Семинар «Когомологические аспекты геометрии дифференциальных уравнений»

Нелокальный Закон Сохранения в Затопленной Струе

В.В. Жвик

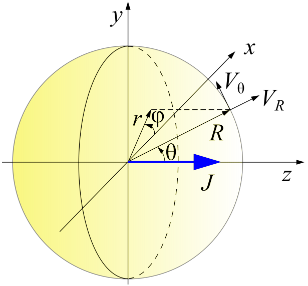
17 Марта 2021

Независимый Московский Университет, г. Москва

Содержание

Струя Ландау

- стационарное течение
- осесимметричное
- незакрученное
- автомодельное
- точечный источник импульса



Ландау Л.Д. (1944)

Об одном точном решении уравнений Навье–Стокса

Доклады АН СССР 43(7), 299 – 301.

Ур-я Навье–Стокса

$$\nabla \cdot \mathrm{V} = 0, \quad (\mathrm{V}\nabla)\mathrm{V} - \nabla p/\rho = \nu \Delta \mathrm{V}$$

Функция тока

$$d\psi = V_R R^2 \sin\theta d\theta - V_\theta R \sin\theta dR$$

Решение Ландау

$$\psi(R,\theta) = \nu R \frac{2\sin^2\theta}{A - \cos\theta}$$

$$p(R,\theta) = \rho \frac{4\nu^2}{R^2} \frac{A\cos\theta - 1}{(A-\cos\theta)^2}$$

Что такое $A = ?$

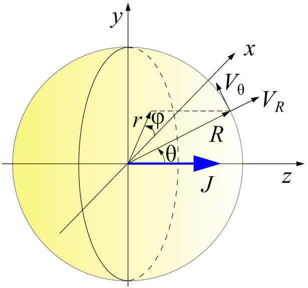
Локальные законы сохранения системы ур-й Навье–Стокса

Gusyatnikova V.N. & Yumaguzhin V.A. (1989)
Symmetries and Conservation Laws of Navier–Stokes Equations
Acta Applicandae Mathematicae 15, 65 – 81.

Законы сохранения (декартовы координаты)

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_i} = 0\,(\text{масса}), \quad \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_i} = 0\,(\text{импульс}), \quad \frac{\partial \mathrm{M}_{ij}}{\partial x_i} = 0\,(\text{момент импульса})$$

$$\Pi_{ij} = V_i V_j + p\delta_{ij}/\rho - \nu\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right), \quad \mathrm{M}_{ij} = e_{jnm} x_n \Pi_{im}$$



Сохранение **потока импульса** через любую сферу S_R [Ландау, 1944]

$$J = \oint_{S_R} (\Pi_{xz} n_x + \Pi_{yz} n_y + \Pi_{zz} n_z)\, dS =$$

$$16\pi\nu^2 A\left(1 + \frac{4}{3(A^2-1)} - \frac{A}{2}\ln\left(\frac{A+1}{A-1}\right)\right)$$

Расход через любую сферу S_R

$$Q = 2\pi\psi(R,\pi) = 0$$

Асимптотическое решение Румера

Румер Ю.Б. (1952)

Задача о затопленной струе

Прикл. матем. и мех. 16(2), 255 – 256.

- конечное отверстие
- струя Ландау $\psi^{(1)}$ – дальняя ($R \to \infty$) асимптотика

Координатное разложение дальнего поля струи $R \to \infty$

$$\psi = \underbrace{\psi^{(1)}}_{\text{Ландау}} + \underbrace{c_0\psi^{(2)}}_{\text{Румер}}$$

$$\psi^{(2)}(\theta) = \nu \sin^2\theta \, \frac{1 - A\cos\theta}{A(A - \cos\theta)^2}$$

Парадокс скрытых инвариантов: что такое c_0?

Гольдштик М.А., Штерн В.Н., Яворский Н.И. (1989)

Вязкие течения с парадоксальными свойствами

Новосибирск: Наука. Сибирское отделение. 336 с.

Яворский Н.И. (2019)

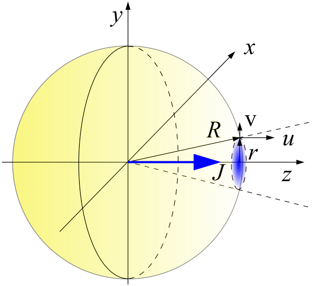
О скрытом интеграле сохранения в теории затопленных струй

XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Аннотации докладов. 19–24 августа 2019 г., г. Уфа. С. 92.

Приближение пограничного слоя

Предельный переход

1. Малая вязкость $\nu \to 0$
2. Импульс постоянный $J = const$,
$A = 1 + 2\nu^2/\alpha^2 + o\left(\nu^2/\alpha^2\right)$, $\alpha = \sqrt{3J/(16\pi)}$
3. Струя сосредоточена в приосевой области
$r \sim \nu z/J^{1/2}$



Функция тока

$$d\psi = urdr - vrdz$$

Schlichting H. (1933)
Laminare Strahlausbreitung
ZAMM 13(4), 260–263.

Решение Шлихтинга

$$\psi^{(1)} = \Psi^{(1)}(z,\eta) + o(\nu/J^{1/2})$$

$$\Psi^{(1)} = \nu z \frac{\eta^2}{1+\eta^2/4},\ \eta = \alpha r/(\nu z)$$

Лойцянский Л.Г. (1953)
Распространение закрученной струи в безграничном пространстве, затопленном той же жидкостью
Прикл. матем. и мех. 17(1), 3–16.

Решение Лойцянского

$$c_0\psi^{(2)} = \beta\Psi^{(2)}(\eta) + o(\nu/J^{1/2})$$

$$\Psi^{(2)} = -\frac{\eta^2}{4}\frac{1-\eta^2/4}{(1+\eta^2/4)^2}$$

$$\beta = 2c_0\nu$$

Законы сохранения уравнений пограничного слоя

Ур-я пограничного слоя

$$\boxed{(ur)_z + (vr)_r = 0} \qquad (1)$$

$$uu_z + vu_r = \nu(u_{rr} + r^{-1}u_r) \qquad (2)$$

З-н сохранения массы

$$\frac{dQ}{dz} = -2\pi \lim_{r\to+\infty}(vr), \qquad \boxed{Q(z) = 2\pi\int_0^{+\infty} urdr}$$

$Q(z)$ сохраняется при $v = o(r^{-1})$, $r \to +\infty$

З-н сохранения импульса

$$(1)\cdot u + (2)\cdot r \Rightarrow \boxed{(ru^2)_z + (ruv - \nu r u_r)_r = 0} \qquad (3)$$

$$\frac{dJ}{dz} = -2\pi \lim_{r\to+\infty}(ruv - \nu r u_r), \qquad \boxed{J(z) = 2\pi\int_0^{+\infty} u^2 rdr}$$

$J(z)$ сохраняется при $u = O(r^{-1})$, $v = O(r^{-1})$, $r \to +\infty$

Нелокальный з-н сохранения (R. Naz, 2012)

$$(3)\cdot(\psi - \nu z) \Rightarrow \boxed{\left(ru^2(\psi - \nu z)\right)_z + \left((\psi - \nu z)(ruv - \nu r u_r) + \frac{1}{2}\nu(ur)^2\right)_r = 0}$$

$$\frac{dE}{dz} = -\lim_{r\to+\infty}\left((\psi - \nu z)(ruv - \nu r u_r) + \frac{1}{2}\nu(ur)^2\right), \qquad \boxed{E(z) = \int_0^{+\infty} u^2(\psi - \nu z)rdr}$$

$E(z)$ сохраняется при $u = o(r^{-1})$, $v = O(r^{-1})$, $r \to +\infty$

Определение констант в решениях Шлихтинга и Лойцянского

Naz R. (2012)

Conservation laws for laminar axisymmetric jet flows with weak swirl

Applicable Analysis: An International Journal 91(5), 1045–1052.

$$\boxed{E(z) = \int_0^{+\infty} u^2(\psi - \nu z) r dr}$$

Интегралы на решении Шлихтинга

$$Q(z) = 8\pi\nu z$$

$$J = 16\pi\alpha^2/3$$

$$E = 0$$

Интегралы на решении Лойцянского

$$Q(z) = 8\pi\nu z + 4\pi\nu c_0$$

$$J = 16\pi\alpha^2/3$$

$$E = 4\nu c_0\alpha^2/3$$

Гайфуллин А.М., Жвик В.В. (2020)

Связь дальней асимптотики струи с профилем скорости в отверстии

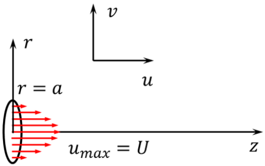
Доклады РАН. Физика, технические науки 495, 46–49.

$$\boxed{c_0 = \frac{3E}{4\nu\alpha^2}}$$

$$\boxed{c_0 = \frac{Q(0)}{4\pi\nu}}$$

Дальняя асимптотика не описывает течение в отверстии!

Численное решение ур-й пограничного слоя

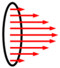


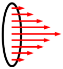
$$\mathrm{Re} = \frac{Ua}{\nu} = 100$$

Профили скорости в отверстии

- Параболический профиль
- Линейный профиль

$u(r) = 1 - r^2$ $\quad$ $u(r) = 1 - r$





Численный алгоритм

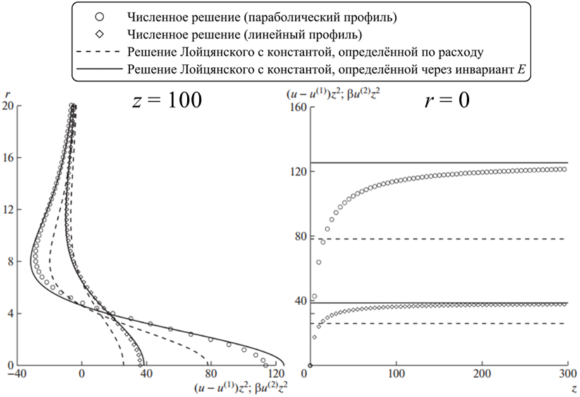
- Маршевый метод
- Полностью неявная схема
- Второй порядок точности по z и r

Граничные условия

$$u = u_0(r),\ v = 0 \text{ при } z = 0$$

$$u_r = 0,\ v = 0 \text{ при } r = 0$$

$$u \to 0 \text{ при } r \to +\infty$$



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. В свободных осесимметричных затопленных струях сохраняется интеграл, похожий на инвариант Акатнова–Глауэрта плоских пристенных струй
2. С помощью этого интеграла рассчитывается константа c_0 в дальней асимптотике незакрученной струи
3. Результат легко обобщается на турбулентные струи
4. Предложенный метод определения константы c_0 является решением парадокса скрытых инвариантов, сформулированного М.А. Гольдштиком, при больших числах Рейнольдса
5. Остаются (становятся) открытыми проблемы определения аналогичной константы в закрученных и неосесимметричных струях, и в струях при произвольном числе Рейнольдса
6. Все ли законы сохранения, допускаемые полными уравнениями Навье–Стокса, известны?

БЛАГОДАРЮ ЗА ВНИМАНИЕ!