

Классификация и конструирование обратимых линейных дифференциальных операторов на одномерном многообразии

07, июль 2014

DOI: 10.7463/0714.0718107

Четвериков В. Н.^{1,a}

УДК 517.977

¹Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

^achetverikov.vl@yandex.ru

Исследуется задача описания обратимых линейных дифференциальных операторов с одной независимой переменной, актуальная в связи с задачами преобразования и классификации систем управления, в частности, с задачей плоскостности. Применяемый подход основан на сопоставлении каждому обратимому линейному дифференциальному оператору таблицы чисел и описании этих таблиц на наглядном элементарно-геометрическом языке. Приводятся математические структуры, которые необходимо задать для однозначного определения оператора, и алгоритм его построения. Обсуждаются способы применения и обобщения результатов работы.

Ключевые слова: обратимые линейные дифференциальные операторы; преобразования систем управления; спектральные последовательности цепных комплексов

Введение

Обратимые дифференциальные операторы возникают при решении многих математических задач [1, §2.3]. Среди них — задачи преобразования и классификации систем дифференциальных уравнений (или, более общо, дифференциальных объектов) с использованием C -преобразований. В классической теории систем рассматриваются преобразования, при которых зависимые и независимые переменные одной системы функционально выражаются через зависимые и независимые переменные другой системы. Они называются преобразованиями Ли [2, гл. 4], их теория построена достаточно подробно. Однако существуют обратимые преобразования, при которых переменные одной системы зависят не только от переменных второй системы, но и от производных зависимых переменных по независимым. Такие преобразования называются C -преобразованиями [2, гл. 6]. В случае одной зависимой переменной любое C -преобразование есть преобразование Ли. Однако это не так в случае нескольких зависимых переменных. Более того, как показывают примеры, в этом случае C -преобразований значительно больше, чем преобразований Ли. Отсутствие

удобного описания C -преобразований сдерживает развитие методов их применения в задачах классификации дифференциальных объектов. C -преобразования линейных систем интерпретируются как обратимые линейные дифференциальные операторы. В случае нелинейных систем линеаризация C -преобразования интерпретируется как обратимый линейный дифференциальный оператор [3]. Поэтому исследования обратимых линейных дифференциальных операторов следует рассматривать как первый шаг в описании C -преобразований как линейных, так и нелинейных систем.

Проблема описания C -преобразований стала наиболее острой в последние 20 лет в связи с развитием теории плоских систем управления. Плоскими называют системы, эквивалентные линейным управляемым системам относительно группы C -преобразований (см. [4]). Методы управления, развитые для линейных систем, переносятся на плоские системы. Многочисленные работы (см. ссылки в [5]) демонстрируют, что такие системы описывают многие природные явления и процессы. Поэтому задача проверки плоскостности систем является актуальной.

В работах [6, 3] получен критерий плоскостности систем на языке обратимых линейных дифференциальных операторов. А именно, система плоская, если существует обратимый линейный дифференциальный оператор, отображающий столбец 1-форм, определяемый системой, в столбец точных 1-форм.

В известной монографии [1, §2.3] можно найти и другие (иногда неожиданные) применения обратимых дифференциальных операторов, а также результаты, характеризующие, насколько общим является свойство обратимости для дифференциальных операторов.

Данная работа продолжает исследования, начатые в [7, 3]. Здесь мы рассматриваем обратимые линейные дифференциальные операторы на одномерном многообразии, т.е. с одной независимой переменной. Применяемый подход аналогичен подходу, используемому ранее в [8], и основан на сопоставлении каждому обратимому линейному дифференциальному оператору наборов целых чисел и описании этих наборов на наглядном элементарно-геометрическом языке. Таким образом, обратимому оператору ставится в соответствие элементарно-геометрическая модель, которую мы называем d -схемой квадратов. При этом одному классу принадлежат те, и только те обратимые операторы, которые имеют одинаковые наборы чисел. Обратимый оператор определяется этим набором неоднозначно. Математические структуры, которые необходимо задать для его однозначного определения, и алгоритм его конструирования, т.е. построения по d -схеме квадратов и по этим математическим структурам, также приводятся.

Полученное описание обратимых линейных дифференциальных операторов может быть использовано следующим образом. Условия на обратимый оператор, которые следуют из постановки решаемой задачи, переформулируются на языке элементарно-геометрической модели. Ищется модель, удовлетворяющая этим условиям (или доказывается, что такой модели нет). Искомый оператор восстанавливается по этой модели.

Статья организована следующим образом. В разд. 1 определяются обратимые линейные дифференциальные операторы и приводятся примеры таких операторов. Элементарно-гео-

метрические модели обратимых операторов определяются в разд. 2. Основные результаты формулируются в разд. 3, а доказываются в разд. 4. В заключении, в частности, формулируются пути возможных обобщений достигнутых результатов.

1. Обратимые линейные дифференциальные операторы

С целью возможных обобщений в будущем приведем наиболее общее — алгебраическое — определение линейных дифференциальных операторов (подробное изложение алгебраической теории таких операторов см. в [2, гл. 1]). Пусть A — коммутативная алгебра над полем \mathbb{k} характеристики нуль.

Рассмотрим два A -модуля P и Q и группу $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(P, Q)$ \mathbb{k} -гомоморфизмов из P в Q . В этой группе введем две A -модульные структуры, определенные умножениями

$$(a\Delta)(p) = a\Delta(p), \quad (a^+\Delta)(p) = \Delta(ap), \quad a \in A, \quad p \in P, \quad \Delta \in \text{Hom}_{\mathbb{k}}(P, Q). \quad (1)$$

Обозначим $\delta_a(\Delta) = a^+\Delta - a\Delta$, $a \in A$. Также введем обозначение $\delta_{a_0, \dots, a_k} = \delta_{a_0} \circ \dots \circ \delta_{a_k}$, $a_0, \dots, a_k \in A$.

Гомоморфизм $\Delta \in \text{Hom}_{\mathbb{k}}(P, Q)$ называют линейным дифференциальным оператором над алгеброй A порядка не выше k , если $\delta_{a_0, \dots, a_k}(\Delta) = 0$ для любого набора a_0, \dots, a_k элементов из A .

Линейный дифференциальный оператор из A в A (т.е. $P = Q = A$) называют скалярным.

Скажем, что линейный дифференциальный оператор Δ имеет порядок k , если он порядка не выше k , но не является линейным дифференциальным оператором Δ порядка не выше $k - 1$. Порядок линейного дифференциального оператора Δ будем обозначать $\text{ord } \Delta$.

В случае, когда $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, A является алгеброй $C^\infty(M)$ гладких (бесконечно дифференцируемых) функций на многообразии M , а P и Q — модулями гладких сечений двух локально тривиальных векторных расслоений ξ, ζ над M (о теории расслоений см. [9, гл. 2 и 3]), сформулированное определение эквивалентно обычному определению линейного дифференциального оператора. В частности, скалярный оператор на одномерном многообразии M представляет собой конечную сумму производных по координате t на M с коэффициентами из A :

$$\Delta = a_k(t) \frac{d^k}{dt^k} + a_{k-1}(t) \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} + \dots + a_0(t), \quad a_k(t) \neq 0, \quad k = \text{ord } \Delta.$$

В многомерном же случае линейный дифференциальный оператор можно представить как матрицу скалярных операторов.

Обозначим через $\text{Diff}_k^+(P, Q)$ множество линейных дифференциальных операторов из P в Q степени не выше k , рассматриваемое как A -модуль относительно второго (правого) умножения, определенного в (1). Заметим, что если P, Q, R — A -модули, $\Delta \in \text{Diff}_k^+(P, Q)$, $\nabla \in \text{Diff}_l^+(Q, R)$, то $\nabla \circ \Delta \in \text{Diff}_{k+l}^+(P, R)$. Это утверждение вытекает из формулы

$$\delta_a(\nabla \circ \Delta) = \delta_a(\nabla) \circ \Delta + \nabla \circ \delta_a(\Delta)$$

и того факта, что отображение δ_a уменьшает порядок оператора на единицу.

Отметим также, что в общем случае композиция линейных дифференциальных операторов некоммутативна, даже если операторы скалярные.

Дифференциальный оператор $\Delta \in \text{Hom}_{\mathbb{k}}(P, Q)$ называют (двусторонне) обратимым, если существует такой дифференциальный оператор $\Delta^{-1} \in \text{Hom}_{\mathbb{k}}(P, Q)$, что оператор $\Delta^{-1} \circ \Delta$ есть тождественное отображение модуля P , а оператор $\Delta \circ \Delta^{-1}$ — тождественное отображение модуля Q . В этом случае оператор Δ^{-1} называют обратным к Δ .

Отметим, что данное определение симметрично относительно замены Δ на Δ^{-1} . Поэтому оператор Δ^{-1} также обратим, а Δ — обратный к нему оператор.

В этой работе рассматриваются обратимые линейные дифференциальные операторы на одномерном многообразии M (с одной независимой переменной). Рассуждения локальны, поэтому можно считать, что $M = \mathbb{R}$ — действительная прямая, а P и Q — модули векторных функций на \mathbb{R} . Нетрудно показать, что если существует обратимый линейный дифференциальный оператор из P в Q , то P и Q имеют одинаковую размерность, которую мы обозначаем через m , т.е. $P = Q = A^m$, где $A = C^\infty(M)$.

Приведем два примера обратимых операторов рассматриваемого типа. В обоих примерах a, b, c — произвольные скалярные линейные дифференциальные операторы.

Пример 1. В трехмерном случае, т.е. $m = 3$, операторы Δ и Δ^{-1} , заданные матрицами

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & c & 1 \\ b & 1 & 0 \\ 1 & ac & a \end{pmatrix}, \quad \Delta^{-1} = \begin{pmatrix} -a & 0 & 1 \\ ba & 1 & -b \\ 1 - cba & -c & cb \end{pmatrix},$$

являются взаимно обратными, в чем легко убедиться непосредственным перемножением матриц.

Пример 2. В двумерном случае операторы Δ и Δ^{-1} , заданные матрицами

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 + bc & -b \\ -a - c - abc & 1 + ab \end{pmatrix}, \quad \Delta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 + ba & b \\ a + c + cba & 1 + cb \end{pmatrix},$$

также являются взаимно обратными.

2. Схемы квадратов

Пусть M — одномерное многообразие, $A = C^\infty(M)$, P, Q — A -модули гладких сечений двух локально тривиальных векторных расслоений, $\Delta: P \rightarrow Q$ — дифференциальный оператор порядка l . Рассмотрим следующие A -модули:

$$G_p = \text{Diff}_p^+(A, Q), \quad F_k = \{\alpha \in \text{Diff}_{k+l}^+(A, Q): \alpha = \Delta \circ \beta, \beta \in \text{Diff}_k^+(A, P)\}, \quad p, k \geq 0.$$

Так как G_p и F_k — подмодули модуля $\text{Diff}_s^+(A, Q)$, где $s = \max(p, k + l)$, то их пересечение $F_k \cap G_p$ есть также подмодуль модуля $\text{Diff}_s^+(A, Q)$. Модули G_p, F_k являются модулями гладких сечений локально тривиальных векторных расслоений над M . Обозначим соответствующие расслоения через ξ_p и ζ_k . Слои этих расслоений над точкой $t \in M$ состоят из

линейных дифференциальных операторов в точке t и имеют постоянную размерность, не зависящую от t . Пересечение модулей $F_k \cap G_p$ является модулем гладких сечений пересечения векторных расслоений ξ_p и ζ_k . Слои пересечения векторных расслоений могут иметь разную размерность, зависящую от точки $t \in M$. Такой объект называют векторным расслоением с особенностями. Под размерностью модуля R гладких сечений векторного расслоения с особенностями над многообразием M мы понимаем целочисленную функцию, которая точке $t \in M$ ставит в соответствие размерность слоя этого расслоения над t . Обозначим ее через $\dim R$.

Пусть оператор $\Delta: P \rightarrow Q$ обратим, $l = \text{ord } \Delta$, а L — порядок обратного оператора. Точку $t \in M$ будем называть d -регулярной точкой обратимого оператора Δ , если в некоторой окрестности этой точки пересечение слоев ξ_p и ζ_k имеет постоянную размерность для любых $p = 0, 1, \dots, l$ и $k = 0, 1, \dots, L$. Таким образом, в окрестности d -регулярной точки функция $\dim(F_k \cap G_p)$ постоянна для указанных k и p . Далее будем рассматривать обратимые операторы только в окрестности d -регулярных точек.

Каждый линейный дифференциальный оператор порождает последовательность целых неотрицательных чисел $d_{k,p} = \dim(F_k \cap G_p)$, $p, k \geq 0$. В дальнейшем анализе будем относить обратимые линейные дифференциальные операторы к одному классу, если у этих операторов соответствующие последовательности совпадают.

Последовательность $\{d_{k,p}\}$ однозначно определяет последовательность чисел

$$\rho_{k,p} = \varkappa_{k,p} - \varkappa_{k-1,p-1}, \quad k, p \geq 0, \quad (2)$$

где

$$\varkappa_{k,p} = d_{k,p} - d_{k-1,p} - d_{k,p-1} + d_{k-1,p-1}$$

(полагаем, что $d_{k,p} = \varkappa_{k,p} = 0$, если $k < 0$ или $p < 0$).

Нетрудно доказать, что по последовательности $\{\rho_{k,p}\}$ последовательность $\{d_{k,p}\}$ восстанавливается однозначно: каждое число $d_{k,p}$ есть сумма чисел ρ_{k_1,p_1} с $k_1 \leq k$ и $p_1 \leq p$, умноженных на некоторые целочисленные коэффициенты.

Отметим, что с ростом индексов k и p числа $d_{k,p}$ возрастают, при этом $\rho_{k,p} = 0$ для больших k, p (см. ниже).

Вернемся к примеру 1, полагая, что a — оператор первого порядка, а b и c — операторы второго порядка. Для оператора Δ найдем числа $d_{k,p}$, а затем вычислим величины $\rho_{k,p}$ по формулам (2). В результате получим:

$$\rho_{0,1} = \rho_{0,2} = \rho_{0,3} = \rho_{2,0} = \rho_{4,0} = \rho_{5,0} = 1, \quad \rho_{5,1} = \rho_{4,2} = \rho_{2,3} = -1,$$

а остальные числа $\rho_{k,p}$ равны нулю.

Аналогично можно найти последовательность $\{\rho_{k,p}\}$ для оператора Δ из примера 2. Ее ненулевые значения таковы:

$$\rho_{0,1} = \rho_{0,2} = \rho_{0,3} = \rho_{2,0} = \rho_{4,0} = \rho_{5,0} = 1, \quad \rho_{5,1} = \rho_{4,2} = \rho_{2,3} = -1.$$

рис.1

Последовательность $\rho_{k,p}$ полезно изображать графически, приписав каждой точке с координатами (k, p) число $\rho_{k,p}$. На рис. 1 представлена последовательность $\{\rho_{k,p}\}$ для обратимого дифференциального оператора Δ из примера 1: черные целочисленные точки отвечают ненулевым значениям последовательности, белые — нулевым. Возможные значения ненулевых членов последовательности, как показано на рисунке, в данном случае равны 1 и -1 .

рис.2

На рис. 2 аналогичным образом изображена последовательность $\{\rho_{k,p}\}$ для обратимого оператора из примера 2.

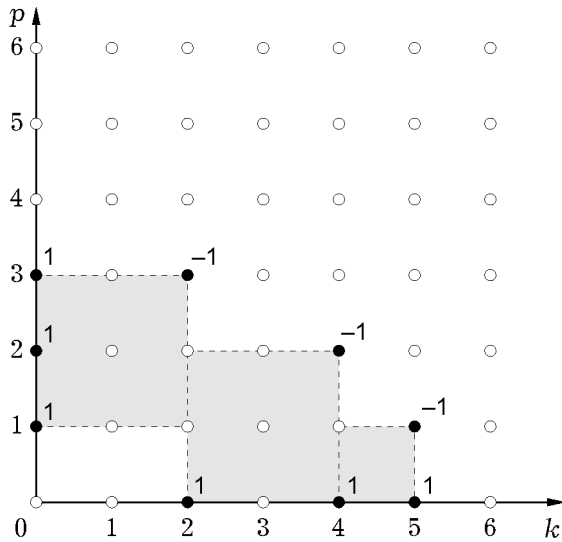


Рис. 1. Значения $\rho_{k,p}$ для оператора из примера 1

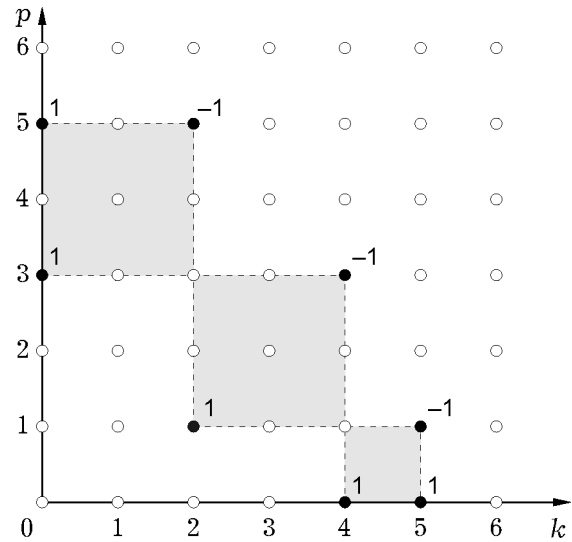


Рис. 2. Значения $\rho_{k,p}$ для оператора из примера 2

Отметим следующие особенности расположения ненулевых членов последовательности $\{\rho_{k,p}\}$:

- все ненулевые значения последовательности лежат на осях координат, а также на вертикальных и горизонтальных прямых, проходящих через точки со значениями -1 ;
- на этих прямых можно построить систему квадратов (на рисунках они выделены серым) так, что все точки с ненулевым значением будут расположены на сторонах этих квадратов, причем каждая точка со значением -1 будет расположена в верхнем левом углу квадрата, так что количество квадратов совпадает с количеством значений -1 в последовательности $\{\rho_{k,p}\}$;
- сумма значений точек, расположенных на каждой из осей координат, равна размерности m модулей P и Q (в данном случае порядку матрицы, изображающей оператор);
- сумма значений точек, расположенных на вертикальной или горизонтальной прямой, проходящей через точку со значением -1 , равна нулю.

Отметим также, что размеры квадратов на рис. 1 и 2 совпали с заданными порядками скалярных операторов a, b, c .

Оказывается, что эти особенности расположения чисел $\rho_{k,p}$ — общие для всех обратимых линейных дифференциальных операторов на одномерном многообразии. Для описания таких последовательностей введем некоторые понятия.

Рассмотрим конечный набор квадратов, расположенных в первой четверти координатной плоскости, у которых вершины имеют целочисленные координаты, а стороны параллельны осям координат. Верхнему правому (т.е. дальнему от начала координат) углу каждого квадрата припишем значение -1 , а нижнему левому (т.е. ближнему от начала координат) углу — значение 1 . Если есть точки, являющиеся вершинами нескольких квадратов, значения, назначенные по каждому квадрату, в этих точках суммируем. Остальным точкам первой четверти с целочисленными координатами припишем нулевые значения. Получим последовательность чисел $\tilde{\rho}_{k,p}$, $k \geq 0$, $p \geq 0$. Предположим, что существует такая последовательность $\{a_{k,p}\}$ целых неотрицательных чисел, что последовательности чисел $\rho_{k,p} = \tilde{\rho}_{k,p} + a_{k,p}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \rho_{k,p} = 0 \quad (p > 0), \quad \sum_{p=0}^{\infty} \rho_{k,p} = 0 \quad (k > 0); \quad (3)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \rho_{k,0} = \sum_{p=0}^{\infty} \rho_{0,p} = m; \quad (4)$$

$$\sum_{j=0}^{k-1} \rho_{j,p} \geq z_{k,p}, \quad \sum_{j=0}^{p-1} \rho_{k,j} \geq z_{k,p} \quad (k > 0, p > 0). \quad (5)$$

Здесь $z_{k,p}$ — количество квадратов с верхним правым углом в точке (k, p) .

Указанный конечный набор квадратов будем называть d -схемой квадратов, а соответствующую этому набору последовательность $\{\rho_{k,p}\}$ — m -таблицей d -схемы квадратов.

Отметим, что d -схема квадратов определяет последовательность $\{\rho_{k,p}\}$ неоднозначно. Во-первых, можно добавить произвольное неотрицательное число n к значению в начале координат, что не нарушит условий (3)–(5). Но при этом сумма значений по осям координат увеличится на n . В результате из m -таблицы получаем $(m+n)$ -таблицу. Во-вторых, есть примеры d -схем квадратов, которым соответствует несколько m -таблиц. Это возможно, когда есть несколько вариантов выбора последовательности $\{a_{k,p}\}$, используемой для получения последовательности $\{\rho_{k,p}\}$ (в рассмотренных выше примерах 1 и 2 d -схема квадратов имеет единственную m -таблицу, где $m = 3$ в примере 1 и $m = 2$ в примере 2).

3. Основные результаты

Теорема 1. Пусть M — одномерное многообразие, $A = C^\infty(M)$, $P = Q = A^m$. Тогда:

а) для всякого обратимого линейного дифференциального оператора $\Delta \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(P, Q)$ последовательность $\{\rho_{k,p}\}$, построенная согласно формулам (2), в окрестности d -регулярной точки совпадает с m -таблицей некоторой d -схемы квадратов;

б) для всякой d -схемы квадратов существует такой обратимый линейный дифференциальный оператор $\Delta \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(P, Q)$, для которого последовательность $\{\rho_{k,p}\}$ совпадает с m -таблицей данной d -схемы квадратов.

Отметим, что обратимый оператор определяется d -схемой квадратов неоднозначно.

Покажем, как построить обратимый оператор по заданной схеме и какие структуры для этого еще нужно задать. Пусть задана d -схема квадратов и для нее построена последовательность чисел $\rho_{k,p}$, удовлетворяющих условиям (3)–(5). Обозначим через Z множество верхних правых углов квадратов d -схемы, а через B — множество нижних левых углов этих квадратов и точек плоскости (k, p) , в которых $a_{k,p} \neq 0$, причем точка (k, p) включается в B $a_{k,p}$ раз. Из равенств (3)–(4) следует, что сумма положительных чисел $a_{k,p}$ равна m . Поэтому множество B имеет на m элементов больше, чем множество Z . Обозначим через $Z_{k,p}^0$ подмножество элементов Z с координатами (k, p) , а через $B_{k,p}^0$ — аналогичное подмножество в B .

Построим три инъективных отображения $\psi, \varphi_h, \varphi_v$ из множества Z в множество B . Отображение ψ ставит в соответствие дальнему углу квадрата d -схемы его ближний угол. Отображение φ_h элементу $z \in Z$ с координатами (k, p) ставит в соответствие некоторый элемент из B с координатами $(k - s, p)$, где $s > 0$. Аналогично отображение φ_v элементу из Z с координатами (k, p) ставит в соответствие элемент из B с координатами $(k, p - s)$, $s > 0$. Существование таких отображений доказано ниже (см. разд. 4).

Поставим в соответствие каждому квадрату d -схемы скалярный дифференциальный оператор, порядок которого равен длине стороны квадрата. Этот оператор можно выбрать произвольно, но его порядок определен квадратом однозначно. Между квадратами d -схемы и элементами множества Z имеется взаимно-однозначное соответствие, так что каждый квадрат можно считать элементом множества Z . Через \square_z обозначим дифференциальный оператор, соответствующий квадрату $z \in Z$.

Каждому элементу $b \in B$ поставим в соответствие дифференциальный оператор ∇_b , который построим индуктивно по второй координате p элемента b . В случае $p = 0$ оператор ∇_b построим следующим образом. Модуль $G_0 = \text{Diff}_0^+(A, Q)$ изоморфен Q . Пусть e_1, \dots, e_m — какой-либо базис модуля Q (он существует, так как по условию $Q = A^m$). Обе координаты любого элемента из Z положительны. Поэтому число $\rho_{k,0}$ совпадает с количеством элементов в подмножестве $B_{k,0}^0$. Из первого равенства (4) следует, что множество B имеет m элементов с нулевой второй координатой. Обозначим их через b_1, \dots, b_m . Аналогично доказывается, что множество B имеет m элементов с нулевой первой координатой. Обозначим эти элементы через b_1^1, \dots, b_m^1 . Отметим, что элементы множества $B_{0,0}^0$ обозначены двумя разными способами. Однако это не является препятствием для дальнейших рассуждений. Для каждого $i = 1, \dots, m$ элементу b_i поставим в соответствие дифференциальный оператор ∇_{b_i} , который каждому $a \in A$ ставит соответствие ae_i .

Рассмотрим теперь элемент $b \in B$ со второй координатой $p > 0$. Ниже (см. разд. 4) доказано, что определен элемент $\varphi_h^{-1}(b)$ из Z , а элементы $(\psi \circ \varphi_h^{-1})(b)$ и $(\varphi_v \circ \varphi_h^{-1})(b)$ принадлежат B и их вторые координаты меньше p . По предположению индукции им уже поставлены в соответствие дифференциальные операторы. Определим оператор ∇_b равенством

$$\nabla_b = \nabla_{(\psi \circ \varphi_h^{-1})(b)} \circ \square_{\varphi_h^{-1}(b)} - \nabla_{(\varphi_v \circ \varphi_h^{-1})(b)}. \quad (6)$$

Таким образом, каждому элементу $b \in B$ поставлен в соответствие дифференциальный оператор $\nabla_b: A \rightarrow Q$.

Пусть f_1, \dots, f_m — какой-либо базис модуля P . Заданной d -схеме соответствует обратимый линейный дифференциальный оператор $\Delta: P \rightarrow Q$, определенный формулой

$$\Delta(a_1 f_1 + \dots + a_m f_m) = \nabla_{b_1^1}(a_1) + \dots + \nabla_{b_m^1}(a_m), \quad a_1, \dots, a_m \in A. \quad (7)$$

4. Доказательство теоремы 1

Введем алгебраические структуры, необходимые для описания модулей $F_k \cap G_p$. Рассмотрим фактормодули G_i/G_{i-1} , $i \geq 0$ (здесь $G_{-1} = 0$). Обозначим через $[\alpha]_i$ элемент фактормодуля G_i/G_{i-1} , соответствующий дифференциальному оператору $\alpha \in G_i$. Пусть t — координата на M в окрестности рассматриваемой d -регулярной точки. Для оператора $\alpha \in G_i$ обозначим через $D\alpha$ композицию α с производной по t : $D\alpha = \alpha \circ \frac{d}{dt}$. Тогда $D\alpha \in G_{i+1}$ и для всех $i \geq 0$ определены отображения $D: G_i \rightarrow G_{i+1}$. Эти отображения индуцируют отображения $D: G_p/G_{p-1} \rightarrow G_{p+1}/G_p$ согласно формуле

$$D[\alpha]_p = \left[\alpha \circ \frac{d}{dt} \right]_{p+1}, \quad p \geq 0. \quad (8)$$

Покажем, что отображения (8) являются гомоморфизмами модулей. Оператор умножения на функцию $a \in A$ будем также обозначать через a . Если $\alpha \in G_p$, то $[\alpha]_{p+1} = 0$. Поэтому для любой функции $a \in A$ справедливо равенство

$$D(a^+[\alpha]_p) = a^+D[\alpha]_p,$$

поскольку

$$\begin{aligned} D(a^+[\alpha]_p) &= D[\alpha \circ a]_p = \left[\alpha \circ a \frac{d}{dt} \right]_{p+1} = \left[\alpha \circ \frac{d}{dt} \circ a - \alpha \circ \frac{da}{dt} \right]_{p+1} = \\ &= a^+ \left[\alpha \circ \frac{d}{dt} \right]_{p+1} - \left(\frac{da}{dt} \right)^+ [\alpha]_{p+1} = a^+D[\alpha]_p. \end{aligned}$$

Гомоморфизм (8) для каждого $p \geq 0$ является изоморфизмом, так как фактормодуль G_p/G_{p-1} состоит из элементов вида $\left[\alpha \circ \frac{d^p}{dt^p} \right]_p$, $\alpha \in G_0$, а гомоморфизм (8) отображает такой элемент в элемент $\left[\alpha \circ \frac{d^{p+1}}{dt^{p+1}} \right]_p$ фактормодуля G_{p+1}/G_p . Таким образом, для любого p фактормодуль G_{p+1}/G_p изоморфен G_0/G_{-1} , а следовательно, Q .

Для описания модулей $F_k \cap G_p$ используем теорию цепных комплексов и их спектральных последовательностей (см. [10, гл. 4, §1 и гл. 9, §1]). При этом для удобства все используемые понятия далее формулируются, а необходимые факты доказываются.

Изоморфизмы (8) определяют точные комплексы

$$0 \longrightarrow \frac{G_p}{G_{p-1}} \xrightarrow{D} \frac{G_{p+1}}{G_p} \longrightarrow 0, \quad p \geq 0. \quad (9)$$

Предположим, существует такое натуральное число L , что $G_p \subset F_{p+L}$ для $p \geq 0$. Модули G_p/G_{p-1} имеют фильтрацию

$$\frac{G_p}{G_{p-1}} \supset \frac{G_p \cap F_{p+L-1} + G_{p-1}}{G_{p-1}} \supset \dots \supset \frac{G_p \cap F_k + G_{p-1}}{G_{p-1}} \supset \dots \supset \frac{G_p \cap F_0 + G_{p-1}}{G_{p-1}}.$$

Так как композиция с производной по t оператора из F_k представляет собой оператор из F_{k+1} , то изоморфизмы (8) сохраняют построенные фильтрации:

$$D: \frac{G_p \cap F_k + G_{p-1}}{G_{p-1}} \rightarrow \frac{G_{p+1} \cap F_{k+1} + G_p}{G_p}, \quad p \geq 0. \quad (10)$$

А это значит, мы имеем фильтрацию комплексов (9) и их спектральные последовательности (см. [10, гл. 9, §1, теорема 2]). Элементы E^0 этих последовательностей состоят из модулей

$$E_{k,p}^0 = \frac{G_p \cap F_k + G_{p-1}}{G_p \cap F_{k-1} + G_{p-1}}.$$

Точнее, комплексу (9) с номером p соответствуют две строки $E_{k,p}^0$ и $E_{k+1,p}^0$, комплексу (9) с номером $p+1$ — две строки, но $E_{k+1,p}^0$ и $E_{k+2,p}^0$ и т.д. При этом вторая строка предыдущего комплекса совпадает с первой строкой последующего комплекса, поэтому эти строки обозначены одинаково.

Отметим, что мы используем отличную от обычной нумерацию элементов E^0 , потому что для дальнейших рассуждений удобно иметь нумерацию, симметричную относительно p, k . Для доказательства симметричности $E_{k,p}^0$ используем следующий известный факт.

Теорема 2 (Нетер об изоморфизме [10, Введение, §4]). Пусть X и Y — некоторые подмодули A -модуля Z , и пусть $X+Y$ — подмодуль, порожденный множеством $X \cup Y$. Тогда вложение $X \subset X+Y$ переводит $X \cap Y$ в Y и индуцирует изоморфизм A -модулей $\frac{X}{X \cap Y}$ и $\frac{X+Y}{Y}$.

Обозначим $X = G_p \cap F_k$ и $Y = G_p \cap F_{k-1} + G_{p-1}$. Так как $F_{k-1} \subset F_k$, то

$$X+Y = G_p \cap F_k + G_{p-1}, \quad X \cap Y = G_p \cap F_{k-1} + G_{p-1} \cap F_k.$$

Применяя теорему Нетер, получаем симметричную относительно индексов k и p формулу

$$E_{k,p}^0 = \frac{G_p \cap F_k}{G_p \cap F_{k-1} + G_{p-1} \cap F_k}, \quad k, p \geq 0. \quad (11)$$

Используя известные факты о размерностях пространств (модулей), получаем

$$\begin{aligned} \dim E_{k,p}^0 &= \dim(G_p \cap F_k) - \dim(G_p \cap F_{k-1} + G_{p-1} \cap F_k) = \\ &= d_{k,p} - \dim(G_p \cap F_{k-1}) - \dim(G_{p-1} \cap F_k) + \dim(G_p \cap F_{k-1} \cap G_{p-1} \cap F_k) = \\ &= d_{k,p} - d_{k-1,p} - d_{k,p-1} + d_{k-1,p-1} = \varkappa_{k,p}. \end{aligned} \quad (12)$$

Отметим, что до сих пор мы никак не использовали обратимость оператора Δ . Предположим теперь, что Δ — обратимый оператор и $\Delta^{-1}: Q \rightarrow P$ — обратный к нему оператор

некоторого порядка L . Тогда $G_p \subset F_{p+L}$ для $p \geq 0$, так как если $\alpha \in G_p$, то $\alpha = \Delta \circ \beta$, где $\beta = \Delta^{-1} \circ \alpha \in \text{Diff}_{p+L}^+(A, P)$. Таким образом, применимы рассуждения, приведенные выше. Более того, оператор Δ можно заменить оператором Δ^{-1} и повторить эти рассуждения. Поскольку модуль $\text{Diff}_k^+(A, P)$ изоморфен модулю F_k , а модуль

$$\Delta^{-1} \circ \text{Diff}_p^+(A, Q) = \{\Delta^{-1} \circ \beta : \beta \in \text{Diff}_p^+(A, Q)\} \quad —$$

модулю G_p , получим те же элементы $E_{k,p}^0$ только с заменой p на k и k на p .

Согласно общей теории [10, гл. 9, §1], определены комплексы

$$0 \longrightarrow E_{k,p}^0 \xrightarrow{d_0} E_{k+1,p+1}^0 \longrightarrow 0, \quad k, p \geq 0, \quad (13)$$

которые представляют собой факторизацию комплексов (9). А именно, если элемент $\xi \in E_{k,p}^0$ соответствует оператору $\alpha \in G_p \cap F_k$ в представлении (11), то $d_0(\xi)$ есть элемент, соответствующий оператору $D\alpha \in G_{p+1} \cap F_{k+1}$. Заметим, что замена Δ на Δ^{-1} приводит к тем же комплексам (13).

Докажем, что последовательность $\rho_{k,p}$, вычисленная для обратимого оператора Δ по формулам (2), удовлетворяет равенствам (3), (4). При $k > p + L$ имеем $G_p \subset F_{p+L} \subset F_{k-1}$, поэтому $G_p \cap F_{k-1} = G_p$. Из формул (11) получаем $E_{k,p}^0 = 0$ при $k > p + L$. Заменяя Δ на Δ^{-1} , получим $E_{k,p}^0 = 0$ при $p > k + l$. Учитывая (12) и (2), заключаем, что

$$\rho_{k,p} = 0, \quad (14)$$

если $k > p + L$ или $p > k + l$.

Кроме того, при $p \geq 0$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{p+L} \dim E_{k,p}^0 &= \sum_{k=0}^{p+L} \left(\dim(G_p \cap F_k + G_{p-1}) - \dim(G_p \cap F_{k-1} + G_{p-1}) \right) = \\ &= \dim(G_p \cap F_{p+L} + G_{p-1}) - \dim(G_p \cap F_{-1} + G_{p-1}) = \\ &= \dim G_p - \dim G_{p-1} = \dim(G_p/G_{p-1}) = m, \end{aligned}$$

так как модуль G_p/G_{p-1} изоморфен Q , а $\dim Q = m$. Отсюда с учетом (12) заключаем, что

$$\sum_{k=0}^{p+L} \varkappa_{k,p} = m.$$

Комбинируя это равенство с (2) и (14), находим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \rho_{k,p} = \begin{cases} 0, & p > 0; \\ m, & p = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Таким образом, доказаны первые равенства в (3) и (4). Вторые равенства доказываются аналогично заменой Δ на Δ^{-1} .

Неравенства (5) докажем после того, как определим d -схему квадратов для обратимого оператора Δ . Сейчас докажем неравенства

$$\sum_{j=0}^k \rho_{j,p} \geq 0, \quad \sum_{j=0}^p \rho_{k,j} \geq 0, \quad k, p \geq 0. \quad (16)$$

Гомоморфизм (10) есть ограничение изоморфизма (8) на подмодуль, а значит, есть мономорфизм. Обозначим

$$G_{k,p} = \frac{G_p \cap F_k + G_{p-1}}{G_{p-1}}.$$

Так как (10) — мономорфизм, то

$$\dim G_{k,p} \leq \dim G_{k+1,p+1}. \quad (17)$$

С другой стороны, $G_{k-1,p}$ есть подмодуль модуля $G_{k,p}$, а фактормодуль $G_{k,p}/G_{k-1,p}$ по определению совпадает с $E_{k,p}^0$. Поэтому из формулы (12) следует равенство

$$\dim G_{k,p} - \dim G_{k-1,p} = \dim E_{k,p}^0 = \varkappa_{k,p}.$$

Так как $F_{-1} = 0$, то $E_{0,p}^0 = G_{0,p}$. Из полученных равенств следует соотношение

$$\dim G_{s,p} = \dim G_{0,p} + \sum_{k=1}^s (\dim G_{k,p} - \dim G_{k-1,p}) = \sum_{k=0}^s \varkappa_{k,p}. \quad (18)$$

Объединяя это равенство с (2) и (17), получаем

$$\sum_{k=0}^s \rho_{k,p} = \sum_{k=0}^s \varkappa_{k,p} - \sum_{k=0}^s \varkappa_{k-1,p-1} = \dim G_{s,p} - \dim G_{s-1,p-1} \geq 0.$$

Итак, доказано первое равенство (16). Второе равенство доказывается аналогично.

Докажем, что $\rho_{k,p} = 0$ вне прямоугольника $0 \leq k \leq L$, $0 \leq p \leq l$. Пусть $\rho_{k,p} \neq 0$ для некоторого $p > l$. Выберем минимальное k_0 , такое, что $\rho_{k_0,p_0} \neq 0$ при $p_0 > l$. Тогда $\sum_{k=0}^{k_0} \rho_{k,p_0} = \rho_{k_0,p_0}$ и из первого неравенства в (16) получаем $\rho_{k_0,p_0} > 0$. Из соотношений (14) следует, что $k_0 \geq p_0 - l > 0$. Поэтому (см. (3))

$$\sum_{p=0}^{\infty} \rho_{k_0,p} = 0. \quad (19)$$

С другой стороны, из (16) следует, что $\sum_{p=0}^{p_0-1} \rho_{k_0,p} \geq 0$. Значит, $\sum_{p=0}^{p_0} \rho_{k_0,p} \geq \rho_{k_0,p_0} > 0$. Учитывая (19), получаем $\sum_{p=p_0+1}^{\infty} \rho_{k_0,p} < 0$. Таким образом, существует такое натуральное p_1 , что

$p_1 > p_0$ и $\rho_{k_0,p_1} < 0$. Еще раз используя (16), получаем $\sum_{k=0}^{k_0} \rho_{k,p_1} \geq 0$, а значит, $\sum_{k=0}^{k_0-1} \rho_{k,p_1} > 0$. Следовательно, существуют такие $k < k_0$ и $p_1 > p_0 > l$, что $\rho_{k,p_1} \neq 0$. Это противоречит

минимальности k_0 . Поэтому $\rho_{k,p} = 0$ для всех $p > l$. Для $k > L$ это равенство доказывается аналогично.

Построим d -схему квадратов для обратимого оператора Δ . Модули гомологий комплексов (13) с фиксированным p и всеми $k \geq 0$ в совокупности составляют член E^1 [10, гл. 9, §1] комплекса (9). Однако в отличие от E^0 элементы E^1 , соответствующие комплексам вида (9) с разными номерами p , не совпадают. Модуль гомологий комплекса (13) в члене $E_{k,p}^0$ обозначим через $Z_{k,p}$, а в члене $E_{k+1,p+1}^0$ — через $B_{k+1,p+1}$, т.е.

$$Z_{k,p} = \ker d_0, \quad B_{k+1,p+1} = \operatorname{coim} d_0 = \frac{E_{k+1,p+1}^0}{d_0(E_{k,p}^0)}. \quad (20)$$

Из сравнения размерностей образа и прообраза гомоморфизма (13) следует, что

$$\dim E_{k,p}^0 - \dim \ker d_0 = \dim E_{k+1,p+1}^0 - \dim \operatorname{coim} d_0.$$

Учитывая (12) и (20), получаем равенство $\varkappa_{k,p} - \dim Z_{k,p} = \varkappa_{k+1,p+1} - \dim B_{k+1,p+1}$, а значит,

$$\rho_{k,p} = \dim B_{k,p} - \dim Z_{k-1,p-1}. \quad (21)$$

В формуле (21) размерности модулей $B_{k,p}$ и $Z_{k-1,p-1}$ понимаются как целочисленные функции точки $t \in M$. По определению в некоторой окрестности U d -регулярной точки $t_0 \in M$ левая часть равенства (21) постоянна, так как выражается через постоянные функции (см. (2)). Фиксируем $k \leq L$ и $p \leq l$, для которых $\dim Z_{k,p} \neq 0$ в U . Число $s = \min_{t \in U} \dim Z_{k,p}$ определено, так как функция $\dim Z_{k,p}$ может принимать только конечное количество значений. Пусть $\dim Z_{k,p} = s$ в точке $t_1 \in U$. Тогда образ линейного отображения (13) в точке t_1 имеет размерность $j = \varkappa_{k,p} - s$. Поэтому существуют j сечений из $E_{k,p}^0$, которые линейно независимы в точке t_1 . В виду непрерывности этих сечений они линейно независимы и в любой точке некоторой окрестности U_1 точки t_1 , а значит, $\dim Z_{k,p} \leq \varkappa_{k,p} - j = s$ в U_1 . Так как s есть минимальное значение $\dim Z_{k,p}$ в U_1 , то $\dim Z_{k,p} = s$, а значит, модуль $Z_{k,p}$ имеет постоянную размерность в U_1 .

Точка t_1 также является d -регулярной точкой, так как лежит в U . Заменяя t_0 и U на t_1 и U_1 , повторим наши рассуждения для других $k \leq L$ и $p \leq l$. Так как таких чисел k и p конечное число, в результате в окрестности произвольной d -регулярной точки $t_0 \in M$ мы найдем точку t_* и ее окрестность U_* , в которой $\dim Z_{k,p}$ будет постоянно для всех $k \leq L$ и $p \leq l$. Из формулы (21) следует, что в этой окрестности размерности соответствующих модулей $B_{k,p}$ тоже постоянны. Далее будем рассматривать d -регулярную точку $t_* \in M$ и докажем первое утверждение теоремы в окрестности U_* этой точки. Так как числа (2) не зависят от выбора точки из U , а $U_* \subset U$, то из первого утверждения теоремы для U_* вытекает, что это утверждение верно для всей окрестности U .

Формула (21) объясняет как строить искомую d -схему квадратов: каждый базисный элемент модуля $Z_{k,p}$ при $0 \leq k \leq L$, $0 \leq p \leq l$ определяет квадрат с верхним правым углом

в точке $(k + 1, p + 1)$. Более точно, будем рассматривать диагонали вида

$$\dots, E_{k-s,p-s}^0, \dots, E_{k-1,p-1}^0, E_{k,p}^0,$$

где $Z_{k,p} \neq 0$, $0 \leq k \leq L$, $0 \leq p \leq l$, и соответствующие гомоморфизмы вида (13). Пусть $E_{k-s,p-s}^0$ — первый ненулевой элемент на этой диагонали. Рассмотрим цепочку гомоморфизмов

$$0 \xrightarrow{d_0} E_{k-s,p-s}^0 \xrightarrow{d_0} \dots \xrightarrow{d_0} E_{k-1,p-1}^0 \xrightarrow{d_0} E_{k,p}^0. \quad (22)$$

Так как $E_{k-s-1,p-s-1}^0 = 0$ по выбору s , то $E_{k-s,p-s}^0 = B_{k-s,p-s}$. Рассмотрим композиции $d_0^j: E_{k-j,p-j}^0 \rightarrow E_{k,p}^0$ гомоморфизмов (22), $j = 1, \dots, s$, и их образы в $Z_{k,p}$:

$$Z_{k,p} \supset Z_{k,p} \cap d_0(E_{k-1,p-1}^0) \supset Z_{k,p} \cap d_0^2(E_{k-2,p-2}^0) \dots \supset Z_{k,p} \cap d_0^s(E_{k-s,p-s}^0). \quad (23)$$

Выберем какой-либо базис модуля $Z_{k,p} \cap d_0^s(E_{k-s,p-s}^0)$ из цепочки (23), дополним его до базиса модуля $Z_{k,p} \cap d_0^{s-1}(E_{k-s+1,p-s+1}^0)$ и так до базиса модуля $Z_{k,p}$. Каждый базисный элемент ξ из $Z_{k,p} \cap d_0^i(E_{k-i,p-i}^0)$ есть образ $d_0^i(\eta)$, где $\eta \in E_{k-i,p-i}^0$. По построению $\xi \notin Z_{k,p} \cap d_0^{i+1}(E_{k-i-1,p-i-1}^0)$, поэтому $\eta \notin d_0(E_{k-i-1,p-i-1}^0)$, а значит, η определяет некоторый ненулевой элемент $B_{k-i,p-i}$. Базисному элементу ξ поставим в соответствие квадрат, противоположные углы которого $(k - i, p - i)$ и $(k + 1, p + 1)$. Рассмотрев все базисные элементы модулей $Z_{k,p}$ при $0 \leq k \leq L$, $0 \leq p \leq l$, получим набор квадратов. Этот набор конечен, так как и количество рассматриваемых значений k , p , и размерности $\dim Z_{k,p}$ конечны. В модуле $B_{k,p}$ каждому квадрату с нижним левым углом в точке (k, p) соответствует ненулевой элемент η . По построению набор таких элементов (соответствующих разным квадратам) линейно независим. Поэтому $\dim B_{k,p}$ не меньше, чем количество квадратов с нижним левым углом в точке (k, p) . Разница между $\dim B_{k,p}$ и количеством указанных квадратов есть то натуральное число $a_{k,p}$, которое добавляется при построении m -таблицы d -схемы квадратов.

Докажем первое неравенство (5). Пусть $k \geq 0$, $p \geq 0$, $s = \dim Z_{k,p}$, а H — подмодуль модуля $G_{k,p}$, состоящий из таких элементов α , что $D\alpha \in G_{k,p+1}$. Ограничение мономорфизма (10) на H есть мономорфизм из H в $G_{k,p+1}$, а значит, $\dim G_{k,p+1} \geq \dim H$. Кроме того, $H \supset G_{k-1,p}$ и $Z_{k,p} = H/G_{k-1,p}$, так как $Z_{k,p}$ — ядро гомоморфизма (13), а $E_{k,p}^0 = G_{k,p}/G_{k-1,p}$, $E_{k+1,p+1}^0 = G_{k+1,p+1}/G_{k,p+1}$. Используя (2) и (18), получаем

$$\sum_{j=0}^k \rho_{j,p+1} = \sum_{j=0}^k \varkappa_{j,p+1} - \sum_{j=0}^k \varkappa_{j-1,p} = \dim G_{k,p+1} - \dim G_{k-1,p} \geq \dim H - \dim G_{k-1,p} = s.$$

Так как по построению d -схемы квадратов s есть количество квадратов с верхним правым углом в точке $(k + 1, p + 1)$, то доказано первое неравенство (5). Второе неравенство доказывается аналогично.

Таким образом, с одной стороны, набор (21) есть набор чисел (2) оператора Δ , а с другой стороны, он совпадает с m -таблицей построенной d -схемы квадратов (соотношения (3)–(4) для нее мы доказали ранее). Первое утверждение теоремы 1 доказано.

Перейдем к доказательству второго утверждения теоремы. Пусть задана d -схема квадратов, для которой построена m -таблица чисел $\rho_{k,p}$, $k, p \geq 0$, удовлетворяющая условиям (3)–(5). Обозначим через $z_{k,p}$ и $b_{k,p}$ количество элементов в $Z_{k,p}^0$ и $B_{k,p}^0$ соответственно. Из определения m -таблицы d -схемы квадратов следует, что

$$\rho_{k,p} = b_{k,p} - z_{k,p}. \quad (24)$$

Обозначим через L — максимальное значение первой координаты элементов Z и B , а через l — максимальное значение второй координаты этих элементов. Из формулы (24) следует, что $\rho_{k,p} = 0$ вне прямоугольника $0 \leq k \leq L, 0 \leq p \leq l$.

Докажем существование отображения φ_h . Пусть $p > 0$ и $Z_{k,p}^0 \neq \emptyset$ для некоторого $k > 0$. Выберем минимальное k , такое, что $Z_{k,p}^0 \neq \emptyset$. Из формулы (24) следует, что $\rho_{j,p} = b_{j,p}$ при $j < k$, а значит, $\sum_{j=0}^{k-1} \rho_{j,p}$ — количество элементов в множестве $\tilde{B} = B_{0,p}^0 \cup B_{1,p}^0 \cup \dots \cup B_{k-1,p}^0$. Поэтому из первого неравенства (5) получаем, что в множестве \tilde{B} больше, чем $z_{k,p}$ элементов. Пусть φ_h отображает элементы $Z_{k,p}^0$ в какие-то (любые, но различные) s элементов множества \tilde{B} . Рассмотрим множество $Z_{k+1,p}^0$. Сумма

$$\sum_{j=0}^k \rho_{j,p} = \sum_{j=0}^k b_{j,p} - z_{k,p}$$

равна количеству элементов множества $\tilde{B} \cup B_{k,p}^0$, которые не лежат в образе $\varphi_h(Z_{k,p}^0)$. Из первого неравенства (5) следует, что таких элементов больше, чем элементов в $Z_{k+1,p}^0$. Аналогично предыдущему определим инъективное отображение φ_h из $Z_{k+1,p}^0$ в множество $(\tilde{B} \cup B_{k,p}^0) \setminus \varphi_h(Z_{k,p}^0)$. Увеличивая далее k , получим инъективное отображение φ_h из $\bigcup_{k=1}^L Z_{k,p}^0$ в $\bigcup_{k=0}^L B_{k,p}^0$. Далее, из первого равенства (3) и формулы (24) следует, что в указанных множествах одинаковое количество элементов, а значит, инъекция φ_h есть биекция. Перебирая $p = 1, \dots, l$, получаем определение φ_h , причем φ_h взаимно однозначно отображает элементы Z на элементы B с ненулевой второй координатой.

Аналогично определяется взаимно однозначное отображение φ_v из Z в подмножество элементов B с ненулевой первой координатой, причем φ_v не меняет первую координату и уменьшает вторую.

Покажем, что индуктивное определение операторов ∇_b (см. разд. 3) корректно. Заметим, что при $p > 0$ и $b \in B_{k,p}^0$ определен элемент $\varphi_h^{-1}(b)$ из Z , так как φ_h биективно отображает Z на элементы B с ненулевой второй координатой. Отображения ψ и φ_v уменьшают вторую координату. Поэтому вторые координаты элементов $(\psi \circ \varphi_h^{-1})(b)$ и $(\varphi_v \circ \varphi_h^{-1})(b)$ из B меньше p , а значит, применимо предположение индукции и формула (6), которая определяет ∇_b .

Используя индукцию по p , покажем, что при $b \in B_{k,p}^0$ порядок оператора ∇_b равен p . Для $p = 0$ это доказано при определении ∇_b . Если $p > 0$ и s — длина стороны квадрата, соответствующего элементу $\varphi_h^{-1}(b) \in Z$, то скалярный оператор $\square_{\varphi_h^{-1}(b)}$ по определению имеет порядок s , а вторая координата элемента $(\psi \circ \varphi_h^{-1})(b)$ есть $p - s$. Поэтому первое слагаемое

правой части формулы (6) имеет порядок p , поскольку при композиции скалярного оператора с матричным оператором порядка операторов складываются. Порядок второго слагаемого правой части формулы (6) меньше p , так как вторая координата элемента $(\varphi_v \circ \varphi_h^{-1})(b)$ меньше p . Следовательно, порядок оператора (6) равен p , т.е. $\nabla_b \in G_p \setminus G_{p-1}$.

Докажем обратимость оператора Δ , определенного формулой (7). Обратный оператор Δ^{-1} строится аналогично построению Δ с заменой Q на P , P на Q , φ_h на φ_v , φ_v на φ_h и с использованием выбранных базисов: e_1, \dots, e_m в модуле Q и f_1, \dots, f_m в модуле P . А именно, каждому элементу $b \in B$ поставим в соответствие дифференциальный оператор $\tilde{\nabla}_b$ из A в P . При этом используем индукцию по k (первая координата элемента b). Для $k = 0$ элементу b_i^1 , $i = 1, \dots, m$, соответствует оператор $\tilde{\nabla}_{b_i^1}$, отображающий a в $a f_i$. Для $k > 0$ верна формула

$$\tilde{\nabla}_b = \tilde{\nabla}_{(\psi \circ \varphi_v^{-1})(b)} \circ \square_{\varphi_v^{-1}(b)} - \tilde{\nabla}_{(\varphi_h \circ \varphi_v^{-1})(b)}. \quad (25)$$

Оператор Δ^{-1} определяется формулой

$$\Delta^{-1}(a_1 e_1 + \dots + a_m e_m) = \tilde{\nabla}_{b_1}(a_1) + \dots + \tilde{\nabla}_{b_m}(a_m), \quad a_1, \dots, a_m \in A. \quad (26)$$

Покажем, что операторы Δ и Δ^{-1} взаимно обратные. Для этого докажем сначала формулу связи двух типов построенных операторов:

$$\nabla_b = \Delta \circ \tilde{\nabla}_b, \quad b \in B. \quad (27)$$

Используем индукцию по первой координате k элемента b . Из определения $\tilde{\nabla}_{b_i^1}$ и формулы (7) имеем

$$(\Delta \circ \tilde{\nabla}_{b_i^1})(a) = \Delta(a f_i) = \nabla_{b_i^1}(a), \quad a \in A, \quad i = 1, \dots, m.$$

Таким образом, доказана формула (27) для $k = 0$. В случае $k > 0$ из формулы (25) следует, что

$$\Delta \circ \tilde{\nabla}_b = \Delta \circ \tilde{\nabla}_{(\psi \circ \varphi_v^{-1})(b)} \circ \square_{\varphi_v^{-1}(b)} - \Delta \circ \tilde{\nabla}_{(\varphi_h \circ \varphi_v^{-1})(b)}.$$

Первая координата элементов $(\psi \circ \varphi_v^{-1})(b)$ и $(\varphi_h \circ \varphi_v^{-1})(b)$ меньше k . По предположению индукции формула (27) для этих элементов справедлива. Следовательно,

$$\Delta \circ \tilde{\nabla}_b = \nabla_{(\psi \circ \varphi_v^{-1})(b)} \circ \square_{\varphi_v^{-1}(b)} - \nabla_{(\varphi_h \circ \varphi_v^{-1})(b)}.$$

Обозначим $\tilde{b} = (\varphi_h \circ \varphi_v^{-1})(b)$. Тогда $\varphi_h^{-1}(\tilde{b}) = \varphi_v^{-1}(b)$ и $(\psi \circ \varphi_h^{-1})(\tilde{b}) = (\psi \circ \varphi_v^{-1})(b)$, а значит, используя (6) для элемента \tilde{b} , получаем

$$\Delta \circ \tilde{\nabla}_b = \nabla_{(\psi \circ \varphi_h^{-1})(\tilde{b})} \circ \square_{\varphi_h^{-1}(\tilde{b})} - \nabla_{\tilde{b}} = \nabla_{\varphi_v \circ \varphi_h^{-1}(\tilde{b})} = \nabla_b.$$

Формула (27) доказана. Комбинируя ее с определением Δ^{-1} (см. (26)) и определением операторов $\nabla_{b_1}, \dots, \nabla_{b_m}$, получаем

$$\begin{aligned} (\Delta \circ \Delta^{-1})(a_1 e_1 + \dots + a_m e_m) &= (\Delta \circ \tilde{\nabla}_{b_1})(a_1) + \dots + (\Delta \circ \tilde{\nabla}_{b_m})(a_m) = \\ &= \nabla_{b_1}(a_1) + \dots + \nabla_{b_m}(a_m) = a_1 e_1 + \dots + a_m e_m. \end{aligned}$$

Таким образом, композиция $\Delta \circ \Delta^{-1}$ есть тождественный оператор. Тождественность композиции $\Delta^{-1} \circ \Delta$ доказывается аналогично.

Докажем, что набор чисел (2) оператора Δ есть m -таблица заданной d -схемы квадратов. Доказательство основано на последовательном построении базисов модулей G_p/G_{p-1} , $G_{k,p}$, $E_{k,p}^0$, $B_{k,p}$, $Z_{k,p}$, $k, p \geq 0$, а затем сравнении формулы (21) для чисел $\rho_{k,p}$ оператора Δ с формулой (24) для m -таблицы заданной d -схемы квадратов. Отметим сначала, что если (k, p) — координаты элемента $b \in B$, то по построению $\nabla_b \in \text{Diff}_p^+(A, Q) = G_p$, а $\tilde{\nabla}_b \in \text{Diff}_k^+(A, P)$. Используя равенство (27), получаем $\nabla_b \in F_k \cap G_p$, а значит, $[\nabla_b]_p \in G_{k,p}$.

Используя индукцию по p , докажем, что базисом G_p/G_{p-1} при $p \geq 0$ является набор таких элементов

$$D^{p-p_i}[\nabla_{b_i^p}]_{p_i}, \quad b_i^p \in B_{k_i, p_i}^0, \quad p_i \leq p, \quad i = 1, \dots, m, \quad (28)$$

что для любого $i = 1, \dots, m$ не существует элемента z из Z_{k_0, p_0}^0 , для которого $\psi(z) = b_i^p$ и $p_0 \leq p$. Отметим, что если элемент из B_{k_i, p_i}^0 попадает в наборы (28) для нескольких p , то он имеет несколько обозначений. Верхний индекс в обозначении b_i^p указывает на номер фактормодуля.

При $p = 0$ имеем $G_0/G_{-1} \simeq G_0$, так как $G_{-1} = 0$. Кроме того, из определения $G_0 = \text{Diff}_0^+(A, Q)$ следует, что $\delta_a(\alpha) = 0$ для любых $\alpha \in G_0$ и $a \in A$, а значит,

$$\delta_a(\alpha)(1) = (a^+\alpha)(1) - (a\alpha)(1) = \alpha(a) - a\alpha(1) = 0.$$

Из равенства $\alpha(a) = a\alpha(1)$ следует, что элемент α однозначно определяется значением $\alpha(1) \in Q$. Раскладывая элемент $\alpha(1)$ по выбранному базису e_1, \dots, e_m модуля Q , получаем:

$$\alpha(a) = a\alpha(1) = a(a_1e_1 + \dots + a_me_m) = (a_1^+\nabla_{b_1} + \dots + a_m^+\nabla_{b_m})(a),$$

где b_1, \dots, b_m — элементы B с нулевой второй координатой; $\nabla_{b_1}, \dots, \nabla_{b_m}$ — операторы из G_0 , определенные выше. Таким образом, $\alpha = a_1^+\nabla_{b_1} + \dots + a_m^+\nabla_{b_m}$, а значит, $[\nabla_{b_1}]_0, \dots, [\nabla_{b_m}]_0$ — базис модуля G_0/G_{-1} .

Пусть (28) — базис рассматриваемого типа модуля G_p/G_{p-1} . Так как отображение (8) является изоморфизмом модулей, то набор элементов

$$D^{p-p_1+1}[\nabla_{b_1^p}]_{p_1}, \quad \dots, \quad D^{p-p_m+1}[\nabla_{b_m^p}]_{p_m} \quad (29)$$

есть базис модуля G_{p+1}/G_p . Предположим, существует такой элемент z из Z_{k_0, p_0}^0 , $p_0 \leq p+1$, что $\psi(z) = b_{i_0}^p$ для некоторого i_0 от 1 до m . Тогда по предположению индукции $p_0 > p$, т.е. $p_0 = p+1$. Рассмотрим квадрат d -схемы, соответствующий элементу z . Вторая координата верхнего правого угла есть вторая координата z , т.е. $p+1$, а вторая координата его нижнего левого угла есть вторая координата $b_{i_0}^p$, т.е. p_{i_0} . Поэтому сторона квадрата равна $p+1 - p_{i_0}$, а значит, порядок оператора \square_z есть $p+1 - p_{i_0}$. Формулу (6) для элемента $b = \varphi_h(z)$ перепишем в виде

$$\nabla_{\varphi_h(z)} = \nabla_{b_{i_0}^p} \circ \square_z - \nabla_{\varphi_v(z)}. \quad (30)$$

По определению φ_h элемент $b = \varphi_h(z)$ имеет ту же вторую координату, что и z , т.е. $p + 1$. Поэтому $\nabla_{\varphi_h(z)} \in G_{p+1}$. По определению φ_v вторая координата элемента $\varphi_v(z)$ меньше $p + 1$, а значит, $\nabla_{\varphi_v(z)} \in G_p$ и $[\nabla_{\varphi_v(z)}]_{p+1} = 0$. Пусть a_0 — коэффициент при старшей производной оператора \square_z . Тогда $a_0 \neq 0$ и из (30) следует, что

$$[\nabla_{\varphi_h(z)}]_{p+1} = [\nabla_{b_{i_0}^p} \circ \square_z]_{p+1} - [\nabla_{\varphi_v(z)}]_{p+1} = a_0 D^{p+1-p_{i_0}} [\nabla_{b_{i_0}^p}]_{p_{i_0}}. \quad (31)$$

В наборе (29) заменим элемент $D^{p-p_{i_0}+1} [\nabla_{b_{i_0}^p}]_{p_{i_0}}$ на элемент $[\nabla_{\varphi_h(z)}]_{p+1}$, т.е. положим $b_{i_0}^{p+1} = \varphi_h(z)$.

Если существует еще такой номер i_1 , что $b_{i_1}^p = \psi(z)$ для некоторого z из Z_{k_0, p_0}^0 , $p_0 \leq p + 1$, то с элементом набора (29) с номером i_1 поступим аналогично. Для остальных номеров $i = 1, \dots, m$ положим $b_i^{p+1} = b_i^p$. Получим базис модуля G_{p+1}/G_p вида (28).

Докажем, что при $k \geq 0$, $p \geq 0$ модуль $G_{k,p}$ имеет базис

$$D^{p-p_*} [\nabla_b]_{p_*}, \quad b \in B_{k_*, p_*}^0, \quad p_* \leq p, \quad k_* \leq k - p + p_*, \quad (32)$$

где рассматриваются лишь те b , для которых не существует такого элемента z из Z_{k_0, p_0}^0 , что $\psi(z) = b$ и $p_0 \leq p$. Из определения $G_{k,p}$ и теоремы Нетер для $X = G_p \cap F_k$ и $Y = G_{p-1}$ следует, что

$$G_{k,p} = \frac{G_p \cap F_k + G_{p-1}}{G_{p-1}} = \frac{G_p \cap F_k}{G_{p-1} \cap F_k}.$$

Так как $F_k \subset G_{k+l}$, то $G_{k+l} \cap F_k = F_k$. Используя эти факты и равенство $G_{-1} = 0$, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{k+l} \dim G_{k,p} &= \sum_{p=0}^{k+l} \left(\dim(G_p \cap F_k) - \dim(G_{p-1} \cap F_k) \right) = \\ &= \dim(G_{k+l} \cap F_k) - \dim(G_{-1} \cap F_k) = \dim F_k = \dim \text{Diff}_k^+(A, P) = m(k+1). \end{aligned}$$

Обозначим через $g_{k,p}$ количество элементов в наборе (32). Этот набор есть часть набора (28), а следовательно, он линейно независим в каждой точке $t \in M$. С другой стороны, элементы (32) лежат в $G_{k,p}$. Поэтому $g_{k,p} \leq \dim G_{k,p}$ и

$$\sum_{p=0}^{k+l} g_{k,p} \leq \sum_{p=0}^{k+l} \dim G_{k,p} = m(k+1). \quad (33)$$

Покажем, что первая сумма в соотношении (33) также равна $m(k+1)$. Для этого заметим, что наборы (32) для разных p не пересекаются, а указанная сумма равна количеству элементов в наборах (32) для $p = 0, 1, \dots, k + l$. Рассмотрим элементы

$$D^s [\nabla_b]_{p_*}, \quad b \in B_{k_*, p_*}^0, \quad k_* \leq k, \quad s = 0, 1, \dots, k - k_*, \quad p = 0, 1, \dots, k + l. \quad (34)$$

Элемент $D^s [\nabla_b]_{p_*}$ не входит в набор (32), только если существует элемент z из Z_{k_0, p_0}^0 , для которого $\psi(z) = b$ и $p_0 \leq p = p_* + s$. Из равенства $\psi(z) = b$ и определения ψ следует, что $p_* - k_* = p_0 - k_0$, и поэтому $s \geq k_0 - k_*$. Кроме того, из неравенства $s \leq k - k_*$

получаем условие $k_0 = p_0 - p_* + k_* \leq s + k_* \leq k$. Таким образом, каждому элементу $z \in Z_{k_0, p_0}^0$, $k_0 \leq k$, $p_0 \leq p$, соответствуют $k - k_0 + 1$ элементов набора (34), которые при $s = k_0 - k_*$, $k_0 - k_* + 1, \dots, k - k_*$ не входят в наборы (32). Всего количество элементов в наборах (34) при $p \geq 0$ равно

$$\sum_{p_*=0}^{k+l} \sum_{k_*=0}^k (k - k_* + 1) b_{k_*, p_*},$$

количество элементов в (34), которые не входят в наборы (32), равно

$$\sum_{p_0=0}^{k+l} \sum_{k_0=0}^k (k - k_0 + 1) z_{k_0, p_0}.$$

Учитывая это и меняя во второй сумме индексы k_0, p_0 на k_*, p_* , получаем

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{k+l} g_{k,p} &= \sum_{p_*=0}^{k+l} \sum_{k_*=0}^k (k - k_* + 1) b_{k_*, p_*} - \sum_{p_*=0}^{k+l} \sum_{k_*=0}^k (k - k_* + 1) z_{k_*, p_*} = \\ &= \sum_{p_*=0}^{k+l} \sum_{k_*=0}^k (k - k_* + 1) (b_{k_*, p_*} - z_{k_*, p_*}). \end{aligned}$$

Используя формулу (24) для элементов m -таблицы заданной d -схемы квадратов, а также равенства (3)–(4), получаем

$$\sum_{p=0}^{k+l} g_{k,p} = \sum_{p_*=0}^{k+l} \sum_{k_*=0}^k (k - k_* + 1) \rho_{k_*, p_*} = \sum_{k_*=0}^k (k - k_* + 1) \sum_{p_*=0}^{k+l} \rho_{k_*, p_*} = m(k + 1).$$

Следовательно, соотношение (33) возможно только в случае равенства. Поэтому для всех $k \geq 0, p \geq 0$, имеем $g_{k,p} = \dim G_{k,p}$, а значит, модуль $G_{k,p}$ имеет базис (32).

Сравнивая базис (32) модуля $G_{k,p}$ и аналогичный базис модуля $G_{k-1,p}$, получаем, что элементы набора (32), для которых $k_* \leq k - 1 - p + p_*$, образуют базис его подмодуля $G_{k-1,p} \subset G_{k,p}$. Остальные элементы в (32) определяют базис фактормодуля $E_{k,p}^0 = G_{k,p}/G_{k-1,p}$, т.е. базис модуля $E_{k,p}^0$ определяют элементы

$$D^{p-p_*} [\nabla_b]_{p_*}, \quad b \in B_{k_*, p_*}^0, \quad p_* \leq p, \quad k_* = k - p + p_*, \quad (35)$$

где для каждого b не существует элемента z из Z_{k_0, p_0}^0 , для которого $\psi(z) = b$ и $p_0 \leq p$.

Базисный элемент модуля $E_{k,p}^0$, соответствующий элементу $D^{p-p_*} [\nabla_b]_{p_*}$, лежит в образе гомоморфизма d_0 , если $p > p_*$, и определяет элемент $B_{k,p}$, если $p = p_*$. Из определения отображения ψ следует, что если $b \in B_{k,p}^0$, $z \in Z_{k_0, p_0}^0$ и $\psi(z) = b$, то $p_0 > p$. Поэтому для любого элемента $b \in B_{k,p}^0$ не существует такого элемента z из Z_{k_0, p_0}^0 , что $\psi(z) = b$ и $p_0 \leq p$. Таким образом, для всех $k \geq 0, p \geq 0$ набор элементов $[\nabla_b]_p, b \in B_{k,p}^0$, определяет базис модуля $B_{k,p}$, а значит, $\dim B_{k,p} = b_{k,p}$.

Наконец, гомоморфизм (13) отображает базисный элемент модуля $E_{k,p}^0$, соответствующий элементу $D^{p-p_*}[\nabla_b]_{p_*}$, в базисный элемент модуля $E_{k+1,p+1}^0$, соответствующий элементу $D^{p-p_*+1}[\nabla_b]_{p_*}$, если не существует элемента $z \in Z_{k+1,p+1}^0$, для которого $\psi(z) = b$. Если такой элемент z существует, то $D^{p+1-p_*}[\nabla_b]_{p_*} = \frac{1}{a_0}[\nabla_{\varphi_h(z)}]_{p+1}$ (см. (31)). Из определения φ_h следует, что первая координата $\varphi_h(z) \in B$ меньше $k+1$, а значит, элемент $[\nabla_{\varphi_h(z)}]_{p+1}$ соответствует нулевому элементу в $E_{k+1,p+1}^0$. Таким образом, гомоморфизм (13) отображает часть базиса (35) модуля $E_{k,p}^0$ в часть базиса модуля $E_{k+1,p+1}^0$, а оставшуюся часть базиса (35) в нуль. Следовательно, размерность ядра этого гомоморфизма равна количеству элементов во второй части этого базиса. Между элементами этой части базиса (35) и элементами множества $Z_{k+1,p+1}^0$ установлено взаимно однозначное соответствие. Поэтому $\dim Z_{k,p} = z_{k+1,p+1}$.

Из доказанных равенств следует, что правые части формул (21) и (24) совпадают, а значит, набор чисел (2) оператора Δ есть m -таблица данной d -схемы квадратов. Теорема 1 полностью доказана.

Заключение

Как следует из доказанной теоремы, каждый обратимый линейный дифференциальный оператор однозначно определяет d -схему квадратов. Из доказательства этой же теоремы вытекает, что такой оператор однозначно определяется d -схемой квадратов, выбором базисов модулей Q и P , выбором скалярных дифференциальных операторов \square_z , $z \in Z$, и выбором отображений φ_h , φ_v из Z в B , причем φ_h не меняет вторую координату элемента $z \in Z$ и уменьшает первую, а φ_v , наоборот, не меняет первую координату и уменьшает вторую (процедура конструирования обратимого оператора приведена в разд. 3).

Отображения φ_h и φ_v имеют простую интерпретацию на языке спектральных последовательностей (см. [10, гл. 9, §1]). Например, если $\varphi_h(z) = b$, $\psi(z) = b_0$, (k, p) — координаты z , $(k-s, p)$ — координаты b , а $(k-l, p-l)$ — координаты b_0 , то оператор ∇_b определяет элемент $E_{k-s,p}^s$, оператор $D^{l-1}\nabla_{b_0}$ — элемент $E_{k-l,p-l}^s$, а оператор $d_s: E_{k-l,p-l}^s \rightarrow E_{k-s,p}^s$ отображает второй из указанных элементов в первый.

Модуль всех линейных дифференциальных операторов из A в Q имеет систему вложенных подмодулей

$$\dots \subset G_p = \text{Diff}_p^+(A, Q) \subset G_{p+1} = \text{Diff}_{p+1}^+(A, Q) \subset \dots \quad (36)$$

Такой модуль называют фильтрованным, а семейство его подмодулей (36) — фильтрацией. Определяющим свойством фильтрации (36) является точность последовательностей (9). Теорема 1 и ее доказательство основаны на исследовании, как преобразуются фильтрации (36) под действием обратимого оператора. При этом свойство точности последовательностей (9) играет ключевую роль. Модули линейных дифференциальных операторов в частных производных также являются фильтрованными, а их фильтрации определяются свойством точности последовательностей, которые называются в [2, п. 1.2.16] последовательностями Спен-

сера для символов. Но в отличие от последовательностей (9) они имеют больше двух ненулевых членов, и поэтому модули $E_{k,p}^0$ для них нельзя расположить на плоскости, а следует рассматривать более сложную трехмерную конструкцию. Тем не менее, если удастся найти аналог d -схемы квадратов для этой трехмерной конструкции, можно ожидать обобщения теоремы 1 на случай операторов в частных производных.

По-видимому, дифференциальные операторы с запаздыванием и разностные операторы также допускают аналогичные конструкции, и результаты этой работы могут быть обобщены и на такие обратимые операторы.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ НШ-53.2014.1 и грантов РФФИ 13-07-00736 и 14-01-00424.

Список литературы

1. Громов М. Дифференциальные соотношения с частными производными. М.: Мир, 1990. 536 с.
2. Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1986. 336 с.
3. Четвериков В.Н. Метод линеаризации для решения задач плоскостности и поиска оператора совместности // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42, № 10. С. 1518–1527.
4. Fliess M., Lévine J., Martin Ph., Rouchon P. A Lie — Bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems // IEEE Trans. Automatic Control. 1999. Vol. 44, no. 5. P. 922–937. DOI: [10.1109/9.763209](https://doi.org/10.1109/9.763209)
5. Martin Ph., Murray R., Rouchon P. Flat systems // Proc. of the 4th European Control Conf. Plenary lectures and Mini-courses. Brussels, 1997. P. 211–264.
6. Pomet J.-B. A differential geometric setting for dynamic equivalence and dynamic linearization // Geometry in Nonlinear Control and Differential Inclusions / B. Jakubczyk, W. Respondek, T. Rzezuchowski, Eds. Warsaw: Banach Center Publications, 1995. P. 319–339.
7. Chetverikov V.N. Invertible linear differential operators on two-dimensional manifolds Vienna, 1993. 16 p. (Preprint of the Erwin Schrodinger International Institute for Mathematical Physics; no. 55).
8. Четвериков В.Н. Управляемость плоских систем // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43, № 11. С. 1518–1527.
9. Хьюзмоллер Д. Расслоенные пространства. М.: Мир, 1970. 442 с.
10. Спеньер Э. Алгебраическая топология. М.: Мир, 1971. 680 с.

**Classification and Construction
of Invertible Linear Differential Operators
on a One-Dimensional Manifold**

07, July 2014

DOI: 10.7463/0714.0718107

Chetverikov V. N.

¹Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
chetverikov.vl@yandex.ru**Keywords:** [invertible linear differential operators](#), [transformations of control systems](#), [spectral sequences of chain complexes](#)

Invertible linear differential operators with one independent variable are investigated. The problem of description of such operators is important, because it is connected with transformations and the classification of control systems, in particular, with the flatness problem.

Each invertible linear differential operator represents a square matrix of scalar differential operators. Its product with an operator-column is an operator-column whose order does not exceed the sum of orders of initial operators. The operators-columns, the product with which leads to order fall, i.e. the order of the product is less than sum of orders of factors, are interesting for the description of invertible operators. In this paper the classification of invertible operators is based on dimensions $d_{k,p}$ of intersections of modules G_p and F_k for various k and p , where G_p is the module of all operators-columns of order not above p , and F_k is the module of compositions of the invertible operator with all operators-columns of order not above k . The invertible operators that have identical sets of numbers $d_{k,p}$ form one class.

In the paper the general properties of tables of numbers $d_{k,p}$ for invertible operators are investigated. A correspondence between invertible operators and elementary-geometrical models which in the paper are named by d -schemes of squares is constructed. The invertible operator is ambiguously defined by its d -scheme of squares. The mathematical structure that must be set for its unique definition and an algorithm for the construction of the invertible operator are offered.

In the proof of the main result, methods of the theory of chain complexes and their spectral sequences are used. In the paper all necessary concepts of this theory are formulated and the corresponding facts are proved.

Results of the paper can be used for solving problems in which invertible linear differential operators are arisen. Namely, it is necessary to formulate the conditions on the invertible operator

which follow from the problem statement, in language of d -schemes of squares. Further the d -scheme, satisfying to these conditions, is searched and the required operator is restored on this scheme.

A discussion of possible generalizations of offered methods on the cases of partial-differential operators, delay-differential operators and difference operators concludes the paper.

References

1. Gromov M. *Partial differential relations*. Springer Berlin Heidelberg, 1986. 363 p. (Ser. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*; vol. 9). DOI: 10.1007/978-3-662-02267-2 (Russ. ed.: Gromov M. *Differentsial'nye sootnosheniia s chastnymi proizvodnymi*. Moscow, Mir Publ., 1990. 536 p.).
2. Krasil'shchik S., Lychagin V.V., Vinogradov A.M. *Geometry of Jet Spaces and Nonlinear Partial Differential Equations*. Gordon and Breach, New York, 1986. 441 p. (Russ. ed.: Vinogradov A.M., Krasil'shchik I.S., Lychagin V.V. *Vvedenie v geometriiu nelineinykh differentsial'nykh uravnenii*. Moscow, Nauka Publ., 1986. 336 p.).
3. Chetverikov V.N. Linearization method for the flatness problem and for finding the compatibility operator. *Differentsial'nye uravneniia*, 2006, vol. 42, no. 10, pp. 1518–1527. (English translation: *Differential Equations*, 2006, vol. 42, no. 10, pp. 1479–1489. DOI: [10.1134/S0012266106100120](https://doi.org/10.1134/S0012266106100120)).
4. Fliess M., Lévine J., Martin Ph., Rouchon P. A Lie — Bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1999, vol. 44, no. 5, pp. 922–937. DOI: [10.1109/9.763209](https://doi.org/10.1109/9.763209)
5. Martin Ph., Murray R., Rouchon P. Flat systems. *Proc. of the 4th European Control Conf. Plenary lectures and Mini-courses*. Brussels, 1997, pp. 211–264.
6. Pomet J.-B. A differential geometric setting for dynamic equivalence and dynamic linearization. In: Jakubczyk B., Respondek W., Rzezuchowski T., eds. *Geometry in Nonlinear Control and Differential Inclusions*. Warsaw, Banach Center Publications, 1995, pp. 319–339.
7. Chetverikov V.N. Invertible linear differential operators on two-dimensional manifolds. Preprint no. 55. Vienna, Erwin Schrodinger International Institute for Mathematical Physics, 1993. 16 p.
8. Chetverikov V.N. Controllability of flat systems. *Differentsial'nye uravneniya*, 2007, vol. 43, no. 11, pp. 1518–1527. (English translation: *Differential Equations*, 2007, vol. 43, no. 11, pp. 1558–1568. DOI: [10.1134/S0012266107110110](https://doi.org/10.1134/S0012266107110110)).
9. Husemöller D. *Fibre Bundles*. McGraw Hill, 1966. 376 p. (Russ. ed.: Husemöller D. *Rassloennye prostranstva*. Moscow, Mir Publ., 1970. 442 p.).
10. Spanier E.H. *Algebraic Topology*. McGraw-Hill. 1966. 528 p. (Russ. ed.: Spanier E.H. *Algebraicheskaia topologiia*. Moscow, Mir Publ., 1971. 680 p.).