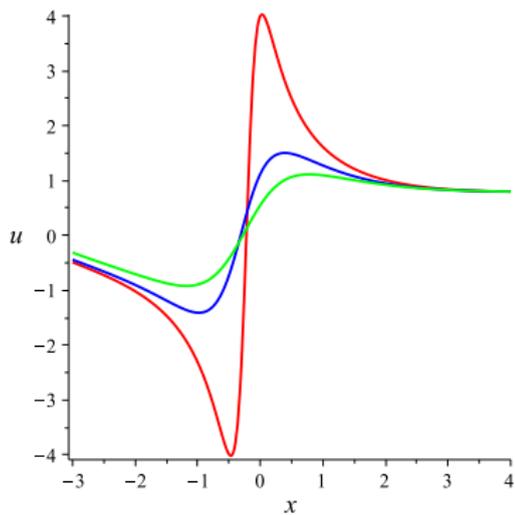
Рассмотрим область где  $\det W \neq 0$ . Тогда вместо форм  $\omega_1, \omega_2$  рассмотрим формы

$$\begin{vmatrix} \varpi_1 \\ \varpi_2 \end{vmatrix} = W^{-1} \begin{vmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{vmatrix}.$$

Тогда  $\varpi_i(S_j) = \delta_{i,j}$ . Так как  $[S_1, S_2] = 0$ , то

$$d\varpi_i(S_1, S_2) = S_1(\varpi_i(S_2)) - S_2(\varpi_i(S_1)) - \varpi_i([S_1, S_2]) = 0.$$

$$d\varpi_i = 0 \Rightarrow \varpi_i = dH_i$$



$$u_t = u_{xx} - 2u^3 + 1$$

$$\phi = y^2 - 2y_0^3 + 1$$

Динамика:

$$y'' + 3yy' + y^3 - \frac{1}{2} = 0$$

$$y(x) = \frac{C_1 e^{\frac{2}{\sqrt{3}}\chi} - \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}\chi} (\sqrt{3}C_2 + 1) \cos \chi + \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}\chi} (C_2 - \sqrt{3}) \sin \chi}{\sqrt{2} \left( C_1 e^{\frac{2}{\sqrt{3}}\chi} - C_2 e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}\chi} \sin \chi + e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}\chi} \cos \chi \right)}$$

$$\chi = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{16}} x.$$

$$u_t + H(u)_x = u_{xx} + f(u)$$

$$u_t = u_{xx} - (u + 1)u_x + \frac{1}{8}u^3$$

Динамика:  $F = y_2 - \frac{3}{4}y_0y_1 + \frac{1}{16}y_0^3$

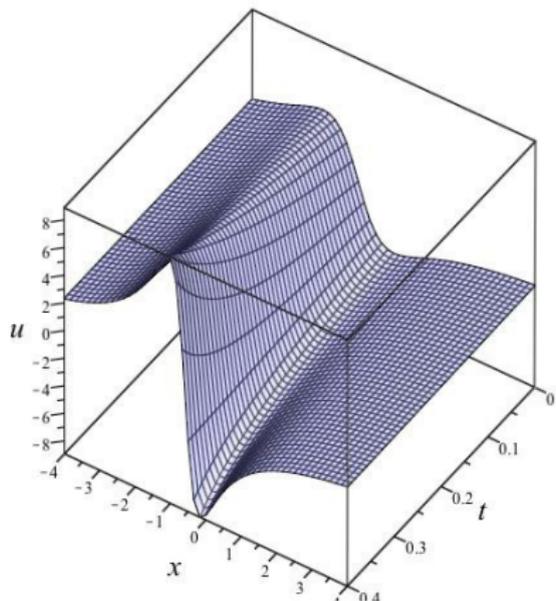
$$y(x) = -\frac{8(C_1x + C_2)}{C_1x^2 + 2C_2x + 2}$$

$$S = \left(-\frac{1}{4}y_0y_1 + \frac{1}{16}y_0^3 - y_1\right) \frac{\partial}{\partial y_0} + \left(-\frac{1}{4}y_1^2 - \frac{3}{4}y_0y_1 + \frac{1}{64}y_0^4 + \frac{1}{16}y_0^3\right) \frac{\partial}{\partial y_1}.$$

Сдвиг вдоль  $S$ :

$$y_0 \mapsto \frac{8(ty_0^2 - 4y_1t + 4y_0)}{(t^2 - 2t)y_0^2 + 8ty_0 + 32 + (8t - 4t^2)y_1},$$

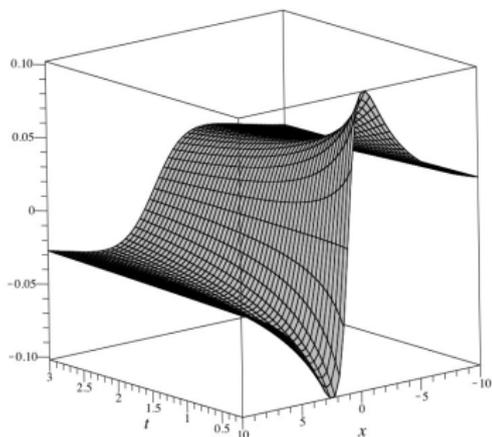
$$y_1 \mapsto \frac{8((2t + t^2)y_0^4 + 8ty_0^3 - 8ty_1(2 + t)y_0^2 - 32ty_0y_1 + 128y_1 + 16t^2y_1^2 + 32ty_1^2)}{((t^2 - 2t)y_0^2 + 8ty_0 - 4t^2y_1 + 8y_1t + 32)^2}$$



$$u(t, x) = -\frac{8(C_1(x-t) + C_2)}{2 + ((x-t)^2 - 2t)C_1 + (2(x-t))C_2}$$

# Уравнение Бюргера–Хаксли

$$u_t + uu_x = u_{xx} + f(u)$$



$$u_t + uu_x = u_{xx} + \frac{1}{9}u^3 + \frac{1}{3}bu^2$$

Динамика:

$$y'' - yy' + \frac{1}{9}y^3 + \frac{1}{3}by^2 = 0$$

$$y(x) = -\frac{3C_2 + 3b \exp(bx)}{C_1 + C_2x + \exp(bx)}.$$

$$u(t, x) = -\frac{3(b \exp(b(bt + x)) + C_2)}{C_1 + C_2bt + \exp(b(bt + x)) + C_2x}$$

$$u_t = f(u)u_{xxx}$$

Динамики первого порядка:  $y_1 + A(y_0) = 0$ .

$$A(y_0) = \pm \sqrt{-C_1 y_0 \int \frac{dy_0}{y_0} + C_1 \int \frac{y_0 dy_0}{f(y_0)} + C_2 y_0 + C_3}$$

Классическое уравнение HD:  $f(u) = u^3$ .

$$u'(x) + \sqrt{\frac{1}{u(x)}}, \quad x + \frac{2}{3}u(x)\sqrt{u(x)} + C_1 = 0$$

$$u(x) = -\frac{1}{2}(-18(C_1 + x)^2)^{1/3}$$

$$u(t, x) = -\frac{1}{2}2^{1/3} \left( -(2y_0^{3/2} - 3(t + x - x_0))^2 \right)^{1/3}$$

$$u_t = e^u u_{xxx}$$

$$y' + e^{-y/2} = 0, \quad y(x) = -\ln \frac{4}{(x + \alpha)^2}$$

$$u(t, x) = -2 \ln \frac{4}{(2(x + \alpha) + t)^2}$$

$$u_t = \sqrt[3]{u} u_{xxx}$$

$$A(y_0) = \pm \sqrt{C_1 y_0^{5/3} + C_2 y_0 + C_3}.$$

$$u(t, x) = \frac{1}{24794911296} (9(x + \alpha) + 5t)^6$$

$$u_t = -\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 u_{xx} - rxu_x + ru$$

$$F = y_1 - A(x)y_0 - B(x).$$

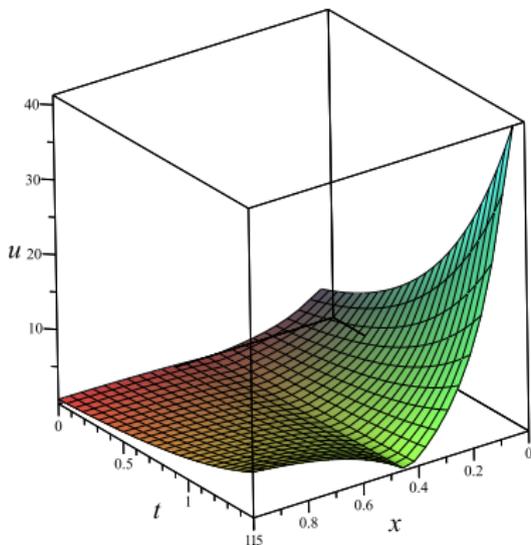
$$\begin{cases} \frac{1}{2}A''\sigma^2 x^2 + (A\sigma^2 x + \sigma^2 + r)x A' + A^2\sigma^2 x + Ar = 0, \\ \frac{1}{2}B''\sigma^2 x + (\sigma^2 + r)B' + \sigma^2(xA' + A)B = 0. \end{cases}$$

$$F = y_1 - \frac{1}{2\sigma^2 x}(\sigma^2 - 2r)y_0 - C_3 x^{-\frac{\sigma^2+2r}{\sigma^2}} - C_4$$

$$y(x) = C_5 x^{\frac{\sigma^2-2r}{2\sigma^2}} - \frac{2\sigma^2(C_3 x^{-\frac{2r}{\sigma^2}} - C_4 x)}{\sigma^2 + 2r},$$

$$F = y_1 - \frac{1}{2\sigma^2 x} \left( \sigma^2 - 2r - C_1 \tan \left( \frac{C_1 \ln x - C_2}{2\sigma^2} \right) \right) y_0.$$

$$y(x) = C_3 x^{\frac{\sigma^2-2r}{2\sigma^2}} \cos \left( \frac{C_1 \ln x - C_2}{2\sigma^2} \right).$$



$$u(t, x) = C_3 x^{\frac{\sigma^2 - 2r}{2\sigma^2}} \cos\left(\frac{C_1 \ln x - C_2}{2\sigma^2}\right) e^{-\frac{C_1^2 + (\sigma^2 + 2r)^2}{8\sigma^2} t}.$$

$$\sigma = r = 1 :$$

$$u(t, x) = \frac{e^{\frac{3}{2}t}}{\sqrt{2x}} \sqrt{\sin(\sqrt{3} \ln x) + 1}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x} - h(v)u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = h(v)u. \end{cases}$$

Производящая вектор-функция ( $u^1 = u, u^2 = v$ ):

$$\begin{pmatrix} \varphi^1 \\ \varphi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_1^1 - h(y_0^2)y_0^1 \\ h(y_0^2)y_0^1 \end{pmatrix}.$$

Динамики первого порядка:

$$\begin{cases} y_1^1 = f^1(y_0^1, y_0^2), \\ y_1^2 = f^2(y_0^1, y_0^2). \end{cases}$$

$$\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial x} + f^1(y_0^1, y_0^2) \frac{\partial}{\partial y_0^1} + f^2(y_0^1, y_0^2) \frac{\partial}{\partial y_0^2}$$

Случай линейной функции  $h: h(y_0^2) = \alpha y_0^2 + \beta$ .

$$\begin{cases} f^1 = (\delta - \alpha(y_0^1 + y_0^2))y_0^1, \\ f^2 = \frac{1}{\beta + \xi - \alpha y_0^1} \left( (\beta + \xi - \alpha y_0^1)^2 H \left( \frac{\alpha y_0^2 + \beta}{\alpha(\beta + \xi - \alpha y_0^1)} \right) - y_0^1(\alpha y_0^2 + \beta)(\xi - \alpha(y_0^1 + y_0^2)) \right) \end{cases} \quad (1)$$

Положим  $\alpha = -1, \beta = 1, \delta = \xi = 0$ .

$$\begin{cases} y^1(x) = \frac{C_2}{\exp(C_1 \exp x - x - 1) - C_2}, \\ y^2(x) = \frac{(C_1 \exp x - 1) \exp(C_1 \exp x - 1) + C_2 \exp x}{C_2 \exp x - \exp(C_1 \exp x - 1)}, \end{cases}$$

$$S = -y_0^1(1 + y_0^1) \frac{\partial}{\partial y_0^1} + y_0^1(1 - y_0^2) \frac{\partial}{\partial y_0^2}$$

$$\Phi_t : (x, y_0^1, y_0^2) \mapsto \left( x, \frac{y_0^1}{e^t(1 + y_0^1) - y_0^1}, -\frac{e^t((e^{-t} - 1)y_0^1 - y_0^2)}{e^t(1 + y_0^1) - y_0^1} \right)$$

$$\begin{cases} u(t, x) = \frac{C_2 e^{x+1}}{e^{C_1 x+t} - C_2 e^{x+1}}, \\ v(t, x) = -\frac{C_2 e^{x+1} + (C_1 e^x - 1)e^{C_1 e^x+t}}{e^{C_1 x+t} - C_2 e^{x+1}}. \end{cases}$$

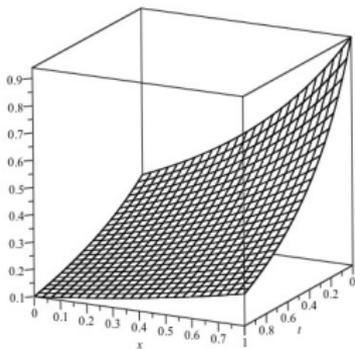


Рис. : График функции  $u$ .

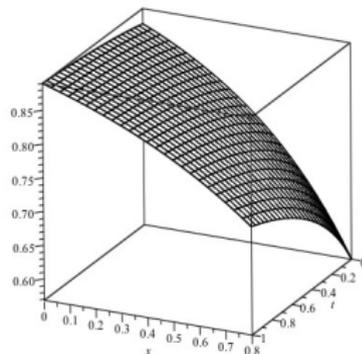


Рис. : График функции  $u$ .

$$u_{tt} = f(x, u, u_t, u_x, u_{tx}, u_{xx}, u_{txx}, u_{xxx}, \dots)$$

$$u_{tt} + 2b(x)u_{tx} + c(x)u_{xx} + h(x)u_t + g(x)u_x + f(x) = 0$$

$$\begin{cases} u_t = v, \\ v_t = -2b(x)v_x - c(x)u_{xx} - h(x)v - g(x)u_x - f(x). \end{cases}$$

Производящая вектор-функция:

$$\begin{pmatrix} \varphi^1 \\ \varphi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0^2 \\ -2b(x)y_1^2 - c(x)y_2^1 - h(x)y_0^2 - g(x)y_1^1 - f(x) \end{pmatrix}$$

$$u_{tt} - u_{xx} = au + bu_t + c$$

Динамика:

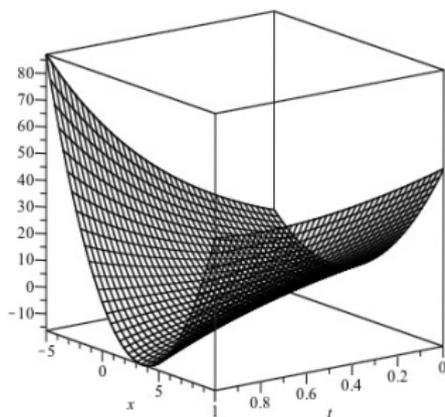
$$\begin{cases} y_2^1 = \frac{2b\alpha - (x + \beta)\alpha^2}{4b^2 + 16a - \alpha^2(x + \beta)^2} \times y_1^1 - \frac{4\alpha}{4b^2 + 16a - \alpha^2(x + \beta)^2} \times y_1^2, \\ y_2^2 = -\frac{4a\alpha}{4b^2 + 16a - \alpha^2(x + \beta)^2} \times y_1^1 - \frac{2b\alpha + \alpha^2(x + \beta)}{4b^2 + 16a - \alpha^2(x + \beta)^2} \times y_1^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^1(x) = \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4, \\ y^2(x) = \frac{1}{8\alpha} \left( x(C_2\beta - C_3)(2\beta + x)\alpha^2 + (8C_1 + 2bx^2C_2 + 4bC_3x)\alpha - 32 \left( a + \frac{b^2}{4} \right) C_2x \right). \end{cases}$$

$$S = y_0^2 \frac{\partial}{\partial y_0^1} + \frac{(x^2 - 20)(y_0^1 + y_0^2) + (x + 2)y_1^1 + x^2 - 20 + 4y_1^2}{x^2 - 20} \frac{\partial}{\partial y_0^2} + y_1^2 \frac{\partial}{\partial y_1^1} + (y_1^1 + y_1^2) \frac{\partial}{\partial y_1^2}.$$

$$u(t, x) = -1 + \frac{1}{10} \left( \frac{5}{2}x^2 + 5 + (10x + 1 - t)\sqrt{5} \right) e^{-\frac{t}{2}(\sqrt{5}-1)} +$$

$$+ \frac{1}{10} \left( \frac{5}{2}x^2 + 5 + (-10x - 1 + t)\sqrt{5} \right) e^{\frac{t}{2}(\sqrt{5}+1)}$$



$$u_{xx} + u_{yy} = ku + g(x)$$

$$g(x) = g_2x^2 + g_1x + g_0$$

Динамика 1:

$$\begin{cases} y_2^1 = \frac{y_1^1}{x + \alpha} + \frac{2g_2\alpha - g_1}{k(x + \alpha)}, \\ y_2^2 = \frac{y_1^2}{x + \alpha} \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} y^1(x) = \frac{1}{2k} ((C_3x^2 + 2C_3x\alpha + 2C_4)k + 2x(-2g_2\alpha + g_1)), \\ y^2(x) = C_1 + C_2(x + \alpha)^2. \end{cases} \quad (3)$$

Динамика 2:

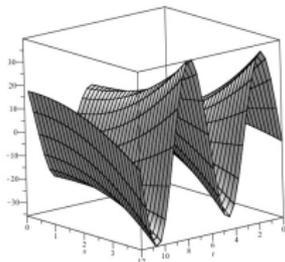
$$\begin{cases} y_2^1 - \frac{\beta^2(x + \alpha)y_1 + 4\beta y_1^2 + 32g_2}{(x + \alpha)^2\beta^2 + 16k} - \frac{(2g_2\alpha - g_1)(x + \alpha)\beta^2}{k((x + \alpha)^2\beta^2 + 16k)} = 0, \\ y_2^2 + \frac{4\beta k y_1 - \beta^2(x + \alpha)y_1^2 - \beta(8g_2x + 4g_1)}{(x + \alpha)^2\beta^2 + 16k} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^1(x) = \frac{1}{2}C_4x^2 + C_5x + C_6, \\ y^2(x) = \frac{1}{8k\beta} (x((C_4\alpha - C_5)k - 2\alpha g_2 + g_1)(x + 2\alpha)\beta^2 \\ + 8C_3\beta k + 32kx(C_4k - 2g_2)), \end{cases}$$

$$u_{tt} + u_{xx} = -u + x.$$

$$S = y_0^2 \frac{\partial}{\partial y_0^1} + \frac{x^2 - xy_0^1 - y_1^1 + 1}{x} \frac{\partial}{\partial y_0^1} + y_1^2 \frac{\partial}{\partial y_1^1} + (1 - y_1^1) \frac{\partial}{\partial y_1^2}$$

$$u(t, x) = \left( \frac{1}{2x} (2x^2 \sin^2 t + (4x^3 + xt) \sin t + 2 \cos t \left( x^2 \cos t - \frac{1}{2}x^3 + (2t + 1)x \right)) \right).$$



$$xu_{xx} + u_{yy} = \alpha u + \beta u_y + ax^2 + 2bx + c$$

$\alpha, \beta, a, b, c$  — постоянные. Система:

$$u_y = v, \quad v_y = -xu_{xx} + \alpha u + \beta v + ax^2 + 2bx + c,$$

Динамика:  $p'' = -\frac{2a}{\alpha}, q'' = 0$

Четырёхпараметрическое семейство решений уравнения Келдыша:

$u(x, y) =$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha^2 \sqrt{\beta^2 + 4\alpha}} (((C_3 x + C_4)\alpha^2 + (2^{-1}c + bx)\alpha + ax)\sqrt{\beta^2 + 4\alpha} \\ & + ((\beta C_3 - C_1)x - C_2 + \beta C_4)\alpha^2 + (2^{-1}c + bx)\beta\alpha + \beta ax)e^{\frac{1}{2}(\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\alpha})y} \\ & + (((C_3 x + C_4)\alpha^2 + (2^{-1}c + bx)\alpha + ax)\sqrt{\beta^2 + 4\alpha} + ((-\beta C_3 + C_1)x + C_2 - \beta C_4)\alpha^2 \\ & - (2^{-1}c + bx)\beta\alpha - \beta ax)e^{\frac{1}{2}(\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\alpha})y} - \sqrt{\beta^2 + 4\alpha}((c + ax^2 + 2bx)\alpha + 2ax) \end{aligned}$$

описывает процесс, при котором две компоненты бинарной жидкости самопроизвольно разделяются.

$$u_t + (Du_{xx} + f(u))_{xx} = 0$$

Если  $f(u) = \sum_{i=0}^3 f_i u^i$ , это уравнение имеет тривиальную динамику  $y'' = 0$ , которая, однако, приводит нас к нетривиальному точному решению уравнения К–Х:

$$u(t, x) = \frac{-f_2 \sqrt{1 + 12C_1^2 f_3 t} + 3f_3 (C_1 x + C_2) + f_2}{3f_3 \sqrt{1 + 12C_1^2 f_3 t}}$$

$$\mathcal{P} : \mathbb{R}^m \ni a \mapsto \mathcal{P}(a) \subset T_a \mathbb{R}^m.$$

$$\mathcal{P}(a) = \text{Span}(X_{1,a}, \dots, X_{p,a}), \quad \mathcal{P}(a) = \bigcap_{i=1}^{m-p} \ker \omega_{i,a}.$$

## Определение

Диффеоморфизм  $\Phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  называется симметрией распределения  $\mathcal{P}$  если  $\Phi_*(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$ , т.е.

$$\Phi_*(\mathcal{P}(a)) = \mathcal{P}(\Phi(a)) \quad \forall a \in \mathbb{R}^m$$

Инфинитезимальный аналог:  $\mathcal{L}_X(\omega_i) \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{m-p} = 0$ .

$\text{Sym}(\mathcal{P})$  –  $\mathbb{R}$ -алгебра Ли:

- $X + Y \in \text{Sym}(\mathcal{P})$  &  $[X, Y] \in \text{Sym}(\mathcal{P})$ ;
- $\lambda X \in \text{Sym}(\mathcal{P})$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

## Определение

*Характеристические симметрии распределения  $\mathcal{P}$ :*

$$\text{Char}(\mathcal{P}) := \text{Sym}(\mathcal{P}) \cap D(\mathcal{P})$$

## Теорема

*Характеристические симметрии касаются максимальных интегральных многообразий распределения  $\mathcal{P}$  и образуют идеал алгебры Ли  $\text{Sym}(\mathcal{P})$ .*

## Определение

*Тасующие симметрии распределения  $\mathcal{P}$ :*

$$\text{Shuf}(\mathcal{P}) := \text{Sym}(\mathcal{P}) / \text{Char}(\mathcal{P}).$$

$$\frac{\partial^{q+1} v}{\partial x^{\sigma+1_i}} = V_{\sigma+1_i} \left( x, v, \frac{\partial v}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^q v}{\partial x^q} \right), \quad |\sigma| = q; \quad i = 1, \dots, n.$$

Здесь  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  – мультииндекс,  $\sigma_i \in \{0, 1, \dots, q\}$ ,  $|\sigma| = \sigma_1 + \dots + \sigma_n$ ,

$$\frac{\partial^{q+1} v}{\partial x^{\sigma+1_i}} = \frac{\partial^{q+1} v}{\partial x_1^{\sigma_1} \dots \partial x_i^{\sigma_i+1} \dots \partial x_n^{\sigma_n}},$$

$$\sigma + 1_i = (\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_i + 1, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n).$$

Пусть  $J^q$  – пространство  $q$ -джетов гладких функций на  $\mathbb{R}^n$  с координатами

$$x([h]_a^q) = a, \quad v_\sigma([h]_a^q) = \frac{\partial^{|\sigma|} h}{\partial x_1^{\sigma_1} \dots \partial x_n^{\sigma_n}}(a).$$

$$\omega_\sigma = \begin{cases} dv_\sigma - \sum_{i=1}^n v_{\sigma+1_i} dx_i, & \text{if } 0 \leq |\sigma| < q, \\ dv_\sigma - \sum_{i=1}^n V_{\sigma+1_i}(x, v_\sigma) dx_i, & \text{if } |\sigma| = q. \end{cases}$$

$$\mathcal{P} : J^q \ni \theta \mapsto \mathcal{P}(\theta) = \bigcap_{0 \leq |\sigma| \leq q} \ker \omega_\sigma|_\theta \subset T_\theta J^q, \quad \dim \mathcal{P} = n$$

## Определение

*n*-мерное подмногообразие

$$\Gamma_h^q = \left\{ v_\sigma = \frac{\partial^\sigma h}{\partial x^\sigma}, 0 \leq |\sigma| \leq q \right\} \subset J^q$$

называется *q*-графиком функции  $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

Пусть распределение  $\mathcal{P}$  вполне интегрируемо. Тогда каждое его максимальное многообразие является *q*-графиком решения

системы PDE

Модуль  $D(\mathcal{P})$  порождён векторными полями

$$\mathcal{D}_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{0 \leq |\sigma| < q} v_{\sigma+1_i} \frac{\partial}{\partial v_\sigma} + \sum_{|\sigma|=q} V_{\sigma+1_i}(x, v_\sigma) \frac{\partial}{\partial v_\sigma} \quad (i = 1, \dots, n)$$

$$\text{Char}(\mathcal{P}) = \{h_1 \mathcal{D}_1 + \dots + h_n \mathcal{D}_n \mid h_1, \dots, h_n \in C^\infty(J^q)\}$$

### Теорема

Любой элемент алгебры  $\text{Shuf}(\mathcal{P})$  имеет единственного представителя вида

$$S_\varphi = \sum_{0 \leq |\sigma| \leq q} \mathcal{D}^\sigma(\varphi) \frac{\partial}{\partial v_\sigma},$$

где  $\mathcal{D}^\sigma = \mathcal{D}_1^{\sigma_1} \circ \dots \circ \mathcal{D}_n^{\sigma_n}$  и  $\varphi$  – функция на  $J^q$ , удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\mathcal{D}^{\sigma+1_i}(\varphi) - \sum_{|\sigma|=q} \mathcal{D}^\sigma(\varphi) \frac{\partial V_{\sigma+1_i}}{\partial v_\sigma} = 0, \quad i = 1, \dots, n; \quad |\sigma| = q.$$

Пример:  $n = 2, q = 1$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} = V_{20} \left( x_1, x_2, v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2} \right), \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} = V_{11} \left( x_1, x_2, v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2} \right), \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} = V_{02} \left( x_1, x_2, v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2} \right). \end{cases}$$

$$\omega_{00} = dv_{00} - v_{10} dx_1 - v_{01} dx_2,$$

$$\omega_{10} = dv_{10} - V_{20} dx_1 - V_{11} dx_2,$$

$$\omega_{01} = dv_{01} - V_{11} dx_1 - V_{02} dx_2,$$

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} + v_{10} \frac{\partial}{\partial v_{00}} + V_{20} \frac{\partial}{\partial v_{10}} + V_{11} \frac{\partial}{\partial v_{01}},$$

$$D_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + v_{01} \frac{\partial}{\partial v_{00}} + V_{11} \frac{\partial}{\partial v_{10}} + V_{02} \frac{\partial}{\partial v_{01}}$$

Условия теоремы Фробениуса:

$$\begin{cases} -V_{11} \frac{\partial V_{11}}{\partial v_{01}} + V_{02} \frac{\partial V_{20}}{\partial v_{01}} - V_{20} \frac{\partial V_{11}}{\partial v_{10}} + V_{11} \frac{\partial V_{20}}{\partial v_{10}} - v_{10} \frac{\partial V_{11}}{\partial v_{00}} + v_{01} \frac{\partial V_{20}}{\partial v_{00}} - \frac{\partial V_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial V_{20}}{\partial x_2} = 0, \\ -V_{11} \frac{\partial V_{02}}{\partial v_{01}} + V_{02} \frac{\partial V_{11}}{\partial v_{01}} - V_{20} \frac{\partial V_{02}}{\partial v_{10}} + V_{11} \frac{\partial V_{11}}{\partial v_{10}} - v_{10} \frac{\partial V_{02}}{\partial v_{00}} + v_{01} \frac{\partial V_{11}}{\partial v_{00}} - \frac{\partial V_{02}}{\partial x_1} + \frac{\partial V_{11}}{\partial x_2} = 0. \end{cases}$$

$$S_\varphi = \varphi \frac{\partial}{\partial v_{00}} + D_1(\varphi) \frac{\partial}{\partial v_{10}} + D_2(\varphi) \frac{\partial}{\partial v_{01}}.$$

$$\begin{cases} D_1^2(\varphi) - S_\varphi(V_{20}) = 0, \\ D_1 D_2(\varphi) - S_\varphi(V_{11}) = 0, \\ D_2^2(\varphi) - S_\varphi(V_{02}) = 0. \end{cases}$$

## Определение

*Система конечного типа*

$$\frac{\partial^{q+1} v}{\partial x^{\sigma+1} i} = V_{\sigma+1 i} \left( x, v, \frac{\partial v}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^q v}{\partial x^q} \right), \quad |\sigma| = q; \quad i = 1, \dots, n$$

*называется конечномерной динамикой эволюционного уравнения*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f \left( x, \frac{\partial^{|\sigma|} u}{\partial x^\sigma} \right), \quad 0 \leq |\sigma| \leq k$$

*если функция*

$$\varphi = f(x, v_\mu, V_{\sigma+1 i}), \quad \text{где } |\mu| \leq q, \quad |\sigma| = q, \quad i = 1, \dots, n$$

*является производящей функцией её тасующей симметрии.*

Для любого решения  $v = h(x)$  системы конечного (с.к.т.) типа его  $q$ -график является максимальным интегральным многообразием распределения  $\mathcal{P}$ . Если  $\Phi_t$  – симметрия с.к.т., то  $\Phi_t(\Gamma_h^q)$  также является  $q$ -графиком другого решения для любого  $t \in I$ .

Многообразие

$$L := \bigcup_{t \in I} \Phi_t(\Gamma_h^q) \subset J^q(\mathbb{R}^{n+1})$$

является  $q$ -графиком некоторого решения  $u = U(t, x)$  эволюционного уравнения.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial y}$$

Тогда  $n = 2$ ,  $\psi = v_{20} + v_{02} + v_{10} + v_{00}v_{01}$  и  
 $\varphi = V_{20} + V_{02} + v_{10} + v_{00}v_{01}$ . Динамика с  $q = 1$ :

$$v_{x_1 x_1} = av_{x_1} + bv_{x_2}, \quad v_{x_1 x_2} = v_{x_2 x_2} = 0$$

$$v(x_1, x_2) = C_1 e^{ax_1} + C_2(ax_2 - bx_1) + C_3$$

$$\varphi = v_{00}v_{01} + bv_{01} + (a + 1)v_{10}$$

$$S_\varphi = ((b + v_{00})v_{01} + (a + 1)v_{10}) \frac{\partial}{\partial v_{00}} + (a(a + 1)v_{10} + v_{01}(v_{10} + ba + b)) \frac{\partial}{\partial v_{10}} + v_{01}^2 \frac{\partial}{\partial v_{01}}.$$

$$\Phi_t : \begin{cases} x_1 = x_1, \\ x_2 = x_2, \\ v_{00} = \frac{a(bv_{01}t + v_{10}) + bv_{01} - a^2v_{00} - (av_{10} + bv_{01})e^{a(a+1)t}}{a^2(tv_{01} - 1)}, \\ v_{10} = \frac{(av_{10} + bv_{01} - bv_{01}e^{-a(a+1)t})e^{a(a+1)t}}{a(1 - tv_{01})}, \\ v_{01} = \frac{v_{01}}{1 - tv_{01}}. \end{cases}$$

Решение эволюционной системы:

$$u(t, x, y) = \frac{C_2(ay - b(t + x)) + C_1e^{a(a+1)t+ax} + C_3}{1 - C_2at}.$$

# Уравнение линейной неізотропной фильтрации

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)$$

$$\begin{aligned} u = & - [(bk_{211} + a(k_{120} - 1 - k_{202}))(k_{120} + k_{202} + 1) \\ & (k_{120} + k_{202} + 1)((k_{120} x_1 + k_{110} + x_1 k_{202} - x_1)k_{211} \\ & - (k_{120} + 1 - k_{202})(x_2 k_{120} + k_{201} - x_2 + k_{202} x_2)) \\ & \times e^{(k_{120} + k_{202} - 1)t} - (k_{120} + k_{202} - 1) \\ & (bk_{211} + a(k_{120} + 1 - k_{202}))((k_{120} x_1 + k_{110} \\ & + x_1 k_{202} + x_1)k_{211} - (k_{120} - 1 - k_{202})(x_2 k_{120} + k_{201} \\ & + x_2 + k_{202} x_2))e^{(k_{120} + k_{202} + 1)t} - 2bk_{211}^2 k_{110} \\ & + (4ak_{110} k_{202} + 4bk_{120} k_{201})k_{211} \\ & + 2ak_{201} (k_{120} + 1 - k_{202})(k_{120} - 1 - k_{202})] \\ & \times (2k_{211}(k_{120} + k_{202} + 1)(k_{120} + k_{202} - 1))^{-1}, \end{aligned}$$