Контактные интегрируемые расширения псевдогрупп симметрий уравнений rdDym и mmdKP

О.И. Морозов

МГТУ ГА

доклад на семинаре
по геометрии дифференциальных уравнений,
Независимый Московский Университет,
20 октября 2010 г.

Псевдогруппы Ли

Псевдогруппа $\mathfrak{G}$ на многообразии M — совокупность локальных диффеоморфизмов $\Phi\colon \mathcal{U} \to \hat{\mathcal{U}}$, $\Phi\colon x \mapsto \hat{x}$, такая что

1) если $\Phi \in \mathfrak{G}$, $\Psi \in \mathfrak{G}$, и $\Psi \circ \Phi$ определено, то $\Psi \circ \Phi \in \mathfrak{G}$;
2) $\Phi \in \mathfrak{G} \Rightarrow \Phi^{-1} \in \mathfrak{G}$;
3) $\mathrm{id}_M \in \mathfrak{G}$.

Псевдогруппа $\mathfrak{G}$ называется псевдогруппой Ли, если

4) функции $\hat{x} = \Phi(x)$ являются локальными аналитическими решениями системы ДУ (уравнения Ли псевдогруппы $\mathfrak{G}$)

$$R\left(x, \Phi(x), \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^{\#I} \Phi(x)}{\partial x^I}\right) = 0.$$

Псевдогруппы Ли

Формы Маурера–Картана псевдогруппы $\mathfrak{G}$: совокупность форм

$$\omega^i \in \Omega^1(M \times N \times H), \qquad i \in \{1, ..., \dim M + \dim N\},$$

где N — многообразие, H — конечная группа Ли.

Локальный диффеоморфизм Φ на M, $\Phi\colon \mathcal{U} \to \hat{\mathcal{U}}$, принадлежит $\mathfrak{G}$ тогда и только тогда, когда существует послойный диффеоморфизм Ψ на $M \times N \times H$, $\Psi\colon \mathcal{W} \to \hat{\mathcal{W}}$, такой что

- Φ явялется проекцией Ψ относительно $M \times N \times H \to M$;
- $\Psi^* \left(\omega^i|_{\hat{\mathcal{W}}}\right) = \omega^i|_{\mathcal{W}}$.

Псевдогруппы Ли

Структурные уравнения псевдогруппы Ли $\mathfrak{G}$:

$$d\omega^i = A^i_{\alpha j}(U^\sigma)\,\pi^\alpha \wedge \omega^j + B^i_{jk}(U^\sigma)\,\omega^j \wedge \omega^k, \qquad B^i_{jk} = -B^i_{kj},$$

$$dU^\kappa = C^\kappa_j(U^\sigma)\,\omega^j,$$

$U^\sigma\colon M \to \mathbb{R}$, $\sigma \in \{1, ..., s\}$, $s < \dim M$, — инварианты псевдогруппы $\mathfrak{G}$,

$$\Phi^*\left(U^\kappa|_{\widetilde{\mathcal{U}}}\right) = U^\kappa|_{\mathcal{U}},$$

- π^α — зависят от координат на H;
- выполнены условия инволютивности;
- выполнены условия совместности.

Условия инволютивности:

$$r^{(1)} = n \dim H - \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)\, \sigma_k,$$

где $n = \dim M + \dim N$, $r^{(1)}$ — размерность линейного пространства коэффициентов z^α_j, таких что замена $\pi^\alpha \mapsto \pi^\alpha + z^\alpha_j\, \omega^j$ не меняет структурные уравнения;

$$\sigma_k = \max_{u_1,\dots,u_k} \operatorname{rank} \mathbb{A}_k(u_1,\dots,u_k) - \sum_{j=1}^{k-1} \sigma_j,$$

$$\mathbb{A}_1(u_1) = \left(A^i_{\alpha j}\, u^j_1 \right),$$

$$\mathbb{A}_q(u_1,\dots,u_q) = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{q-1}(u_1,\dots,u_{q-1}) \\ A^i_{\alpha j}\, u^j_q \end{pmatrix}, \; q \in \{2,\dots,n-1\}.$$

Псевдогруппы Ли

Условия совместности:

- $d(d\omega^i) = 0 = d\left(A^i_{\alpha j}\,\pi^\alpha \wedge \omega^j + B^i_{jk}\,\omega^j \wedge \omega^k\right)$
- $d(dU^\kappa) = 0 = d(C^\kappa_j\,\omega^j)$

$\Longrightarrow$

- переопределенная система на коэффициенты $A^i_{\alpha j}$, B^i_{jk}, C^κ_j;
- $d\pi^\alpha = W^\alpha_{\lambda j}\,\chi^\lambda \wedge \omega^j + X^\alpha_{\beta\gamma}\,\pi^\beta \wedge \pi^\gamma + Y^\alpha_{\beta j}\,\pi^\beta \wedge \omega^j + Z^\alpha_{jk}\,\omega^j \wedge \omega^k$.

Псевдогруппы Ли

ТЕОРЕМА (*Третья фундаментальная теорема Ли в форме Картана*): Для любой псевдогруппы Ли существует совокуность ее форм Маурера–Картана с инволютивными и совместными структурными уравнениями.

ТЕОРЕМА (*Третья обратная фундаментальная теорема Ли в форме Картана*): Для данной инволютивной и совместной системы структурных уравнений существует совокупность 1-форм ω^1, ..., ω^n и функций U^1, ..., U^s, удовлетворяющих этой системе. Формы ω^1, ..., ω^m являются формами Маурера–Картана некоторой псевдогруппы Ли, а функции U^1, ..., U^s явялются ее инвариантами.

- Cartan É. Œuvres Complètes. Paris: Gauthier - Villars, 1953
- Васильева М.В. Структура бесконечных групп Ли преобразований. М.: МГПИ, 1972
- Stormark O. Lie's Structural Approach to PDE Systems. Cambridge: CUP, 2000

Формы Маурера–Картана псевдогруппы контактных преобразований $\mathrm{Cont}(J^2(\pi))$:

$$\Theta_0 = a\,(du - u_i\,dx^i),$$
$$\Theta_i = a\,B_i^j\,(du_j - u_{jk}\,dx^k) + g_i\,\Theta_0,$$
$$\Theta_{ij} = a\,B_i^k\,B_j^l\,(du_{kl} - u_{klm}\,dx^m) + s_{ij}\,\Theta_0 + w_{ij}^k\,\Theta_k,$$
$$\Xi^i = b_j^i\,dx^j + c^i\,\Theta_0 + f^{ij}\,\Theta_j,$$

где $\quad b_k^i\,B_j^k = \delta_j^i, \quad f^{ik} = f^{ki},\ s_{ij} = s_{ji}, \quad w_{ij}^k = w_{ji}^k,$
$u_{klm} = u_{lkm} = u_{kml}.$

Структурные уравнения

$$d\Theta_0 = \Phi_0^0 \wedge \Theta_0 + \Xi^i \wedge \Theta_i,$$
$$d\Theta_i = \Phi_i^0 \wedge \Theta_0 + \Phi_i^k \wedge \Theta_k + \Xi^k \wedge \Theta_{ik},$$
$$d\Theta_{ij} = \Phi_i^k \wedge \Theta_{kj} - \Phi_0^0 \wedge \Theta_{ij} + \Upsilon_{ij}^0 \wedge \Theta_0 + \Upsilon_{ij}^k \wedge \Theta_k + \Xi^k \wedge \Theta_{ijk},$$
$$d\Xi^i = \Phi_0^0 \wedge \Xi^i - \Phi_k^i \wedge \Xi^k + \Psi^{i0} \wedge \Theta_0 + \Psi^{ik} \wedge \Theta_k$$

Псевдогруппы симметрий дифференциальных уравнений

- ДУ второго порядка: $\iota\colon \mathcal{E} \to J^2(\pi)$
- Контактные симметрии $\mathcal{E}$ — контактные преобразования на $J^2(\pi)$, отображающие $\mathcal{E}$ на себя: $\mathrm{Cont}(\mathcal{E}) \subset \mathrm{Cont}(J^2(\pi))$,
- **Формы Маурера – Картана псевдогруппы** $\mathrm{Cont}(\mathcal{E})$ **могут быть получены из ограничений** $\theta_0 = \iota^* \Theta_0$, $\theta_i = \iota^* \Theta_i$, $\theta_{ij} = \iota^* \Theta_{ij}$, $\xi^i = \iota^* \Xi^i$ **форм Маурера – Картана псевдогруппы** $\mathrm{Cont}(J^2(\pi))$ на $\mathcal{E}$ **с помощью алгоритмических процедур метода эквивалентности Картана**
- Подробности:
  - M. Fels, P.J. Olver. Moving coframes I. A practical algorithm. // Acta Appl. Math., 1998, Vol. 51, pp. 161–213
  - O.I. Morozov. Moving coframes and symmetries of differential equations. // J. Phys. A: Math. Gen., 2002, Vol. 35, pp. 2965 – 2977

Контактные интегрируемые расширения

Bryant R.L., Griffiths P.A. Characteristic Cohomology of Differential Systems (II): Conservation Laws for a Class of Parabolic Equations // Duke Math. J., **78**, 531–676 (1995):

$n = 2$, конечномерные накрытия

Определение 1. Пусть

$$d\omega^i = A^i_{\alpha j}(U^\sigma)\,\pi^\alpha\wedge\omega^j + B^i_{jk}(U^\sigma)\,\omega^j\wedge\omega^k, \tag{1}$$

$$dU^\kappa = C^\kappa_j(U^\sigma)\,\omega^j \tag{2}$$

— структурные уравнения некоторой псевдогруппы Ли $\mathfrak{G}$. Тогда система уравнений

$$d\tau^q = D^q_{\rho r}(U^\sigma, V^\epsilon)\,\eta^\rho\wedge\tau^r + E^q_{rs}(U^\sigma, V^\epsilon)\,\tau^r\wedge\tau^s + F^q_{r\beta}(U^\sigma, V^\epsilon)\,\tau^r\wedge\pi^\beta$$

$$+G^q_{rj}(U^\sigma, V^\epsilon)\,\tau^r\wedge\omega^j + H^q_{\beta j}(U^\sigma, V^\epsilon)\,\pi^\beta\wedge\omega^j + I^q_{jk}(U^\sigma, V^\epsilon)\,\omega^j\wedge\omega^k, \tag{3}$$

$$dV^\epsilon = J^\epsilon_j(U^\sigma, V^\epsilon)\,\omega^j + K^\epsilon_q(U^\sigma, V^\epsilon)\,\tau^q, \tag{4}$$

с неизвестными 1-формами τ^q, $q \in \{1, ..., Q\}$, η^ρ, $\rho \in \{1, ..., R\}$, и неизвестными функциями V^ϵ, $\epsilon \in \{1, ..., S\}$, $Q, R, S \in \mathbb{N}$, называется интегрируемым расширением системы (1), (2), если уравнения (1) – (4) одновременно являются инволютивными и совместными.

Контактные интегрируемые расширения

Пусть система (3), (4) — интегрируемое расширение системы (1), (2). Тогда система (1)–(4) определяет псевдогруппу Ли $\mathfrak{H}$, которая является расширением псевдогруппы $\mathfrak{G}$.

Определение 2. Интегруемое расширение (3), (4) называется тривиальным, если существует замена переменных на многообразии действия псевдогруппы $\mathfrak{H}$, такая что в новых переменных уравнения (3), (4) не содержат форм ω^j, π^β, и коэффициенты уравнений (3), (4) не зависят от функций U^q. В противном случае интегрируемое расширение называется нетривиальным .

Пусть θ^α_K, ξ^j — формы Маурера–Картана псевдогруппы симметрий $\mathrm{Cont}(\mathcal{E})$ некоторого ДУ $\mathcal{E}$, причем θ^α_K — контактные формы (их ограничения на каждое решение уравнения $\mathcal{E}$ равны 0), и ξ^j — горизонтальные формы ($\xi^1 \wedge \ldots \wedge \xi^n \neq 0$ на любом решении).

Определение 3. Нетривиальное интегрируемое расширение структурных уравнений псевдогруппы $\mathrm{Cont}(\mathcal{E})$

$$d\omega^q = \Pi^q_r \wedge \omega^r + \xi^j \wedge \Omega^q_j \tag{5}$$

называется контактным интегрируемым расширением, если

- $\Omega^q_j \equiv 0 \pmod{\theta^\alpha_K, \omega^r_i}$ для некоторой совокупности дополнительных форм ω^q_j;
- $\Omega^q_j \not\equiv 0 \pmod{\omega^r_i}$ для некоторых q, j
- коэффициенты разложений Ω^q_j по $\{\theta^\alpha_I, \omega^r_i\}$ и Π^q_r по $\{\theta^\alpha_I, \xi^j, \omega^r, \omega^r_i\}$ зависят от инвариантов $\mathrm{Cont}(\mathcal{E})$ и, возможно, от некоторых дополнительных функций W^ρ, $\rho \in \{1, \ldots, \Lambda\}$, $\Lambda \geqslant 1$. В последнем случае существуют функции $P^{I\rho}_\alpha$, Q^ρ_q, $R^{j\rho}_q$, S^ρ_j, такие что

$$dW^\rho = P^{I\rho}_\alpha\, \theta^\alpha_I + Q^\rho_q\, \omega^q + R^{j\rho}_q\, \omega^q_j + S^\rho_j\, \xi^j,$$

и эти уравнения удовлетворяют условию совместности.

Уравнение rdDym

r-ое бездисперсионное (2+1)-мерное уравнение Дима (rdDym) (M. Błaszak, 2002):

$$u_{ty} = u_x\, u_{xy} + \kappa\, u_y\, u_{xx}, \qquad \kappa \neq 0$$

специальные случаи:

- $\kappa = 1$: бездисперсионное уравнение Новикова–Веселова
  B.G. Konopelchenko, A. Moro, 2004
- $\kappa = \frac{1}{2}$:
  E.V. Ferapontov, K.R. Khusnutdinova, S.P. Tsarev, 2004
- $\kappa = 2$:
  E.V. Ferapontov, A. Moro, V.V. Sokolov, 2007
- $\kappa \neq -2$:
  M.V. Pavlov, 2006
- $\kappa = -1$:
  V.Yu. Ovsienko, 2008, гамильтонова система на расширении группы Вирасоро

Уравнение rdDym

Структурные уравнения псевдогруппы симметрий

$$
\begin{aligned}
d\theta_0 &= \eta_1\wedge\theta_0+\xi_1\wedge\theta_1+\xi_2\wedge\theta_2+\xi_3\wedge\theta_3,\\
d\theta_1 &= 2\,\eta_1\wedge\theta_1-\big(\theta_{22}+\tfrac{1}{2}\,U\,(2\,\kappa-1)\,\kappa^{-1}\,\xi_3\big)\wedge\theta_0-(2\,\theta_{23}-(U+2)\,\theta_3\\
&\qquad +\tfrac{1}{2}\,(3\,U-2)\,\xi_2-2\,V\,\xi_3\big)\wedge\theta_1+\xi_1\wedge\theta_{11}+\xi_2\wedge\theta_{12}+\xi_3\wedge\theta_{22},\\
d\theta_2 &= \eta_1\wedge\theta_2+\eta_2\wedge\theta_0-\big(\theta_{23}-\tfrac{1}{2}\,(U+2)\,\theta_3+\xi_1-\xi_2-V\,\xi_3\big)\wedge\theta_2\\
&\qquad +\xi_1\wedge\theta_{12}+\xi_2\wedge\theta_{22}+\xi_3\wedge\theta_{23},\\
d\theta_3 &= \xi_1\wedge(\kappa^{-1}\,\theta_2+\theta_{22})+\xi_2\wedge\big(\theta_{23}-\tfrac{1}{2}\,(U+2)\,\theta_3\big)+\xi_3\wedge\theta_{33},\\
d\xi_1 &= \xi_1\wedge\big(\eta_1+(U+2)\,\theta_3-2\,\theta_{23}-\tfrac{1}{2}\,(3\,U-4)\,\xi_2+2\,V\,\xi_3\big)\,,\\
d\xi_2 &= \kappa^{-1}\,\xi_1\wedge\big(\tfrac{1}{2}\,U\,\theta_0-\theta_2+\kappa\,\xi_2-\xi_3\big)+\xi_2\wedge\big(\tfrac{1}{2}\,(U+2)\,\theta_3-\theta_{23}+V\,\xi_3\big)\\
d\xi_3 &= \big(\eta_1+\theta_3+\tfrac{1}{2}\,(U+2)\,\xi_2\big)\wedge\xi_3,\\
&\qquad\qquad \ldots
\end{aligned}
$$

Уравнение rdDym

Инварианты и их дифференциалы:

$$U = \frac{u_y\, u_{xxy}}{u_{xy}^2}, \qquad V = \frac{u_y\, u_{xxx}}{u_{xy}^4}\,(u_{xy}\, u_{yy} - u_y\, u_{xyy}),$$

$$\begin{aligned} dU &= 2\,\eta_2 - \tfrac{1}{2}\,\kappa^{-1}\,U\,V\,\theta_0 + \tfrac{1}{2}\,U\,(U+2)\,\theta_3 - (U+2)\,\xi_1 \\ &\quad - \tfrac{1}{2}\,\kappa^{-1}\,U\,(\kappa\,U - 2\,\kappa + 2)\,\xi_2 + U\,V\,\xi_3 - U\,\theta_{23}, \\ dV &= \eta_6 - V\,\eta_1 + \tfrac{1}{2}\,V\,(U-2)\,\theta_3 + \kappa^{-1}\,(2\,\kappa\,V - 2\,U + 1)\,\xi_1 \\ &\quad - \tfrac{1}{2}\,V\,(U+4)\,\xi_2 + \tfrac{1}{2}\,(U+2)\,\theta_{33}. \end{aligned}$$

Уравнение rdDym

Контактные интегрируемые расширения псевдогруппы симметрий уравнения rdDym в простейшей форме

$$d\omega_0 = \sum_{j=1}^{3} \left(\sum_{k=0}^{3} F_{jk}\, \theta_k + G_j\, \omega_1 \right) \wedge \xi^j +$$

$$\left(\sum_{i=0}^{3} A_i\, \theta_i + \sum_{i,j=1}^{3} B_{ij}\, \theta_{ij} + \sum_{s=1}^{7} C_s\, \eta_s + \sum_{j=1}^{3} D_j\, \xi^j + E\, \omega_1 \right) \wedge \omega_0$$

- Тип 1: коэффициенты зависят от U, V;
- Тип 2: коэффициенты также зависят от одного дополнительного инварианта W,

$$dW = \sum_{i=0}^{3} H_i\, \theta_i + \sum_{i,j=1}^{3} I_{ij}\, \theta_{ij} + \sum_{s=1}^{7} J_s\, \eta_s + \sum_{j=1}^{3} K_j\, \xi^j + \sum_{q=0}^{1} L_q\, \omega_q.$$

Уравнение rdDym

Расширений первого типа нет. Каждое расширение второго типа контактно эквивалентно следующему:

$$
\begin{aligned}
d\omega_0 = {} & \Big(\theta_{23} - \tfrac{1}{2}\,(U+2)\,\theta_3 - \kappa^{-1}\,W^{-1}(\kappa\,(U+V\,W-1)-1)\,\xi^3 + \omega_1 \\
& \quad + (1 - W\,(U-1))\,\xi^1\Big)\wedge\omega_0 + \tfrac{1}{2}\,\kappa^{-1}\,(U\theta_0 - 2\,\theta_2 + 2\,\kappa\,W\,\omega_1)\wedge\xi^1 \\
& \quad + \omega_1\wedge\xi^2 + W^{-1}\,(\omega_1 + \kappa^{-1}\,\theta_3)\wedge\xi^3, \\
dW = {} & -(\kappa+1)\,W\,\omega_1 + \Big(\kappa\,W\,(1-U) - \tfrac{1}{2}\,U\,W + Z\Big)\,\omega_0 + W\,(\eta_1 - \theta_{23}) \\
& + \tfrac{1}{2}\,W\,(U+2)\,\theta_3 + Z\,\xi^2 + \Big(V\,W + \tfrac{1}{2}\,U + W^{-1}\,Z - 2 - \kappa^{-1}\Big)\,\xi^3 \\
& + W\,\Big(Z - W - 1 + \tfrac{1}{2}\,U\,W\Big)\,\xi^1.
\end{aligned}
$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1: $\kappa = -1,\ Z = -\frac{1}{2}\,W\,(U-2) \Longrightarrow$

1) условие совместности выполнено тождественно;

2) неустранимый параметр.

ЗАМЕЧАНИЕ 2: $\kappa = -1,\ Z \neq -\frac{1}{2}\,W\,(U-2) \Longrightarrow$

условие совместности выполнено.

Уравнение rdDym

Третья обратная фундаментальная теорема $\Longrightarrow$

$\kappa \notin \{-2, -1, 0\}$:

$$\omega_0 = \frac{u_{xy}}{u_y\, v_x} \left(dv - \left(u_x\, v_x + \frac{\kappa}{\kappa+2}\, v_x^{\kappa+2} \right) dt - v_x\, dx + \frac{1}{\kappa}\, u_y\, v_x^{-\kappa}\, dy \right),$$

$$W = u_{xy}^2\, u_y^{-2}\, u_{xxx}^{-1}\, v_x^{\kappa+1}.$$

$\kappa = -2$:

$$\omega_0 = \frac{u_{xy}}{u_y\, v_x} \left(dv - \left(u_x\, v_x - 2 \ln |\, v_x \,| \right) dt - v_x\, dx - \tfrac{1}{2}\, u_y\, v_x^2\, dy \right),$$

$$W = u_{xy}^2\, u_y^{-2}\, u_{xxx}^{-1}\, v_x^{-1}.$$

Уравнение rdDym

$\kappa = -1,\ Z \neq -\frac{1}{2}\, W\,(U-2)$:

$$\omega_0 = \frac{u_{xy}}{u_y\, v_x}\,\big(dv - (u_x - v)\, v_x\, dt - v_x\, dx - u_y\, v^{-1}\, v_x\, dy\big)\,,$$

$$W = u_{xy}^2\, u_y^{-2}\, u_{xxx}^{-1}\, v.$$

$\kappa = -1,\ Z = -\frac{1}{2}\, W\,(U-2)$:

$$\omega_0 = \frac{u_{xy}}{u_y\, v_x}\,\big(dv - (u_x - \lambda)\, v_x\, dt - v_x\, dx - \lambda^{-1}\, u_y\, v_x\, dy\big)\,,$$

$$W = \lambda\, u_{xy}^2\, u_y^{-2}\, u_{xxx}^{-1}.$$

Уравнение rdDym

- $\kappa \notin \{-2, -1, 0\}$:

$$\begin{cases} v_t = u_x\, v_x + \frac{1}{\kappa+2}\, v_x^{\kappa+2}, \\ v_y = -u_y\, v_x^{-\kappa}. \end{cases}$$

  - M.V. Pavlov, 2006

$$v_{ty} = \frac{1}{\kappa+2}\left((\kappa+1)\, v_t - v_x^{\kappa+2}\right) v_x^{-1}\, v_{xy} - \kappa\, v_y\, v_x^{\kappa}\, v_{xx}$$

- $\kappa = -2$:

$$\begin{cases} v_t = u_x\, v_x + \ln|v_x|, \\ v_y = -u_y v_x^2. \end{cases}$$

$$v_{ty} = \left(v_t - \ln|v_x|\right) v_x^{-1}\, v_{xy} + 2\, v_y\, v_x^{-2}\, v_{xx}$$

Уравнение rdDym

- $\kappa = -1$:

$$\begin{cases} v_t = (u_x - v)\, v_x, \\ v_y = u_y\, v^{-1}\, v_x. \end{cases}$$

$$v_{ty} = (v_t\, v_x^{-1} + v)\, v_{xy} - v\, v_y\, v_x^{-1}\, v_{xx}$$

- $\kappa = -1$:

$$\begin{cases} v_t = (u_x + \lambda)\, v_x, \\ v_y = -\lambda^{-1}\, u_y v_x, \end{cases}$$

$$v_{ty} = (v_t\, v_x^{-1} - \lambda)\, v_{xy} + \lambda\, v_y\, v_x^{-1}\, v_{xx}$$

$\lambda \neq 0$ — неустранимый параметр,
симметрия уравнения r-dDym с $\kappa = -1$ с генератором $x\,\frac{\partial}{\partial x} + 2\,u\,\frac{\partial}{\partial u}$ не продолжается до симметрии накрытия

Уравнение rdDym

$\kappa \notin \{-1, 0\}$:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}_2 \arrow[d, leftrightarrow] \\ \mathcal{E}_1 \end{tikzcd}$$

$\kappa = -1$:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}_2 \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & & \mathcal{E}_3 \arrow[dl, leftrightarrow, "\lambda"] \\ & \mathcal{E}_1 & \end{tikzcd}$$

Уравнение rmdKP

r-ое модифицированное бездисперсионное уравнение Кадомцева–Петвиашвили (rmdKP) (M. Błaszak, 2002):

$$u_{yy} = u_{tx} + \left(\frac{1}{2}\left(\kappa + 1\right) u_x^2 + u_y\right) u_{xx} + \kappa\, u_x\, u_{xy}$$

специальные случаи:

- $\kappa = 0$: mdKP,
  Г.М. Кузьмина, 1967; И.М. Кричевер, 1988;
  B.A. Kupershmidt, 1990.
- $\kappa = 1$: dBKP,
  N. Dasgupta, R. Chowdhury, 1992; K. Takasaki, 1993;
  B.G. Konopelchenko, L. Martinez Alonso, 2003.
- $\kappa = -1$:
  M.V. Pavlov, 2003; M. Dunajski, 2004; E.V. Ferapontov, K.R. Khusnutdinova, 2004; V.Yu. Ovsienko, C. Roger, 2006

Уравнение rmdKP

Контактные интегрируемые расширения:

$\kappa \notin \{-3,-1\}$:

Первый тип:

$$
\begin{aligned}
d\omega_0 = {} & \big(\omega_1 + \tfrac{1}{2}\,(\eta_1 + \theta_{22}) + \tfrac{1}{16}\,(8\,V + \kappa^2 + 13\,\kappa + 12)\,(\kappa+1)^{-1}\,\xi^3 \\
& + \tfrac{1}{2}\,((\kappa+1)^2\,U - V^2 - 2\,(\kappa^2 + 3\,\kappa + 2)\,V)\,(\kappa+1)^{-2}\,\xi^1\big)\wedge\omega_0 \\
& + \big(\theta_3 - V\,(\kappa+1)^{-1}\,\theta_2 - \tfrac{1}{8}\,(\kappa-4)\,\theta_0 + (\kappa+1)^{-2}\,V^2\,\omega_1\big)\wedge\xi^1 \\
& + \omega_1\wedge\xi^2 + (\theta_2 - V\,(\kappa+1)^{-1}\,\omega_1)\wedge\xi^3.
\end{aligned}
$$

Второй тип:

$$
\begin{aligned}
d\omega_0 = {} & \big(\omega_1 + \tfrac{1}{2}\,(\theta_{22} + \eta_1 + (U - W^2 + 2\,(W - V))\,\xi^1) - \tfrac{1}{16}\,(8\,W - \kappa + 12)\,\xi^3\big) \\
& + \big(W^2\,\omega_1 + W\,\theta_2 - \tfrac{1}{8}\,(\kappa-4)\,\theta_0 + \theta_3\big)\wedge\xi^1 + \omega_1\wedge\xi^2 + (W\,\omega_1 + \theta_2)\wedge\xi^3, \\
dW = {} & \tfrac{1}{2}\,(2\,(Z_1+1) - \kappa\,(W-1) - V)\,\omega_0 - (V + (\kappa+1)\,W)\,\omega_1 + \eta_2 - \theta_2 \\
& + \tfrac{1}{2}\,W\,(\eta_1 - \theta_{22}) + \tfrac{1}{2}\,W\,(2\,W\,Z_1 - U + 4\,V + W\,(W-\kappa))\,\xi^1 + Z_1\,\xi^2 \\
& + \tfrac{1}{16}\,(W\,(16\,Z_1 + 8\,W - 7\,\kappa - 4) + 16\,V)\,\xi^3.
\end{aligned}
$$

Уравнение rmdKP

$\kappa = -3$: третье контактное интегрируемое расширение

$$
\begin{aligned}
d\omega_0 = {} & \Big(\tfrac{1}{2}\,(\theta_{22}+\eta_1)+\tfrac{1}{8}\,(4\,U-V\,(V+8\,W-11))\,\xi^1+\omega_1 \\
& -\tfrac{1}{16}\,(4\,V+16\,W+5)\,\xi^3\Big)\wedge\omega_0+\Big(\theta_3-W\,\theta_0+\tfrac{1}{2}\,V\,\theta_2+\tfrac{1}{4}\,V^2\,\omega_1\Big)\wedge\xi^1 \\
& +\omega_1\wedge\xi^2+\Big(\theta_2+\tfrac{1}{2}\,V\,\omega_1\Big)\wedge\xi^3 \\
dW = {} & \Big(Z+\tfrac{3}{2}\,W+\tfrac{21}{16}\Big)\;\omega_0+\Big(W+\tfrac{7}{8}\Big)\;(\omega_1-\theta_{22})+Z\,\xi^2 \\
& -\Big(U\;\Big(W+\tfrac{7}{8}\Big)+V\;\Big(W^2-\tfrac{203}{64}\Big)-\tfrac{1}{32}\,V^2\,(8\,Z+7)\Big)\;\xi^1 \\
& +\tfrac{1}{64}\;(32\,V\,(Z+W)-16\,W\,(4\,W+3)+7\,(4\,V+1))\;\xi^3.
\end{aligned}
$$

Уравнение rmdKP

$\kappa = -1$: одно контактное интегрируемое расширение второго типа

$$
\begin{aligned}
d\omega_0 &= \left(\tfrac{1}{2}\left(\theta_{22} + \eta_1 + (U - W^2 + 2\,W)\,\xi^1\right) - \tfrac{1}{16}\,(8\,W - 11)\,\xi^3 + \omega_1\right)\wedge\omega_0 \\
&\quad + \left(\theta_3 + \tfrac{5}{8}\,\theta_0 + W\,\theta_2 + W^2\,\omega_1\right)\wedge\xi^1 + \omega_1\wedge\xi^2 + (\theta_2 + W\,\omega_1)\wedge\xi^3), \\
dW &= \tfrac{1}{2}(2\,Z + W + 1)\,\omega_0 - \theta_2 - \tfrac{1}{2}\,W\,(\theta_{22} + \eta_1) + \eta_2 + \tfrac{1}{16}\,W\,(16\,Z + 8\,W + 3)\,\xi^3 \\
&\quad + Z\,\xi^2 + \tfrac{1}{2}\left(W^2\,(2\,Z + 1) + W\,(W^2 - U)\right)\xi^1
\end{aligned}
$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1: $2\,Z + W + 1 = 0 \Longrightarrow$ неустранимый параметр.

ЗАМЕЧАНИЕ 2: $2\,Z + W + 1 \neq 0 \Longrightarrow$ условие совместности выполнено.

Уравнение rmdKP

- $\kappa \notin \{-2, -\frac{3}{2}, -1\}$:

$$\begin{cases} v_t = \left(\frac{1}{2\kappa+3}\, v_x^{2\,(\kappa+1)} - u_x\, v_x^{\kappa+1} + \left(\frac{1}{2}\,(\kappa+1)\, u_x^2 - u_y\right)\right) v_x, \\ v_y = \left(\frac{1}{\kappa+2}\, v_x^{\kappa+1} - u_x\right) v_x. \end{cases}$$

  - $\kappa = 0$: J.-H. Chang, M.-H. Tu, 2000;
  - $\kappa = 1$: B.G. Konopelchenko, L. Martinez Alonso, 2003.
  - M.V. Pavlov, 2006

$$v_{yy} = v_{tx} - \kappa\,(v_y\, v_x^{-1} + v_x^{\kappa})\, v_{xy}$$
$$+((\kappa+1)\, v_y^2\, v_x^{-2} - v_t\, v_x^{-1} + \kappa\, v_x^{\kappa}\, v_y + \frac{(\kappa+1)^2}{2\kappa+3}\, v_x^{2(\kappa+1)})\, v_{xx}$$

- $\kappa \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} v_t = \left(\frac{1}{2}\,(\kappa+1)\, u_x^2 - u_y\right) v_x, \\ v_y = -u_x\, v_x. \end{cases}$$

$$v_{yy} = v_{tx} + ((\kappa+1)\, v_y^2\, v_x^{-2} - v_t\, v_x^{-1})\, v_{xx} - \kappa\, v_y\, v_x^{-1}\, v_{xy},$$

Уравнение rmdKP

- $\kappa = -2$:

$$\begin{cases} v_t = -v_x^{-1} - u_x - \left(\frac{1}{2}\, u_x^2 + u_y\right)\, v_x, \\ v_y = \ln|v_x| - u_x\, v_x \end{cases}$$

$$v_{yy} = v_{tx} + 2\left(\ln|v_x| + v_y\right) v_x^{-1}\, v_{xy}$$
$$-\left(v_t v_x + \ln|v_x|\left(\ln|v_x| - 2\, v_y + 1\right) + v_y^2 - v_y + 1\right) v_x^{-2}\, v_{xx}$$

- $\kappa = -\frac{3}{2}$:

$$\begin{cases} v_t = -\left(\frac{1}{4}\, u_x^2 + u_y\right)\, v_x - u_x\, \sqrt{|v_x|} + \ln|v_x|, \\ v_y = -u_x\, v_x + 2\, \sqrt{|v_x|} \end{cases}$$

$$v_{yy} = v_{tx} + \frac{3}{2}\left(v_y - 2\,|v_x|^{1/2}\right) v_x^{-1}\, v_{xy}$$
$$+\left(v_x\left(\ln|v_x| - v_t - \frac{1}{2}\, v_y^2\right) + 3\, v_y\, |v_x|^{1/2} - 4\right) v_x^{-2}\, v_{xx}$$

Уравнение rmdKP

- $\kappa = -3$:

$$\begin{cases} v_t = -u - \left(u_x^2 + u_y\right) v_x, \\ v_y = -v_x\, u_x - x \end{cases}$$

$$u = \left(v_y + v_x\, v_{tx} + 3\left(v_y + x\right) v_{xy} + x - v_x\, v_{yy}\right) v_{xx}^{-1} - v_t \\ -2\left(v_y + x\right)^2 v_x^{-1}$$

Уравнение rmdKP

- $\kappa = -1$:

$$\begin{cases} v_t = -\left(u_y - \lambda\, u_x - \lambda^2\right)\, v_x, \\ v_y = -(u_x - \lambda)\, v_x, \end{cases}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ — неустранимый параметр

M. Dunajski, 2004

$$v_{yy} = v_{tx} - (v_t + \lambda\, v_y)\, v_x^{-1}\, v_{xx} + (v_y + \lambda\, v_x)\, v_x^{-1}\, v_{xy}$$

- $\kappa = -1$:

$$\begin{cases} v_t = -\left(u_y - v\, u_x - v^2\right)\, v_x, \\ v_y = -(u_x - v)\, v_x, \end{cases}$$

$$v_{yy} = v_{tx} - (v_t + v\, v_y)\, v_x^{-1}\, v_{xx} + (v_y + v\, v_x)\, v_x^{-1}\, v_{xy}$$

Уравнение rmdKP

$\kappa = 0$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}_2 \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & & \mathcal{E}_3 \arrow[dl, leftrightarrow] \\
& \mathcal{E}_1 \arrow[d, leftrightarrow] & \\
& \mathcal{E}_0 &
\end{tikzcd}$$

$\kappa \notin \{-3, 0\}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}_2 \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & & \mathcal{E}_3 \arrow[dl, leftrightarrow] \\
& \mathcal{E}_1 &
\end{tikzcd}$$

$\kappa = -3$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}_2 \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & & \mathcal{E}_3 \arrow[dl, leftrightarrow] \\
& \mathcal{E}_1 \arrow[r, leftrightarrow] & \mathcal{E}_4
\end{tikzcd}$$

Уравнение rmdKP

$$
\begin{tikzcd}
 & ? \arrow[d, dotted] & ? \arrow[d, dotted] & \\
? \arrow[r, dotted] & \mathcal{E}_2 \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & & \mathcal{E}_3 \arrow[l, dotted] \arrow[dl, leftrightarrow] & ? \arrow[l, dotted] \\
 & & \mathcal{E}_1 & &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_1\colon\quad & u_{yy} = u_{tx} + \left(\tfrac{1}{2}\,(\kappa+1)\,u_x^2 + u_y\right)\,u_{xx} + \kappa\,u_x\,u_{xy} \\
\mathcal{E}_2\colon\quad & w_{yy} = w_{tx} + \left((\kappa+1)\,w_y^2\,w_x^{-2} - w_t\,w_x^{-1}\right)w_{xx} - \kappa\,w_y\,w_x^{-1}\,w_{xy}, \\
\mathcal{E}_3\colon\quad & v_{yy} = v_{tx} - \kappa\left(v_y\,v_x^{-1} + v_x^{\kappa}\right)v_{xy} \\
& \qquad + \left((\kappa+1)\,v_y^2\,v_x^{-2} - v_t\,v_x^{-1} + \kappa\,v_x^{\kappa}\,v_y + \tfrac{(\kappa+1)^2}{2\kappa+3}\,v_x^{2(\kappa+1)}\right)v_{xx}
\end{aligned}
$$

Уравнение rmdKP

$\mathcal{E}_3$: дважды модифицированное уравнение dKP, M.V. Pavlov, 2006, 2010

$\kappa \notin \{-2, -3/2, -1\}$

$$u_{yy} = u_{tx} - \kappa \left(\frac{u_y}{u_x} + u_x^{\kappa} \right) u_{xy} + \left((\kappa+1) \frac{u_y^2}{u_x^2} - \frac{u_t}{u_x} + \kappa\, u_x^{\kappa}\, u_y + \frac{(\kappa+1)^2}{2\kappa+3}\, u_x^{2(\kappa+1)} \right) u_{xx}$$

Три контактные интегрируемые расширения:

1) $\mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_3$

Уравнение rmdKP

2)

$$v_t = \frac{(\kappa+2)^2}{2\,\kappa+3}\, v_x^{2\,\kappa+3} - (\kappa+2)\left(\frac{u_y}{u_x} + u_x^{\kappa+1}\right) v_x^{\kappa+2}$$

$$+ \left(\frac{u_t}{u_x} + (\kappa+2)\, u_x^{\kappa} u_y + \frac{(\kappa+1)(\kappa+2)}{2\,\kappa+3}\, u_x^{2\,\kappa+2}\right) v_x$$

$$v_y = -v_x^{\kappa+2} + \left(\frac{u_y}{u_x} + u_x^{\kappa+1}\right) v_x$$

Исключим $u \Longrightarrow$ то же самое уравнение для v.

Уравнение rmdKP

3)

$$w_t = \left(\frac{u_t}{u_x} - (\kappa+1)(\kappa+2)\, u_x^{\kappa} \left(u_y - \frac{u_x^{\kappa+2}}{2\,\kappa+3}\right)\right) w_x$$

$$w_y = \left(\frac{u_y}{u_x} - (\kappa+1)\, u_x^{\kappa+1}\right) w_x$$

Исключим u:

$$u_t = \left(\frac{w_t}{w_x} + (\kappa+1)(\kappa+2) \left(\frac{w_y}{w_x}\, u_x^{\kappa+1} + \frac{(\kappa+2)(2\kappa+1)}{2\kappa+3}\, u_x^{2\kappa+2}\right)\right) u_x$$

$$u_y = \left(\frac{w_y}{w_x} + (\kappa+1)\, u_x^{\kappa+1}\right) u_x$$

Условие совместности: $(u_t)_y - (u_y)_t =$

$$= -(\kappa+1)(\kappa+2)\, u_x^{\kappa+2} w_x^{-2} \left(G\, w_x - \kappa\,(\kappa+2)\, u_x^{\kappa+1} \left(w_y\, w_{xx} - w_x\, w_{xy}\right)\right) = 0,$$

$$G = w_{yy} - w_{tx} - \left((\kappa+1)\,\frac{w_y^2}{w_x^2} - \frac{w_t}{w_x}\right) w_{xx} + \kappa\,\frac{w_y}{w_x}\, w_{xy}$$

Уравнение rmdKP

$\kappa = 0 \Longrightarrow \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_3$

$\kappa \notin \{-2, -3/2, -1, 0\} \Longrightarrow$

$u_x^{\kappa+1} = H$, где $H = -\kappa^{-1}(\kappa+2)^{-2}\, G\, w_x\, (w_y\, w_{xx} - w_x\, w_{xy})^{-1}$,
при этом

$$\begin{aligned}
&\kappa\,(2\kappa+3)\, w_x^2\, H_t - \kappa\,(\kappa+2)\, w_x\, \big(2(\kappa+2)(2\kappa+1)\, w_x H + (2\kappa+3)\, w_y\big)\, H_y \\
&\quad + \kappa\, \big((\kappa+1)(\kappa+2)^2(2\kappa+1)\, w_x^2\, H^2 + 2(\kappa+2)(2\kappa+1)\, w_x w_y H \\
&\quad - (2\kappa+3)(w_t w_x - (\kappa+2)\, w_y^2)\big)\, H_x - (\kappa+1)\, \big((2\kappa^2+5\kappa+1)\, w_x G \\
&\quad + \kappa(2\kappa+3)(w_x w_{tx} - w_t w_{xx})\big)\, H - (2\kappa+3)\, w_y\, G = 0
\end{aligned}$$

Уравнение rmdKP

$\kappa = 0$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}_2 \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & & \mathcal{E}_3 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dl, leftrightarrow] & \mathcal{E}_3 \\
& \mathcal{E}_1 \arrow[d, leftrightarrow] & & \\
& \mathcal{E}_0 & &
\end{tikzcd}$$

r-mdKP equation

$\kappa \notin \{-3, -2, -3/2, -1, 0\}$:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{E}_5 \arrow[d, leftrightarrow] & \\
\mathcal{E}_2 \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \mathcal{E}_3 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & \mathcal{E}_3 \\
 & \mathcal{E}_1 &
\end{tikzcd}$$

r-mdKP equation

$\kappa = -3$:

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{E}_5 \arrow[d, leftrightarrow] & \\
\mathcal{E}_2 \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & & \mathcal{E}_3 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dl, leftrightarrow] & \mathcal{E}_3 \\
 & \mathcal{E}_1 \arrow[r, leftrightarrow] & \mathcal{E}_4 &
\end{tikzcd}$$