

Контактные интегрируемые расширения псевдогрупп симметрий уравнений rdDym и mmdKP

О.И. Морозов

МГТУ ГА

доклад на семинаре
по геометрии дифференциальных уравнений,
Независимый Московский Университет,
20 октября 2010 г.

Псевдогруппы Ли

Псевдогруппа \mathfrak{G} на многообразии M — совокупность локальных диффеоморфизмов $\Phi: \mathcal{U} \rightarrow \hat{\mathcal{U}}$, $\Phi: x \mapsto \hat{x}$, такая что

- 1) если $\Phi \in \mathfrak{G}$, $\Psi \in \mathfrak{G}$, и $\Psi \circ \Phi$ определено, то $\Psi \circ \Phi \in \mathfrak{G}$;
- 2) $\Phi \in \mathfrak{G} \Rightarrow \Phi^{-1} \in \mathfrak{G}$;
- 3) $\text{id}_M \in \mathfrak{G}$.

Псевдогруппа \mathfrak{G} называется псевдогруппой Ли, если

- 4) функции $\hat{x} = \Phi(x)$ являются локальными аналитическими решениями системы ДУ (уравнения Ли псевдогруппы \mathfrak{G})

$$R \left(x, \Phi(x), \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{\#I} \Phi(x)}{\partial x^I} \right) = 0.$$

Формы Маурера–Картана псевдогруппы \mathfrak{G} : совокупность форм

$$\omega^i \in \Omega^1(M \times N \times H), \quad i \in \{1, \dots, \dim M + \dim N\},$$

где N — многообразие, H — конечная группа Ли.

Локальный диффеоморфизм Φ на M , $\Phi: \mathcal{U} \rightarrow \hat{\mathcal{U}}$, принадлежит \mathfrak{G} тогда и только тогда, когда существует послойный диффеоморфизм Ψ на $M \times N \times H$, $\Psi: \mathcal{W} \rightarrow \hat{\mathcal{W}}$, такой что

- Φ является проекцией Ψ относительно $M \times N \times H \rightarrow M$;
- $\Psi^*(\omega^i|_{\hat{\mathcal{W}}}) = \omega^i|_{\mathcal{W}}$.

Псевдогруппы Ли

Структурные уравнения псевдогруппы Ли \mathfrak{G} :

$$d\omega^i = A_{\alpha j}^i(U^\sigma) \pi^\alpha \wedge \omega^j + B_{jk}^i(U^\sigma) \omega^j \wedge \omega^k, \quad B_{jk}^i = -B_{kj}^i,$$

$$dU^\kappa = C_j^\kappa(U^\sigma) \omega^j,$$

$U^\sigma: M \rightarrow \mathbb{R}$, $\sigma \in \{1, \dots, s\}$, $s < \dim M$, — инварианты псевдогруппы \mathfrak{G} ,

$$\Phi^*(U^\kappa|_{\tilde{\mathcal{U}}}) = U^\kappa|_U,$$

- π^α — зависят от координат на H ;
- выполнены условия инволютивности;
- выполнены условия совместности.

Условия инволютивности:

$$r^{(1)} = n \dim H - \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \sigma_k,$$

где $n = \dim M + \dim N$, $r^{(1)}$ — размерность линейного пространства коэффициентов z_j^α , таких что замена $\pi^\alpha \mapsto \pi^\alpha + z_j^\alpha \omega^j$ не меняет структурные уравнения;

$$\sigma_k = \max_{u_1, \dots, u_k} \operatorname{rank} \mathbb{A}_k(u_1, \dots, u_k) - \sum_{j=1}^{k-1} \sigma_j,$$

$$\mathbb{A}_1(u_1) = \left(A_{\alpha j}^i u_1^j \right),$$

$$\mathbb{A}_q(u_1, \dots, u_q) = \left(\begin{array}{c} \mathbb{A}_{q-1}(u_1, \dots, u_{q-1}) \\ A_{\alpha j}^i u_q^j \end{array} \right), q \in \{2, \dots, n-1\}.$$

Условия совместности:

- $d(d\omega^i) = 0 = d(A_{\alpha j}^i \pi^\alpha \wedge \omega^j + B_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k)$
- $d(dU^\kappa) = 0 = d(C_j^\kappa \omega^j)$

\implies

- переопределенная система на коэффициенты $A_{\alpha j}^i, B_{jk}^i, C_j^\kappa$;
- $d\pi^\alpha = W_{\lambda j}^\alpha \chi^\lambda \wedge \omega^j + X_{\beta\gamma}^\alpha \pi^\beta \wedge \pi^\gamma + Y_{\beta j}^\alpha \pi^\beta \wedge \omega^j + Z_{jk}^\alpha \omega^j \wedge \omega^k$.

Псевдогруппы Ли

ТЕОРЕМА (Третья фундаментальная теорема Ли в форме Картана): Для любой псевдогруппы Ли существует совокупность ее форм Маурера–Картана с инволютивными и совместными структурными уравнениями.

ТЕОРЕМА (Третья обратная фундаментальная теорема Ли в форме Картана): Для данной инволютивной и совместной системы структурных уравнений существует совокупность 1-форм $\omega^1, \dots, \omega^n$ и функций U^1, \dots, U^s , удовлетворяющих этой системе. Формы $\omega^1, \dots, \omega^m$ являются формами Маурера–Картана некоторой псевдогруппы Ли, а функции U^1, \dots, U^s являются ее инвариантами.

- Cartan É. Œuvres Complètes. Paris: Gauthier - Villars, 1953
- Васильева М.В. Структура бесконечных групп Ли преобразований. М.: МГПИ, 1972
- Stormark O. Lie's Structural Approach to PDE Systems. Cambridge: CUP, 2000

Псевдогруппы симметрий дифференциальных уравнений

Формы Маурера–Картана псевдогруппы контактных преобразований $\text{Cont}(J^2(\pi))$:

$$\Theta_0 = a(du - u_i dx^i),$$

$$\Theta_i = a B_i^j (du_j - u_{jk} dx^k) + g_i \Theta_0,$$

$$\Theta_{ij} = a B_i^k B_j^l (du_{kl} - u_{klm} dx^m) + s_{ij} \Theta_0 + w_{ij}^k \Theta_k,$$

$$\Xi^i = b_j^i dx^j + c^i \Theta_0 + f^{ij} \Theta_j,$$

$$\text{где } b_k^i B_j^k = \delta_j^i, \quad f^{ik} = f^{ki}, \quad s_{ij} = s_{ji}, \quad w_{ij}^k = w_{ji}^k,$$

$$u_{klm} = u_{lkm} = u_{kml}.$$

Структурные уравнения

$$d\Theta_0 = \Phi_0^0 \wedge \Theta_0 + \Xi^i \wedge \Theta_i,$$

$$d\Theta_i = \Phi_i^0 \wedge \Theta_0 + \Phi_i^k \wedge \Theta_k + \Xi^k \wedge \Theta_{ik},$$

$$d\Theta_{ij} = \Phi_i^k \wedge \Theta_{kj} - \Phi_0^0 \wedge \Theta_{ij} + \Upsilon_{ij}^0 \wedge \Theta_0 + \Upsilon_{ij}^k \wedge \Theta_k + \Xi^k \wedge \Theta_{ijk},$$

$$d\Xi^i = \Phi_0^0 \wedge \Xi^i - \Phi_k^i \wedge \Xi^k + \Psi^{i0} \wedge \Theta_0 + \Psi^{ik} \wedge \Theta_k$$

Псевдогруппы симметрий дифференциальных уравнений

- ДУ второго порядка: $\iota: \mathcal{E} \rightarrow J^2(\pi)$
- Контактные симметрии \mathcal{E} — контактные преобразования на $J^2(\pi)$, отображающие \mathcal{E} на себя:
 $\text{Cont}(\mathcal{E}) \subset \text{Cont}(J^2(\pi))$,
- Формы Маурера – Картана псевдогруппы $\text{Cont}(\mathcal{E})$ могут быть получены из ограничений $\theta_0 = \iota^* \Theta_0$, $\theta_i = \iota^* \Theta_i$, $\theta_{ij} = \iota^* \Theta_{ij}$, $\xi^i = \iota^* \Xi^i$ форм Маурера – Картана псевдогруппы $\text{Cont}(J^2(\pi))$ на \mathcal{E} с помощью алгоритмических процедур метода эквивалентности Картана
- Подробности:
 - M. Fels, P.J. Olver. Moving coframes I. A practical algorithm. // Acta Appl. Math., 1998, Vol. 51, pp. 161–213
 - O.I. Morozov. Moving coframes and symmetries of differential equations. // J. Phys. A: Math. Gen., 2002, Vol. 35, pp. 2965 – 2977

Контактные интегрируемые расширения

Bryant R.L., Griffiths P.A. Characteristic Cohomology of Differential Systems (II): Conservation Laws for a Class of Parabolic Equations // Duke Math. J., **78**, 531–676 (1995):

$n = 2$, конечномерные накрытия

Контактные интегрируемые расширения

Определение 1. Пусть

$$d\omega^i = A_{\alpha j}^i(U^\sigma) \pi^\alpha \wedge \omega^j + B_{jk}^i(U^\sigma) \omega^j \wedge \omega^k, \quad (1)$$

$$dU^\kappa = C_j^\kappa(U^\sigma) \omega^j \quad (2)$$

— структурные уравнения некоторой псевдогруппы Ли \mathfrak{G} . Тогда система уравнений

$$d\tau^q = D_{\rho r}^q(U^\sigma, V^\epsilon) \eta^\rho \wedge \tau^r + E_{rs}^q(U^\sigma, V^\epsilon) \tau^r \wedge \tau^s + F_{r\beta}^q(U^\sigma, V^\epsilon) \tau^r \wedge \pi^\beta$$

$$+ G_{rj}^q(U^\sigma, V^\epsilon) \tau^r \wedge \omega^j + H_{\beta j}^q(U^\sigma, V^\epsilon) \pi^\beta \wedge \omega^j + I_{jk}^q(U^\sigma, V^\epsilon) \omega^j \wedge \omega^k, \quad (3)$$

$$dV^\epsilon = J_j^\epsilon(U^\sigma, V^\epsilon) \omega^j + K_q^\epsilon(U^\sigma, V^\epsilon) \tau^q, \quad (4)$$

с неизвестными 1-формами τ^q , $q \in \{1, \dots, Q\}$, η^ρ , $\rho \in \{1, \dots, R\}$, и неизвестными функциями V^ϵ , $\epsilon \in \{1, \dots, S\}$, $Q, R, S \in \mathbb{N}$, называется **интегрируемым расширением** системы (1), (2), если уравнения (1) – (4) одновременно являются инволютивными и совместными.

Контактные интегрируемые расширения

Пусть система (3), (4) — интегрируемое расширение системы (1), (2). Тогда система (1)–(4) определяет псевдогруппу Ли \mathfrak{H} , которая является расширением псевдогруппы \mathfrak{G} .

Определение 2. Интегрируемое расширение (3), (4) называется **тривиальным**, если существует замена переменных на многообразии действия псевдогруппы \mathfrak{H} , такая что в новых переменных уравнения (3), (4) не содержат форм ω^j , π^β , и коэффициенты уравнений (3), (4) не зависят от функций U^q . В противном случае интегрируемое расширение называется **нетривиальным**.

Пусть θ_K^α , ξ^j — формы Маурера–Картана псевдогруппы симметрий $\text{Cont}(\mathcal{E})$ некоторого ДУ \mathcal{E} , причем θ_K^α — контактные формы (их ограничения на каждое решение уравнения \mathcal{E} равны 0), и ξ^j — горизонтальные формы ($\xi^1 \wedge \dots \wedge \xi^n \neq 0$ на любом решении).

Контактные интегрируемые расширения

Определение 3. Нетривиальное интегрируемое расширение структурных уравнений псевдогруппы $\text{Cont}(\mathcal{E})$

$$d\omega^q = \Pi_r^q \wedge \omega^r + \xi^j \wedge \Omega_j^q \quad (5)$$

называется **контактным интегрируемым расширением**, если

- $\Omega_j^q \equiv 0 \pmod{\theta_I^\alpha, \omega_i^r}$ для некоторой совокупности дополнительных форм ω_j^q ;
- $\Omega_j^q \not\equiv 0 \pmod{\omega_i^r}$ для некоторых q, j
- коэффициенты разложений Ω_j^q по $\{\theta_I^\alpha, \omega_i^r\}$ и Π_r^q по $\{\theta_I^\alpha, \xi^j, \omega^r, \omega_i^r\}$ зависят от инвариантов $\text{Cont}(\mathcal{E})$ и, возможно, от некоторых дополнительных функций W^ρ , $\rho \in \{1, \dots, \Lambda\}$, $\Lambda \geq 1$. В последнем случае существуют функции $P_\alpha^{I\rho}$, Q_q^ρ , $R_q^{j\rho}$, S_j^ρ , такие что

$$dW^\rho = P_\alpha^{I\rho} \theta_I^\alpha + Q_q^\rho \omega^q + R_q^{j\rho} \omega_j^q + S_j^\rho \xi^j,$$

и эти уравнения удовлетворяют условию совместности.

Уравнение rdDym

r-ое бездисперсионное (2+1)-мерное уравнение Дима (rdDym)
(M. Błaszak, 2002):

$$u_{ty} = u_x u_{xy} + \kappa u_y u_{xx}, \quad \kappa \neq 0$$

специальные случаи:

- $\kappa = 1$: бездисперсионное уравнение Новикова–Веселова
B.G. Konopelchenko, A. Moro, 2004
- $\kappa = \frac{1}{2}$:
E.V. Ferapontov, K.R. Khusnutdinova, S.P. Tsarev, 2004
- $\kappa = 2$:
E.V. Ferapontov, A. Moro, V.V. Sokolov, 2007
- $\kappa \neq -2$:
M.V. Pavlov, 2006
- $\kappa = -1$:
V.Yu. Ovsienko, 2008, гамильтонова система на расширении
группы Вирасоро

Структурные уравнения псевдогруппы симметрий

$$d\theta_0 = \eta_1 \wedge \theta_0 + \xi_1 \wedge \theta_1 + \xi_2 \wedge \theta_2 + \xi_3 \wedge \theta_3,$$

$$\begin{aligned} d\theta_1 = & 2 \eta_1 \wedge \theta_1 - \left(\theta_{22} + \frac{1}{2} U (2\kappa - 1) \kappa^{-1} \xi_3 \right) \wedge \theta_0 - (2\theta_{23} - (U+2)\theta_3 \\ & + \frac{1}{2} (3U-2) \xi_2 - 2V\xi_3) \wedge \theta_1 + \xi_1 \wedge \theta_{11} + \xi_2 \wedge \theta_{12} + \xi_3 \wedge \theta_{22}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\theta_2 = & \eta_1 \wedge \theta_2 + \eta_2 \wedge \theta_0 - \left(\theta_{23} - \frac{1}{2} (U+2) \theta_3 + \xi_1 - \xi_2 - V \xi_3 \right) \wedge \theta_2 \\ & + \xi_1 \wedge \theta_{12} + \xi_2 \wedge \theta_{22} + \xi_3 \wedge \theta_{23}, \end{aligned}$$

$$d\theta_3 = \xi_1 \wedge (\kappa^{-1} \theta_2 + \theta_{22}) + \xi_2 \wedge (\theta_{23} - \frac{1}{2} (U+2) \theta_3) + \xi_3 \wedge \theta_{33},$$

$$d\xi_1 = \xi_1 \wedge (\eta_1 + (U+2) \theta_3 - 2\theta_{23} - \frac{1}{2} (3U-4) \xi_2 + 2V\xi_3),$$

$$d\xi_2 = \kappa^{-1} \xi_1 \wedge (\frac{1}{2} U \theta_0 - \theta_2 + \kappa \xi_2 - \xi_3) + \xi_2 \wedge (\frac{1}{2} (U+2) \theta_3 - \theta_{23} + V \xi_3)$$

$$d\xi_3 = (\eta_1 + \theta_3 + \frac{1}{2} (U+2) \xi_2) \wedge \xi_3,$$

...

Инварианты и их дифференциалы:

$$U = \frac{u_y u_{xxy}}{u_{xy}^2}, \quad V = \frac{u_y u_{xxx}}{u_{xy}^4} (u_{xy} u_{yy} - u_y u_{xyy}),$$

$$dU = 2\eta_2 - \frac{1}{2}\kappa^{-1}UV\theta_0 + \frac{1}{2}U(U+2)\theta_3 - (U+2)\xi_1 \\ - \frac{1}{2}\kappa^{-1}U(\kappa U - 2\kappa + 2)\xi_2 + UV\xi_3 - U\theta_{23},$$

$$dV = \eta_6 - V\eta_1 + \frac{1}{2}V(U-2)\theta_3 + \kappa^{-1}(2\kappa V - 2U + 1)\xi_1 \\ - \frac{1}{2}V(U+4)\xi_2 + \frac{1}{2}(U+2)\theta_{33}.$$

Уравнение rdDym

Контактные интегрируемые расширения псевдогруппы симметрий уравнения rdDym в простейшей форме

$$d\omega_0 = \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{k=0}^3 F_{jk} \theta_k + G_j \omega_1 \right) \wedge \xi^j + \\ \left(\sum_{i=0}^3 A_i \theta_i + \sum_{i,j=1}^3 B_{ij} \theta_{ij} + \sum_{s=1}^7 C_s \eta_s + \sum_{j=1}^3 D_j \xi^j + E \omega_1 \right) \wedge \omega_0$$

- Тип 1: коэффициенты зависят от U, V ;
- Тип 2: коэффициенты также зависят от одного дополнительного инварианта W ,

$$dW = \sum_{i=0}^3 H_i \theta_i + \sum_{i,j=1}^3 I_{ij} \theta_{ij} + \sum_{s=1}^7 J_s \eta_s + \sum_{j=1}^3 K_j \xi^j + \sum_{q=0}^1 L_q \omega_q.$$

Уравнение rdDym

Расширений первого типа нет. Каждое расширение второго типа контактно эквивалентно следующему:

$$d\omega_0 = \left(\theta_{23} - \frac{1}{2}(U+2)\theta_3 - \kappa^{-1}W^{-1}(\kappa(U+VW-1)-1)\xi^3 + \omega_1 \right. \\ \left. + (1-W(U-1))\xi^1 \right) \wedge \omega_0 + \frac{1}{2}\kappa^{-1}(U\theta_0 - 2\theta_2 + 2\kappa W\omega_1) \wedge \xi^1 \\ + \omega_1 \wedge \xi^2 + W^{-1}(\omega_1 + \kappa^{-1}\theta_3) \wedge \xi^3,$$

$$dW = -(\kappa+1)W\omega_1 + (\kappa W(1-U) - \frac{1}{2}UW + Z)\omega_0 + W(\eta_1 - \theta_{23}) \\ + \frac{1}{2}W(U+2)\theta_3 + Z\xi^2 + (VW + \frac{1}{2}U + W^{-1}Z - 2 - \kappa^{-1})\xi^3 \\ + W(Z - W - 1 + \frac{1}{2}UW)\xi^1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1: $\kappa = -1, Z = -\frac{1}{2}W(U-2) \implies$

- 1) условие совместности выполнено тождественно;
- 2) неустранимый параметр.

ЗАМЕЧАНИЕ 2: $\kappa = -1, Z \neq -\frac{1}{2}W(U-2) \implies$

условие совместности выполнено.

Уравнение rdDym

Третья обратная фундаментальная теорема \Rightarrow

$\kappa \notin \{-2, -1, 0\}$:

$$\omega_0 = \frac{u_{xy}}{u_y v_x} \left(dv - \left(u_x v_x + \frac{\kappa}{\kappa+2} v_x^{\kappa+2} \right) dt - v_x dx + \frac{1}{\kappa} u_y v_x^{-\kappa} dy \right),$$

$$W = u_{xy}^2 u_y^{-2} u_{xxx}^{-1} v_x^{\kappa+1}.$$

$\kappa = -2$:

$$\omega_0 = \frac{u_{xy}}{u_y v_x} \left(dv - (u_x v_x - 2 \ln |v_x|) dt - v_x dx - \frac{1}{2} u_y v_x^2 dy \right),$$

$$W = u_{xy}^2 u_y^{-2} u_{xxx}^{-1} v_x^{-1}.$$

Уравнение rdDym

$\kappa = -1, Z \neq -\frac{1}{2} W(U - 2)$:

$$\omega_0 = \frac{u_{xy}}{u_y v_x} \left(dv - (u_x - v) v_x dt - v_x dx - u_y v^{-1} v_x dy \right),$$

$$W = u_{xy}^2 u_y^{-2} u_{xxx}^{-1} v.$$

$\kappa = -1, Z = -\frac{1}{2} W(U - 2)$:

$$\omega_0 = \frac{u_{xy}}{u_y v_x} \left(dv - (u_x - \lambda) v_x dt - v_x dx - \lambda^{-1} u_y v_x dy \right),$$

$$W = \lambda u_{xy}^2 u_y^{-2} u_{xxx}^{-1}.$$

Уравнение rdDym

- $\kappa \notin \{-2, -1, 0\}$:

$$\begin{cases} v_t = u_x v_x + \frac{1}{\kappa+2} v_x^{\kappa+2}, \\ v_y = -u_y v_x^{-\kappa}. \end{cases}$$

- M.V. Pavlov, 2006

$$v_{ty} = \frac{1}{\kappa+2} ((\kappa+1) v_t - v_x^{\kappa+2}) v_x^{-1} v_{xy} - \kappa v_y v_x^\kappa v_{xx}$$

- $\kappa = -2$:

$$\begin{cases} v_t = u_x v_x + \ln |v_x|, \\ v_y = -u_y v_x^2. \end{cases}$$

$$v_{ty} = (v_t - \ln |v_x|) v_x^{-1} v_{xy} + 2 v_y v_x^{-2} v_{xx}$$

Уравнение rdDym

- $\kappa = -1$:

$$\begin{cases} v_t = (u_x - v) v_x, \\ v_y = u_y v^{-1} v_x. \end{cases}$$

$$v_{ty} = (v_t v_x^{-1} + v) v_{xy} - v v_y v_x^{-1} v_{xx}$$

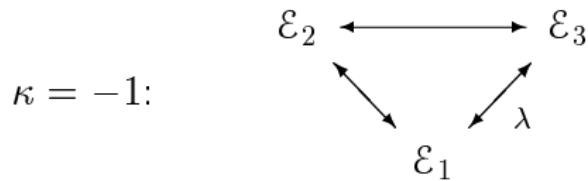
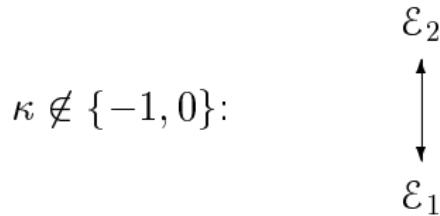
- $\kappa = -1$:

$$\begin{cases} v_t = (u_x + \lambda) v_x, \\ v_y = -\lambda^{-1} u_y v_x, \end{cases}$$

$$v_{ty} = (v_t v_x^{-1} - \lambda) v_{xy} + \lambda v_y v_x^{-1} v_{xx}$$

$\lambda \neq 0$ — неустранимый параметр,
симметрия уравнения r-dDym с $\kappa = -1$ с генератором
 $x \frac{\partial}{\partial x} + 2 u \frac{\partial}{\partial u}$ не продолжается до симметрии накрытия

Уравнение rdDym



Уравнение rmdKP

r -ое модифицированное бездисперсионное уравнение
Кадомцева–Петвиашвили (rmdKP) (M. Błaszak, 2002):

$$u_{yy} = u_{tx} + \left(\frac{1}{2} (\kappa + 1) u_x^2 + u_y \right) u_{xx} + \kappa u_x u_{xy}$$

специальные случаи:

- $\kappa = 0$: mdKP,
Г.М. Кузьмина, 1967; И.М. Кричевер, 1988;
B.A. Kupershmidt, 1990.
- $\kappa = 1$: dBKP,
N. Dasgupta, R. Chowdhury, 1992; K. Takasaki, 1993;
B.G. Konopelchenko, L. Martinez Alonso, 2003.
- $\kappa = -1$:
M.V. Pavlov, 2003; M. Dunajski, 2004; E.V. Ferapontov, K.R. Khusnutdinova, 2004; V.Yu. Ovsienko, C. Roger, 2006

Контактные интегрируемые расширения:

$\kappa \notin \{-3, -1\}$:

Первый тип:

$$\begin{aligned} d\omega_0 = & (\omega_1 + \frac{1}{2}(\eta_1 + \theta_{22}) + \frac{1}{16}(8V + \kappa^2 + 13\kappa + 12)(\kappa + 1)^{-1}\xi^3 \\ & + \frac{1}{2}((\kappa + 1)^2U - V^2 - 2(\kappa^2 + 3\kappa + 2)V)(\kappa + 1)^{-2}\xi^1) \wedge \omega_0 \\ & + (\theta_3 - V(\kappa + 1)^{-1}\theta_2 - \frac{1}{8}(\kappa - 4)\theta_0 + (\kappa + 1)^{-2}V^2\omega_1) \wedge \xi^1 \\ & + \omega_1 \wedge \xi^2 + (\theta_2 - V(\kappa + 1)^{-1}\omega_1) \wedge \xi^3. \end{aligned}$$

Второй тип:

$$\begin{aligned} d\omega_0 = & (\omega_1 + \frac{1}{2}(\theta_{22} + \eta_1 + (U - W^2 + 2(W - V))\xi^1) - \frac{1}{16}(8W - \kappa + 12)\xi^3) \\ & + (W^2\omega_1 + W\theta_2 - \frac{1}{8}(\kappa - 4)\theta_0 + \theta_3) \wedge \xi^1 + \omega_1 \wedge \xi^2 + (W\omega_1 + \theta_2) \wedge \xi^3, \\ dW = & \frac{1}{2}(2(Z_1 + 1) - \kappa(W - 1) - V)\omega_0 - (V + (\kappa + 1)W)\omega_1 + \eta_2 - \theta_2 \\ & + \frac{1}{2}W(\eta_1 - \theta_{22}) + \frac{1}{2}W(2WZ_1 - U + 4V + W(W - \kappa))\xi^1 + Z_1\xi^2 \\ & + \frac{1}{16}(W(16Z_1 + 8W - 7\kappa - 4) + 16V)\xi^3. \end{aligned}$$

$\kappa = -3$: третье контактное интегрируемое расширение

$$\begin{aligned} d\omega_0 &= \left(\frac{1}{2} (\theta_{22} + \eta_1) + \frac{1}{8} (4U - V(V + 8W - 11)) \xi^1 + \omega_1 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{16} (4V + 16W + 5) \xi^3 \right) \wedge \omega_0 + (\theta_3 - W\theta_0 + \frac{1}{2}V\theta_2 + \frac{1}{4}V^2\omega_1) \wedge \xi^1 \\ &\quad + \omega_1 \wedge \xi^2 + (\theta_2 + \frac{1}{2}V\omega_1) \wedge \xi^3 \\ dW &= \left(Z + \frac{3}{2}W + \frac{21}{16} \right) \omega_0 + \left(W + \frac{7}{8} \right) (\omega_1 - \theta_{22}) + Z\xi^2 \\ &\quad - \left(U \left(W + \frac{7}{8} \right) + V \left(W^2 - \frac{203}{64} \right) - \frac{1}{32}V^2(8Z + 7) \right) \xi^1 \\ &\quad + \frac{1}{64} (32V(Z + W) - 16W(4W + 3) + 7(4V + 1)) \xi^3. \end{aligned}$$

$\kappa = -1$: одно контактное интегрируемое расширение второго типа

$$\begin{aligned} d\omega_0 &= \left(\frac{1}{2} (\theta_{22} + \eta_1 + (U - W^2 + 2W) \xi^1) - \frac{1}{16} (8W - 11) \xi^3 + \omega_1 \right) \wedge \omega_0 \\ &\quad + (\theta_3 + \frac{5}{8} \theta_0 + W \theta_2 + W^2 \omega_1) \wedge \xi^1 + \omega_1 \wedge \xi^2 + (\theta_2 + W \omega_1) \wedge \xi^3, \\ dW &= \frac{1}{2} (2Z + W + 1) \omega_0 - \theta_2 - \frac{1}{2} W (\theta_{22} + \eta_1) + \eta_2 + \frac{1}{16} W (16Z + 8W + 3) \xi^3 \\ &\quad + Z \xi^2 + \frac{1}{2} (W^2 (2Z + 1) + W (W^2 - U)) \xi^1 \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1: $2Z + W + 1 = 0 \Rightarrow$ неустранимый параметр.

ЗАМЕЧАНИЕ 2: $2Z + W + 1 \neq 0 \Rightarrow$ условие совместности выполнено.

Уравнение rmdKP

- $\kappa \notin \{-2, -\frac{3}{2}, -1\}$:

$$\begin{cases} v_t = \left(\frac{1}{2\kappa+3} v_x^{2(\kappa+1)} - u_x v_x^{\kappa+1} + \left(\frac{1}{2} (\kappa+1) u_x^2 - u_y \right) v_x \right), \\ v_y = \left(\frac{1}{\kappa+2} v_x^{\kappa+1} - u_x \right) v_x. \end{cases}$$

- $\kappa = 0$: J.-H. Chang, M.-H. Tu, 2000;
- $\kappa = 1$: B.G. Konopelchenko, L. Martinez Alonso, 2003.
- M.V. Pavlov, 2006

$$v_{yy} = v_{tx} - \kappa (v_y v_x^{-1} + v_x^\kappa) v_{xy} + ((\kappa+1) v_y^2 v_x^{-2} - v_t v_x^{-1} + \kappa v_x^\kappa v_y + \frac{(\kappa+1)^2}{2\kappa+3} v_x^{2(\kappa+1)}) v_{xx}$$

- $\kappa \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} v_t = \left(\frac{1}{2} (\kappa+1) u_x^2 - u_y \right) v_x, \\ v_y = -u_x v_x. \end{cases}$$

$$v_{yy} = v_{tx} + ((\kappa+1) v_y^2 v_x^{-2} - v_t v_x^{-1}) v_{xx} - \kappa v_y v_x^{-1} v_{xy},$$

Уравнение rmdKP

- $\kappa = -2$:

$$\begin{cases} v_t = -v_x^{-1} - u_x - \left(\frac{1}{2} u_x^2 + u_y\right) v_x, \\ v_y = \ln |v_x| - u_x v_x \end{cases}$$

$$v_{yy} = v_{tx} + 2 (\ln |v_x| + v_y) v_x^{-1} v_{xy} \\ - (v_t v_x + \ln |v_x| (\ln |v_x| - 2 v_y + 1) + v_y^2 - v_y + 1) v_x^{-2} v_{xx}$$

- $\kappa = -\frac{3}{2}$:

$$\begin{cases} v_t = - \left(\frac{1}{4} u_x^2 + u_y \right) v_x - u_x \sqrt{|v_x|} + \ln |v_x|, \\ v_y = -u_x v_x + 2 \sqrt{|v_x|} \end{cases}$$

$$v_{yy} = v_{tx} + \frac{3}{2} (v_y - 2 |v_x|^{1/2}) v_x^{-1} v_{xy} \\ + (v_x (\ln |v_x| - v_t - \frac{1}{2} v_y^2) + 3 v_y |v_x|^{1/2} - 4) v_x^{-2} v_{xx}$$

Уравнение rmdKP

- $\kappa = -3$:

$$\begin{cases} v_t = -u - (u_x^2 + u_y) v_x, \\ v_y = -v_x u_x - x \end{cases}$$

$$u = (v_y + v_x v_{tx} + 3(v_y + x)v_{xy} + x - v_x v_{yy})v_{xx}^{-1} - v_t - 2(v_y + x)^2 v_x^{-1}$$

Уравнение rmdKP

- $\kappa = -1$:

$$\begin{cases} v_t = - \left(u_y - \lambda u_x - \lambda^2 \right) v_x, \\ v_y = -(u_x - \lambda) v_x, \end{cases}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ — неустранимый параметр

M. Dunajski, 2004

$$v_{yy} = v_{tx} - (v_t + \lambda v_y) v_x^{-1} v_{xx} + (v_y + \lambda v_x) v_x^{-1} v_{xy}$$

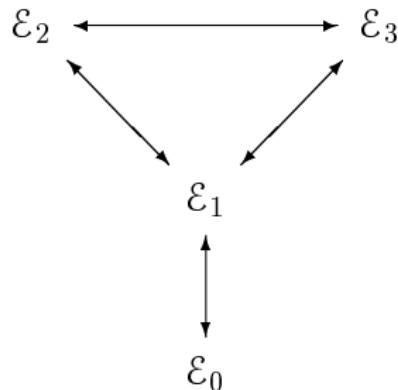
- $\kappa = -1$:

$$\begin{cases} v_t = - \left(u_y - v u_x - v^2 \right) v_x, \\ v_y = -(u_x - v) v_x, \end{cases}$$

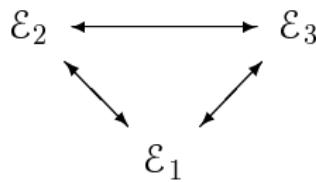
$$v_{yy} = v_{tx} - (v_t + v v_y) v_x^{-1} v_{xx} + (v_y + v v_x) v_x^{-1} v_{xy}$$

Уравнение rmdKP

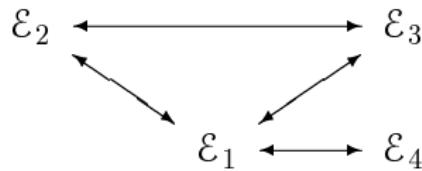
$\kappa = 0$:



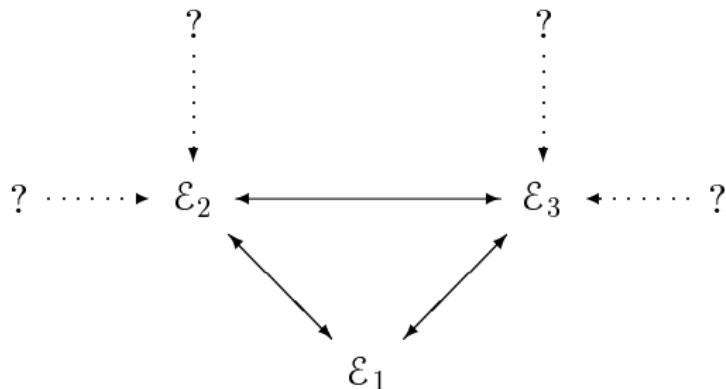
$\kappa \notin \{-3, 0\}$:



$\kappa = -3$:



Уравнение rmdKP



$$\mathcal{E}_1: \quad u_{yy} = u_{tx} + \left(\frac{1}{2} (\kappa + 1) u_x^2 + u_y \right) u_{xx} + \kappa u_x u_{xy}$$

$$\mathcal{E}_2: \quad w_{yy} = w_{tx} + ((\kappa + 1) w_y^2 w_x^{-2} - w_t w_x^{-1}) w_{xx} - \kappa w_y w_x^{-1} w_{xy},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_3: \quad v_{yy} &= v_{tx} - \kappa (v_y v_x^{-1} + v_x^\kappa) v_{xy} \\ &\quad + ((\kappa + 1) v_y^2 v_x^{-2} - v_t v_x^{-1} + \kappa v_x^\kappa v_y + \frac{(\kappa+1)^2}{2\kappa+3} v_x^{2(\kappa+1)}) v_{xx} \end{aligned}$$

\mathcal{E}_3 : дважды модифицированное уравнение dKP, M.V. Pavlov,
2006, 2010

$$\kappa \notin \{-2, -3/2, -1\}$$

$$u_{yy} = u_{tx} - \kappa \left(\frac{u_y}{u_x} + u_x^\kappa \right) u_{xy} \\ + \left((\kappa + 1) \frac{u_y^2}{u_x^2} - \frac{u_t}{u_x} + \kappa u_x^\kappa u_y + \frac{(\kappa + 1)^2}{2\kappa + 3} u_x^{2(\kappa+1)} \right) u_{xx}$$

Три контактные интегрируемые расширения:

1) $\mathcal{E}_2 \rightarrow \mathcal{E}_3$

2)

$$\begin{aligned} v_t &= \frac{(\kappa+2)^2}{2\kappa+3} v_x^{2\kappa+3} - (\kappa+2) \left(\frac{u_y}{u_x} + u_x^{\kappa+1} \right) v_x^{\kappa+2} \\ &\quad + \left(\frac{u_t}{u_x} + (\kappa+2) u_x^\kappa u_y + \frac{(\kappa+1)(\kappa+2)}{2\kappa+3} u_x^{2\kappa+2} \right) v_x \\ v_y &= -v_x^{\kappa+2} + \left(\frac{u_y}{u_x} + u_x^{\kappa+1} \right) v_x \end{aligned}$$

Исключим $u \implies$ то же самое уравнение для v .

Уравнение rmdKP

3)

$$w_t = \left(\frac{u_t}{u_x} - (\kappa + 1)(\kappa + 2) u_x^\kappa \left(u_y - \frac{u_x^{\kappa+2}}{2\kappa + 3} \right) \right) w_x$$

$$w_y = \left(\frac{u_y}{u_x} - (\kappa + 1) u_x^{\kappa+1} \right) w_x$$

Исключим w :

$$u_t = \left(\frac{w_t}{w_x} + (\kappa + 1)(\kappa + 2) \left(\frac{w_y}{w_x} u_x^{\kappa+1} + \frac{(\kappa + 2)(2\kappa + 1)}{2\kappa + 3} u_x^{2\kappa+2} \right) \right) u_x$$

$$u_y = \left(\frac{w_y}{w_x} + (\kappa + 1) u_x^{\kappa+1} \right) u_x$$

Условие совместности: $(u_t)_y - (u_y)_t =$

$$= -(\kappa+1)(\kappa+2) u_x^{\kappa+2} w_x^{-2} (G w_x - \kappa (\kappa + 2) u_x^{\kappa+1} (w_y w_{xx} - w_x w_{xy})) = 0,$$

$$G = w_{yy} - w_{tx} - \left((\kappa + 1) \frac{w_y^2}{w_x^2} - \frac{w_t}{w_x} \right) w_{xx} + \kappa \frac{w_y}{w_x} w_{xy}$$

Уравнение rmdKP

$$\kappa = 0 \implies \mathcal{E}_2 \rightarrow \mathcal{E}_3$$

$$\kappa \notin \{-2, -3/2, -1, 0\} \implies$$

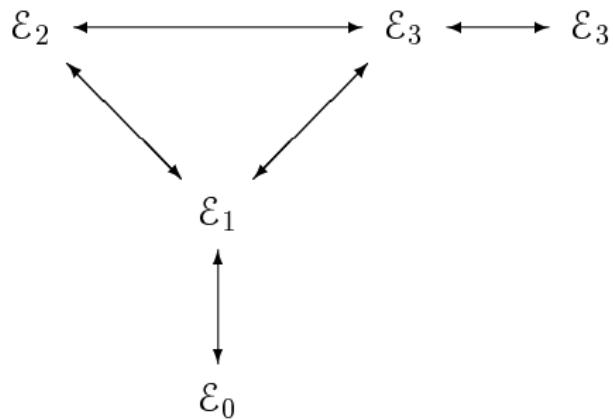
$$u_x^{\kappa+1} = H, \text{ где } H = -\kappa^{-1}(\kappa+2)^{-2} G w_x (w_y w_{xx} - w_x w_{xy})^{-1},$$

при этом

$$\begin{aligned} & \kappa(2\kappa+3) w_x^2 H_t - \kappa(\kappa+2) w_x (2(\kappa+2)(2\kappa+1) w_x H + (2\kappa+3) w_y) H_y \\ & + \kappa ((\kappa+1)(\kappa+2)^2 (2\kappa+1) w_x^2 H^2 + 2(\kappa+2)(2\kappa+1) w_x w_y H \\ & - (2\kappa+3)(w_t w_x - (\kappa+2) w_y^2)) H_x - (\kappa+1) ((2\kappa^2+5\kappa+1) w_x G \\ & + \kappa(2\kappa+3)(w_x w_{tx} - w_t w_{xx})) H - (2\kappa+3) w_y G = 0 \end{aligned}$$

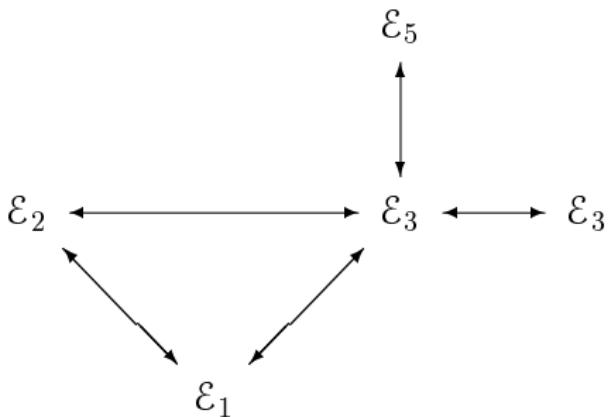
Уравнение rmdKP

$\kappa = 0$:



r-mdKP equation

$\kappa \notin \{-3, -2, -3/2, -1, 0\}$:



r-mdKP equation

$\kappa = -3$:

