# Проблема эквивалентности для обыкновенных дифференциальных уравнений второго и третьего порядков

О.И. Морозов

МГТУ ГА

Независимый Московский Университет,
11 ноября 2009

# Уравнения второго порядка

ОДУ второго порядка: подмногообразия вида

$$u_{xx} = F(x, u, u_x) \tag{1}$$

в расслоении $J^2(\pi)$ с локальными координатами $(x, u, u_x, u_{xx})$, где $\pi\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\pi\colon (x, u) \mapsto x$.

$\mathfrak{G}$ — псевдогруппа точечных преобразований — продолжение на $J^2(\pi)$ псевдогруппы локальных диффеоморфизмов на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Для диффеоморфизма $\Phi\colon (x, u) \mapsto (\widetilde{x}, \widetilde{u})$ его второе продолжение $\Phi^{(2)}\colon (x, u, u_x, u_{xx}) \mapsto (\widetilde{x}, \widetilde{u}, \widetilde{u}_{\widetilde{x}}, \widetilde{u}_{\widetilde{x}\widetilde{x}})$ определяется следующими условиями:

- $(\Phi^{(2)})^*(d\widetilde{u} - \widetilde{u}_{\widetilde{x}}\, d\widetilde{x}) \equiv 0 \mod du - u_x\, dx$;
- $(\Phi^{(2)})^*(d\widetilde{u}_{\widetilde{x}} - \widetilde{u}_{\widetilde{x}\widetilde{x}}\, d\widetilde{x}) \equiv 0 \mod du_x - u_{xx}\, dx,\ \ du - u_x\, dx$;
- $(\Phi^{(2)})^* d\widetilde{x} \equiv 0 \mod dx,\ \ du - u_x\, dx$.

# Проблема эквивалентности

Проблема эквивалентности: найти необходимые и достаточные условия существования диффеоморфизма из $\mathfrak{G}$, переводящего одно уравнение (1) в другое.

Инвариантный подкласс:

$$u_{xx} = A_3(x,u)\,u_x^3 + A_2(x,u)\,u_x^2 + A_1(x,u)\,u_x + A_0(x,u) \qquad (2)$$

С. Ли, 1883 (Gesam. Abh.: Bd **5**, pp. 362-427): уравнение (2) эквивалентно уравнению $\widetilde{u}_{\widetilde{x}\widetilde{x}} = 0 \iff$ совместна переопределенная система

$$\begin{aligned}
U_x &= U\,V + A_0\,A_3 - \tfrac{1}{3}\,A_{1,u} + \tfrac{2}{3}\,A_{2,x},\\
U_u &= U^2 - A_2\,U + A_3\,V + A_{3,x} + A_1\,A_3,\\
V_x &= V^2 - A_0\,U + A_1\,V - A_{0,u} + A_0\,A_2,\\
V_u &= U\,V + A_0\,A_3 + \tfrac{1}{3}\,A_{2,u} - \tfrac{2}{3}\,A_{1,u}.
\end{aligned}$$

# Проблема эквивалентности

Р. Лиувилль, 1889 (J. École Polytech., **59**, pp. 7-76):

- уравнение (2) эквивалентно уравнению $\widetilde{u}_{\widetilde{x}\widetilde{x}} = 0 \iff L_1 = 0,\ L_2 = 0$, где

$$L_1 = 3\,A_{0,uu} - 2\,A_{1,xu} + A_{2,xx} + 3\,A_3 A_{0,x} - 3\,A_2 A_{0,u} \\ -3\,A_1 A_{1,u} - A_1 A_{2,x} - 3\,A_0 A_{2,u} + 6\,A_0 A_{3,x},$$

$$L_2 = A_{1,uu} - 2\,A_{2,xu} + 3\,A_{3,xx} - 6\,A_3 A_{0,u} + 3\,A_3 A_{1,x} \\ +2\,A_2 A_{1,u} - 2\,A_2 A_{2,x} + 3\,A_1 A_{3,x} - 3\,A_0 A_{3,u};$$

- серии относительных и абсолютных инвариантов уравнения (2) при действии $\mathfrak{G}$.

# Проблема эквивалентности

А. Трессе, 1894 (Acta Math., **18**, pp. 1-88), 1896 (Preisschr. fürst. Jablonowski'schen Gesellschaft, **32**):

- Инфинитезимальный метод С. Ли для нахождения дифференциальных инвариантов уравнений (2) и (1);
- Для нелинеаризуемого уравнения (2) существует преобразование из $\mathfrak{G}$, приводящее его к уравнению, для которого $L_1 \neq 0$ и $L_2 = 0$. Два уравнения из подкласса уравнений (2), удовлетворяющих условию $L_1 \neq 0$ и $L_2 = 0$, эквивалентны относительно псевдогруппы $\mathfrak{G}$ тогда и только тогда, когда они эквивалентны относительно подпсевдогруппы $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$, состоящей из продолжений диффеоморфизмов вида

$$\widetilde{x} = \varphi(x), \qquad \widetilde{u} = \psi(x, u).$$

# Проблема эквивалентности

М.В. Бабич, Л.А. Бордаг, 1999 (J. Diff.Eq., **157**, pp. 452-485):

- Все уравнения Пэнлеве принадлежат к случаю, который не был рассмотрен Лиувиллем и Трессе;
- Каждое такое уравнение приводится преобразованием из $\mathfrak{G}$ к виду

$$u_{xx} = A_0(x, u). \tag{3}$$

Два уравнения вида (3) эквивалентны относительно псевдогруппы $\mathfrak{G}$ тогда и только тогда, когда они эквивалентны относительно подпсевдогруппы, состоящей из преобразований вида

$$\widetilde{x} = \varphi(x), \qquad \widetilde{u} = \sqrt{|\varphi'(x)|}\, u + \chi(x).$$

# Проблема эквивалентности

Л. Су, Н. Камран, 1989 (Proc. London Math. Soc., **58**, pp. 387-416):

- метод Картана для решения проблемы эквивалентности уравнений (1) относительно псевдогруппы $\mathfrak{H}$.

# Проблема эквивалентности

Второе продолжение диффеоморфизма $\Phi$:

- $(\Phi^{(2)})^* d\widetilde{x} = b_1\, dx + b_2\, (du - u_x\, dx)$,
- $(\Phi^{(2)})^* (d\widetilde{u} - \widetilde{u}_{\widetilde{x}}\, d\widetilde{x}) = b_3\, (du - u_x\, dx)$,
- $(\Phi^{(2)})^* (d\widetilde{u}_{\widetilde{x}} - \widetilde{u}_{\widetilde{x}\widetilde{x}}\, d\widetilde{x}) = b_4\, (du_x - u_{xx}\, dx) + b_5\, (du - u_x\, dx)$,

где $b_1 \cdot b_3 \cdot b_4 \neq 0$. Иными словами,

$$(\Phi^{(2)})^* \begin{pmatrix} d\widetilde{x} \\ d\widetilde{u} - \widetilde{u}_{\widetilde{x}}\, d\widetilde{x} \\ d\widetilde{u}_{\widetilde{x}} - \widetilde{u}_{\widetilde{x}\widetilde{x}}\, d\widetilde{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & 0 \\ 0 & b_5 & b_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ du - u_x\, dx \\ du_x - u_{xx}\, dx \end{pmatrix}$$

# Проблема эквивалентности

Рассмотрим 1-формы:

$$\begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & 0 \\ 0 & b_5 & b_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ du - u_x\,dx \\ du_x - u_{xx}\,dx \end{pmatrix}$$

Они инвариантны относительно поднятия диффеоморфизма $\Phi^{(2)}$: $\quad \Psi : (x, u, u_x, b_1, ...b_5) \mapsto (\widetilde{x}, \widetilde{u}, \widetilde{u}_{\widetilde{x}}, \widetilde{b}_1, ..., \widetilde{b}_5)$,

$$\Psi^* \begin{pmatrix} \widetilde{\Omega}_1 \\ \widetilde{\Omega}_2 \\ \widetilde{\Omega}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix}.$$

# Проблема эквивалентности

- Ограничим $\Omega_1$, $\Omega_2$, $\Omega_3$ на уравнение (1):

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & 0 \\ 0 & b_5 & b_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ du - u_x\,dx \\ du_x - F(x,u,u_x)\,dx \end{pmatrix}$$

- Два уравнения (1) эквивалентны относительно $\mathfrak{G} \iff$

$$\Psi^* \begin{pmatrix} \widetilde{\omega}_1 \\ \widetilde{\omega}_2 \\ \widetilde{\omega}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}.$$

- $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ — инвариантны $\Longrightarrow$ $d\omega_1$, $d\omega_2$, $d\omega_3$ инвариантны.

# Проблема эквивалентности

- Структурные уравнения

$$d\omega_2 = \eta\wedge\omega_2 + \frac{b_3}{b_1 b_4}\,\omega_1\wedge\omega_3,$$

$$\eta = \frac{db_3}{b_3} - \frac{b_5}{b_1 b_4}\,\omega_1 + r\,\omega_2 + \frac{b_2}{b_1 b_4}\,\omega_3.$$

- Инвариант:

$$\frac{b_3}{b_1 b_4}$$

- Нормализация:

$$\frac{b_3}{b_1 b_4} = 1 \Longrightarrow b_3 = b_1 b_4.$$

# Проблема эквивалентности

$$
\begin{aligned}
d\omega_1 &= \eta_1\wedge\omega_1+\eta_2\wedge\omega_2,\\
d\omega_2 &= \eta_3\wedge\omega_2+\omega_1\wedge\omega_3,\\
d\omega_3 &= \eta_4\wedge\omega_2+(\eta_3-\eta_1)\wedge\omega_3,\\
d\eta_1 &= -2\,\eta_4\wedge\omega_1+\eta_5\wedge\omega_2-\eta_2\wedge\omega_3,\\
d\eta_2 &= (\eta_1-\eta_3)\wedge\eta_2+\eta_5\wedge\omega_1+\tfrac{1}{6}\,\frac{F_4}{b_1 b_4^3}\,\omega_2\wedge\omega_3,\\
F_4 &= F_{u_x u_x u_x u_x}.
\end{aligned}
$$

- Случай A: $F_4 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad$ нормализация $\quad b_1 = F_4\, b_4^{-3}$.
- Случай B: $F_4 = 0$.

# Случай A: $F_4 \neq 0$

$$d\omega_1 = \eta_1 \wedge \omega_1 + \eta_2 \wedge \omega_2 + \frac{1}{2}\,\frac{5\,b_2 b_4^3 + F_5}{b_4 F_4}\,\omega_1 \wedge \omega_3,$$

$$d\omega_2 = \frac{2}{3}\,\eta_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \omega_3,$$

$$\Longrightarrow \text{нормализация } b_2 = -\frac{1}{5}\,F_5\,b_4^{-3};$$

# Случай A: $F_4 \neq 0$

$$d\omega_1 = \eta_1 \wedge \omega_1 + \frac{1}{25}\,\frac{5\,F_4 F_6 - 6\,F_5^2}{F_4^2 b_4^2}\,\omega_2 \wedge \omega_3,$$

$$d\omega_2 = \frac{2}{3}\,\eta_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \omega_3,$$

$$d\omega_3 = \eta_2 \wedge \omega_2 - \frac{1}{3}\,\eta_1 \wedge \omega_3 + \frac{1}{2}\,\frac{b_4^2}{F_4^2}\,\left(F_4\,b_5 + \left(D_x(F_4) + 2\,F_1 F_4\right) b_4\right)\,\omega_1 \wedge \omega_3,$$

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + u_x\,\frac{\partial}{\partial u} + F\,\frac{\partial}{\partial u_x}$$

$$\Longrightarrow \quad \text{нормализация} \quad b_5 = -b_4 F_4^{-1} F\,\left(D_x(F_4) + 2\,F_1 F_4\right);$$

- Случай AA: $5\,F_4 F_6 - 6\,F_5^2 \neq 0$
  $\Longrightarrow$ нормализация $b_4 = F_4^{-1}\,\sqrt{|5\,F_4 F_6 - 6\,F_5^2|}$;
- Случай AB: $5\,F_4 F_6 - 6\,F_5^2 = 0$.

# Случай AA: $F_4 \neq 0, \quad 5\,F_4 F_6 - 6\,F_5^2 \neq 0$

$$d\omega_1 = G_1\,\omega_1\wedge\omega_2 + H_1\,\omega_1\wedge\omega_3 - \tfrac{1}{25}\,\omega_2\wedge\omega_3,$$
$$d\omega_2 = I_1\,\omega_1\wedge\omega_2 + \omega_1\wedge\omega_3 + \tfrac{2}{3}\,H_1\,\omega_2\wedge\omega_3,$$
$$d\omega_3 = J_1\,\omega_1\wedge\omega_2 - \tfrac{1}{2}\,I_1\,\omega_1\wedge\omega_3 + K_1\,\omega_2\wedge\omega_3,$$

$$G_1 = G_1(x,u,u_x), \quad \ldots, \quad K_1 = K_1(x,u,u_x),$$
$$dR = \mathbb{D}_1(R)\,\omega_1 + \mathbb{D}_2(R)\,\omega_2 + \mathbb{D}_3(R)\,\omega_3,$$

$$\mathbb{D}_1 = V_1^{3/2}\,F_4^{-4}\,D_x,$$
$$\mathbb{D}_2 = \tfrac{1}{5}\,V_1\left(F_5\,F_4^{-4}\,D_x + 5\,F_4^{-3}\,\frac{\partial}{\partial u} + 5\,F_4^{-4}\,(D_x(F_4) + 2\,F_1\,F_4)\frac{\partial}{\partial u_x}\right),$$
$$\mathbb{D}_3 = F_4\,V_1^{-1/2}\,\frac{\partial}{\partial u_x}, \qquad V_1 = 5\,F_4 F_6 - 6\,F_5^2$$

.

# Случай AB: $F_4 \neq 0, \quad 5\,F_4 F_6 - 6\,F_5^2 = 0$

Случай ABA: $\quad F_4 \neq 0, \quad F_5 = 0 \quad \Longrightarrow$

$$u_{xx} = A_4(x,u)\,u_x^4 + A_3(x,u)\,u_x^3 + A_2(x,u)\,u_x^2 + A_1(x,u)\,u_x + A_0(x,u). \tag{4}$$

Случай ABB: $\quad F_4 \neq 0, \quad F_5 \neq 0 \quad \Longrightarrow$

$$u_{xx} = \frac{1}{B_1(x,u)\,u_x + B_0(x,u)} + A_3(x,u)\,u_x^3 + \ldots + A_0(x,u). \tag{5}$$

ЛЕММА 1: *Пусть $W(x,u)$ — любое ненулевое решение уравнения $d(W \cdot (B_1\,du + B_0\,dx)) = 0$. Тогда существует функция $V(x,u)$, такая что $dV = W \cdot (B_1\,du + B_0\,dx)$. Замена переменных $\widetilde{x} = V(x,u)$, $\widetilde{u} = x$ переводит уравнение вида (5) в уравнение вида (4).*

# Случай ABA: $F_4 \neq 0, \quad F_5 = 0$

ЛЕММА 2: *Пусть* $W(x,u)$ *— любое ненулевое решение уравнения* $d(W \cdot (du - 3\,A_3\,A_4^{-1}\,dx)) = 0$. *Тогда существует функция* $V(x,u)$, *такая что* $dV = W \cdot (du - 3\,A_3\,A_4^{-1}\,dx)$. *Замена переменных* $\widetilde{x} = x, \quad \widetilde{u} = V(x,u)$ *переводит уравнение (4) в уравнение вида*

$$u_{xx} = A_4(x,u)\,u_x^4 + A_2(x,u)\,u_x^2 + A_1(x,u)\,u_x + A_0(x,u).$$

Структурные уравнения

$$d\omega_1 = \eta_1 \wedge \omega_1,$$

$$d\omega_2 = \tfrac{2}{3}\,\eta_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \omega_3,$$

$$d\omega_3 = -\tfrac{1}{3}\,\eta_1 \wedge \omega_3 + \ldots\,\omega_1 \wedge \omega_2$$
$$+ \tfrac{1}{18}\,b_4^2\,A_4^{-2}\,\left(18\,A_4^2 u_x^2 + A_{4,u} + 3\,A_2 A_4\right)\,\omega_2 \wedge \omega_3$$

$$\Longrightarrow \qquad b_4 = A_4 \cdot \left|18\,A_4^2 u_x^2 + A_{4,u} + 3\,A_2 A_4\right|^{-1/2}.$$

# Случай ABAA: $F = A_4 u_x^4 + \ldots + A_0, \quad A_{4,u} + 3\,A_2 A_4 \neq 0$

Структурные уравнения

$$d\omega_1 = (30 - 3\,J_2 P_2^3)\,\omega_1 \wedge \omega_2 - 3\,\omega_1 \wedge \omega_3,$$

$$d\omega_2 = (G_2 P_2^4 + J_2 P_2^3 + P_2^2 - 8)\,\omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \omega_3 - 2\,\omega_2 \wedge \omega_3,$$

$$d\omega_3 = (H_2 P_2^6 + I_2 P_2^5 + 15\,G_2 P_2^4 + 34\,J_2 P_2^3 + 11\,P_2^2 - 110)\,\omega_1 \wedge \omega_2$$
$$- \left(\tfrac{1}{2}\,G_2 P_2^4 + J_2 P_2^3 - 13\right)\,\omega_1 \wedge \omega_3 - (J_2 P_2^3 + 20)\,\omega_2 \wedge \omega_3,$$

$$dP_2 = P_2\,\left(\tfrac{1}{2}\,G_2 P_4 - L_2 P_2^3 - K_2 P_2^2 + 1\right)\,\omega_1$$
$$- P_2\,(J_2 P_2^3 - K_2 P_2^2 - 10)\,\omega_2 - P_2\,\omega_3$$

Инвариант, зависящий от $u_x$:

$$P_2 = V_2^{1/2}\,u_x^{-1},$$

# Случай ABAA: $F = A_4 u_x^4 + \ldots + A_0, \quad A_{4,u} + 3\,A_2 A_4 \neq 0$

Инварианты, зависящие от $x$ и $u$:

$$G_2 = 2\,A_0 A_4^{-1} V_2^{-2},$$
$$J_2 = W_2\,V_2^{-3/2},$$
$$K_2 = \tfrac{1}{2}\,(V_{2,u} - 2\,A_2 V_2)\,A_4^{-1} V_2^{-2},$$
$$L_2 = \tfrac{1}{2}\,(V_{2,x} - 2\,A_1 V_2)\,A_4^{-1} V_2^{-5/2},$$
$$H_2 = \tfrac{1}{2}\,A_4^{-1} V_2^{-3}(G_2 V_2 V_{2,u} - 2\,W_{2,x} + V_2^2 G_{2,u} + A_4 G_2 V_2^3 \\ -4\,A_2 G_2 V_2^2 - 4\,A_4 W_2 + 6\,A_1 W_2),$$
$$I_2 = A_4^{-2} V_2^{-5/2}\,(A_{1,u} - A_{2,x} - A_4 W_{2,u} + 3\,A_2 A_4 W_2 - A_4^2 V_2 W_2),$$

где

$$V_2 = A_4^{-2}\,(A_{4,u} + 3\,A_2 A_4), \qquad W_2 = A_4^{-2}(A_{4,u} + 2\,A_1\,A_4).$$

Инвариантные дифференцирования:

$$R = R(x,u) \quad \Rightarrow \quad dR = \mathbb{D}_1 \omega_1 + \mathbb{D}_2 \omega_2,$$

$$\mathbb{D}_1 = A_4^{-1} V_2^{-3/2}\,\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \mathbb{D}_2 = A_4^{-1} V_2^{-1}\,\frac{\partial}{\partial u}.$$

# Случай ABAB: $A_{4,u} + 3\,A_2 A_4 = 0, \quad A_{4,x} + 2\,A_1\,A_4 \neq 0$

Структурные уравнения

$$d\omega_1 = 3\,(P_3^3+8)\,\omega_1\wedge\omega_2 - 3\,\omega_1\wedge\omega_3,$$

$$d\omega_2 = 2\,(G_3\,P_3^4+P_3^3+5)\,\omega_1\wedge\omega_2+\omega_1\wedge\omega_3-2\,\omega_2\wedge\omega_3,$$

$$\begin{aligned} d\omega_3 = {} & (I_3 P_3^6+H_3 P_3^5-24\,G_3 P_3^4-20\,P_3^3-56)\,\omega_1\wedge\omega_2 \\ & -(G_3 P_3^4+P_3^3+5)\,\omega_1\wedge\omega_3-(P_3^3-16)\,\omega_2\wedge\omega_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dP_3 = {} & P_3\,(K_3 P_3^3 K-G_3 P_3^4+J_3 P_3^2-1)\,\omega_1 \\ & +P_3\,(J_3 P_3^2-P_3^3-8)\,\omega_2-P_3\,\omega_3 \end{aligned}$$

Инвариант, зависящий от $u_x$:

$$P_3 = V_3^{1/3}\,u_x^{-1},$$

# Случай ABAB: $A_{4,u} + 3\,A_2 A_4 = 0, \quad A_{4,x} + 2\,A_1\,A_4 \neq 0$

Инварианты, зависящие от $x$ и $u$:

$$G_3 = A_0 A_4^{-1} V_3^{-4/3},$$
$$H_3 = \frac{1}{3}\left(A_{1,u} - 2\,V_3\,A_{4,u} - 2\,A_4\,V_{3,u}\right) A_4^2 V_3^{-5/3},$$
$$J_3 = \frac{1}{3}\left(V_3 A_{4,u} + A_4 V_{3,u}\right) V_3^{-5/3} A_4^2,$$
$$K_3 = \frac{1}{3}\left(V_{3,x} - 3\,A_1 V_3\right) A_4^{-1} V_3^{-2},$$
$$I_3 = G_{3,u}\,A_4^{-1} V_3^{-2/3} + 4\,G_3 J_3 - 3\,K_3 - 2,$$

где

$$V_3 = \left(A_{4,x} + 2\,A_1 A_4\right) A_4^{-2}$$

Инвариантные дифференцирования:

$$\mathbb{D}_1 = A_4^{-1} V_3^{-1}\,\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \mathbb{D}_2 = A_4^{-1} V_3^{-2/3}\,\frac{\partial}{\partial u}.$$

# Случай ABAC: $A_{4,u} + 3\,A_2 A_4 = 0,\ A_{4,x} + 2\,A_1\,A_4 = 0,$ $A_0 \neq 0$

Структурные уравнения

$$d\omega_1 = 24\,\omega_1\wedge\omega_2 - 3\,\omega_1\wedge\omega_3,$$

$$d\omega_2 = 2\,(P_4^3+5)\,\omega_1\wedge\omega_2 + \omega_1\wedge\omega_3 - 2\,\omega_2\wedge\omega_3,$$

$$d\omega_3 = (24\,P_4^4 - G_4 P_4^6 - H_4 P_4^5 - 56)\,\omega_1\wedge\omega_2 - (P_4^4+5)\,\omega_1\wedge\omega_3 + 16\,\omega_2\wedge\omega_3,$$

$$dP_4 = \tfrac{1}{4}\,P_4\,(4\,I_4 P_4^3 - 4\,P_4^4 + G_4 P_4^2 - 4)\,\omega_1 + \tfrac{1}{4}\,P_4\,(G_4 P_4^2 - 32)\,\omega_2 - P_4\,\omega_3$$

Инвариант, зависящий от $u_x$:

$$P_4 = A_0^{1/4}\,u_x^{-1}\,A_4^{-1/4},$$

# Случай ABAC: $A_{4,u} + 3\,A_2 A_4 = 0,\ A_{4,x} + 2\,A_1\,A_4 = 0,$ $A_0 \neq 0$

Инварианты, зависящие от $x$ и $u$:

$$G_4 = (3\,A_4 A_{0,u} + A_0\,A_{4,u})\,A_0^{-3/2} A_4^{-3/2},$$

$$H_4 = \tfrac{1}{6}\,(A_4 A_{4,xu} - A_{4,x} A_{4,u})\,A_0^{-3/2} A_4^{-5/4},$$

$$I_4 = \tfrac{1}{4}\,(A_4 A_{0,x} + A_0 A_{4,x})\,A_0^{-7/4} A_4^{-5/4},$$

Инвариантные дифференцирования:

$$\mathbb{D}_1 = A_0^{-3/4} A_4^{-1/4}\,\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \mathbb{D}_2 = A_0^{-1/2} A_4^{-1/2}\,\frac{\partial}{\partial u}.$$

# Случай ABAD: $A_{4,u} + 3\,A_2 A_4 = 0,\ A_{4,x} + 2\,A_1\,A_4 = 0,$ $A_0 = 0,\ A_4 A_{4,xu} - A_{4,x} A_{4,u} \neq 0$

Структурные уравнения

$$d\omega_1 = 24\,\omega_1\wedge\omega_2 - 3\,\omega_1\wedge\omega_3,$$

$$d\omega_2 = 10\,\omega_1\wedge\omega_2 + \omega_1\wedge\omega_3 - 2\,\omega_2\wedge\omega_3,$$

$$d\omega_3 = \left(\tfrac{1}{6}\,P_5^5 - 56\right)\,\omega_1\wedge\omega_2 - 5\,\omega_1\wedge\omega_3 + 16\,\omega_2\wedge\omega_3,$$

$$dP_5 = P_5\,(H_5\,P_5^3 + G_5\,P_5^2 - 1)\,\omega_1 + P_5\,(G_5 P_5^2 - 8)\,\omega_2 - P_5\,\omega_3$$

Инвариант, зависящий от $u_x$:

$$P_5 = (A_4 A_{4,xu} - A_{4,x} A_{4,u})^{1/5}\,u_x^{-1}\,A_4^{-1/5},$$

# Случай ABAD: $A_{4,u} + 3\,A_2 A_4 = 0,\ A_{4,x} + 2\,A_1\,A_4 = 0,$ $A_0 = 0,\ A_4 A_{4,xu} - A_{4,x} A_{4,u} \neq 0$

Инварианты, зависящие от $x$ и $u$:

$$G_5 = \frac{1}{15}\left(3\,A_4 V_{5,u} - 7\,V_5 A_{4,u}\right) A_4^{-2/5} V_5^{-7/5},$$

$$H_5 = \frac{1}{10}\,A_4^{2/5}\left(2\,A_4 V_{5,x} - 3\,V_5 A_{4,x}\right) V_5^{-8/5},$$

где

$$V_5 = A_4 A_{4,xu} - A_{4,x} A_{4,u}.$$

Инвариантные дифференцирования:

$$\mathbb{D}_1 = A_4^{7/5} V_5^{-3/5}\,\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \mathbb{D}_2 = A_4^{3/5} V_5^{-2/5}\,\frac{\partial}{\partial u}.$$

# Случай ABAE: $A_{4,u} + 3\,A_2 A_4 = 0,\ A_{4,x} + 2\,A_1\,A_4 = 0,$ $A_0 = 0,\ A_4 A_{4,xu} - A_{4,x} A_{4,u} = 0$

Структурные уравнения

$$d\omega_1 = 24\,\omega_1\wedge\omega_2 - 3\,\omega_1\wedge\omega_3,$$

$$d\omega_2 = 10\,\omega_1\wedge\omega_2 + \omega_1\wedge\omega_3 - 2\,\omega_2\wedge\omega_3,$$

$$d\omega_3 = -56\,\omega_1\wedge\omega_2 - 5\,\omega_1\wedge\omega_3 + 16\,\omega_2\wedge\omega_3.$$

Нормальная форма:

$$u_{xx} = u_x^4.$$

# Случай B: $F_4 = 0$

$$u_{xx} = A_3(x,u)\,u_x^3 + A_2(x,u)\,u_x^2 + A_1(x,u)\,u_x + A_0(x,u).$$

$$d\omega_1 = \eta_1 \wedge \omega_1 + \eta_2 \wedge \omega_2,$$

$$d\omega_2 = \eta_3 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \omega_3,$$

$$d\omega_3 = \eta_4 \wedge \omega_2 + (\eta_3 - \eta_1) \wedge \omega_3,$$

$$d\eta_1 = -2\,\eta_1 \wedge \omega_1 + \eta_5 \wedge \omega_2 - \eta_2 \wedge \omega_3,$$

$$d\eta_2 = (\eta_1 - \eta_3) \wedge \eta_2 + 2\,\eta_5 \wedge \omega_2 + \eta_2 \wedge \omega_3,$$

$$d\eta_3 = -\eta_4 \wedge \omega_1 + 2\,\eta_5 \wedge \omega_2 + \eta_2 \wedge \omega_3,$$

$$d\eta_4 = \eta_4 \wedge \eta_1 + \eta_5 \wedge \omega_3 + \frac{1}{3}\,\frac{L_1 + L_2\,u_x}{b_1^3 b_4}\,\omega_1 \wedge \omega_3.$$

$$\begin{aligned} L_1 &= 3\,A_{0,uu} - 2\,A_{1,xu} + A_{2,xx} + 3\,A_3 A_{0,x} - 3\,A_2 A_{0,u} \\ &\quad -3\,A_1 A_{1,u} - A_1 A_{2,x} - 3\,A_0 A_{2,u} + 6\,A_0 A_{3,x}, \\ L_2 &= A_{1,uu} - 2\,A_{2,xu} + 3\,A_{3,xx} - 6\,A_3 A_{0,u} + 3\,A_3 A_{1,x} \\ &\quad +2\,A_2 A_{1,u} - 2\,A_2 A_{2,x} + 3\,A_1 A_{3,x} - 3\,A_0 A_{3,u}. \end{aligned}$$

# Случай B: $F_4 = 0$

- Случай BA: $L_1 = 0$ и $L_2 = 0$;
- Случай BB: $L_1 \neq 0$ или $L_2 \neq 0 \Rightarrow b_4 = \frac{1}{3}\left(L_1 + L_2\, u_x\right) b_1^{-3}$.

# Случай BA: $F_4 = 0, \quad L_1 = 0, \quad L_2 = 0$

$$
\begin{aligned}
d\omega_1 &= \eta_1\wedge\omega_1+\eta_2\wedge\omega_2,\\
d\omega_2 &= \eta_3\wedge\omega_2+\omega_1\wedge\omega_3,\\
d\omega_3 &= \eta_4\wedge\omega_2+(\eta_3-\eta_1)\wedge\omega_3,\\
d\eta_1 &= -2\,\eta_1\wedge\omega_1+\eta_5\wedge\omega_2-\eta_2\wedge\omega_3,\\
d\eta_2 &= (\eta_1-\eta_3)\wedge\eta_2+2\,\eta_5\wedge\omega_2+\eta_2\wedge\omega_3,\\
d\eta_3 &= -\eta_4\wedge\omega_1+2\,\eta_5\wedge\omega_2+\eta_2\wedge\omega_3,\\
d\eta_4 &= \eta_4\wedge\eta_1+\eta_5\wedge\omega_3,\\
d\eta_5 &= \eta_2\wedge\eta_4-\eta_3\wedge\eta_5.
\end{aligned}
$$

Нормальная форма:

$$u_{xx} = 0.$$

# Случай BB: $F_4 = 0, \quad L_1 \neq 0$ или $L_2 \neq 0$

$$d\omega_1 = \eta_1 \wedge \omega_1 + \eta_2 \wedge \omega_2,$$

$$d\omega_2 = -2\,\eta_2 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \omega_2 + \frac{3\,b_1^2}{(L_1 + L_2 u_x)^2}\,((L_1 + L_2 u_x)\,b_2 - L_1\,b_1)\,\omega_2 \wedge \omega_3$$

нормализация

$$b_2 = \frac{L_2\,b_1}{L_1 + L_2\,u_x}$$

$\Longrightarrow$

$$\omega_1 = \frac{b_1}{L_1 + L_2 u_x}\,(L_1\,dx + L_2\,du),$$

$$d\omega_1 = \eta_1 \wedge \omega_1$$

По теореме Фробениуса существует $\widetilde{x} = V(x,u)$, такая что $\omega_1 = \widetilde{b}_1\,d\widetilde{x}$. Замена переменных: $\widetilde{x} = V(x,u)$, $\widetilde{u} = W(x,u)$ $\Longrightarrow \widetilde{L}_2 = 0$. Без ограничения общности $L_2 = 0$, $L_1 \neq 0$.

# Случай BB: $F_4 = 0, \quad L_1 \neq 0,\ L_2 = 0$

$$d\omega_1 = \eta_1 \wedge \omega_1,$$

$$d\omega_2 = -2\,\eta_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \omega_3,$$

$$d\omega_3 = -3\,\eta_1 \wedge \omega_3 + \eta_2 \wedge \omega_2 + \frac{1}{2\,L_1 b_1}\left(15\,b_1^3 b_5 - D_x(L_1) + 2\,L_1\,F_{u_x}\right)\,\omega_1 \wedge \omega_3$$

нормализация:

$$b_5 = \frac{1}{15\,b_1^3}\,\left(D_x(L_1) - 2\,L_1\,F_{u_x}\right)$$

# Случай BB: $F_4 = 0, \quad L_1 \neq 0,\ L_2 = 0$

$$d\omega_1 = \eta_1 \wedge \omega_1,$$

$$d\omega_2 = -2\,\eta_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \omega_3,$$

$$d\omega_3 = -3\,\eta_1 \wedge \omega_3 + \ldots\,\omega_1 \wedge \omega_2 + \frac{12\,b_1^2}{5\,L_1^2}\,(3\,A_3\,L_1\,u_x + L_{1,u} + A_2\,L_1)\,\omega_1 \wedge \omega_3$$

- Случай BBA: $A_3 \neq 0$ или $L_{1,u} + A_2\,L_1 \neq 0$

  $\Longrightarrow$ нормализация

  $b_1 = L_1\,|3\,A_3\,L_1\,u_x + L_{1,u} + A_2\,L_1|^{-1/2};$
- Случай BBB: $A_3 = 0$ и $L_{1,u} + A_2\,L_1 = 0.$

# Случай BBAA: $F_4 = 0, \quad L_1 \neq 0,\ L_2 = 0,\ A_3 \neq 0$

$$
\begin{aligned}
d\omega_1 &= G_6\,\omega_1\wedge\omega_2,\\
d\omega_2 &= \left(H_6 - \tfrac{1}{2}\,G_6 P_6\right)\,\omega_1\wedge\omega_2 + \omega_1\wedge\omega_2,\\
d\omega_3 &= (J_6\,P_6^2 + K_6 P_6 + L_6)\,\omega_1\wedge\omega_2 + \tfrac{1}{2}\,G_6\,\omega_2\wedge\omega_3\\
&\quad + \left(3\,P_6^2 + I_6 P_6 + \tfrac{1}{12}\,(I_6^2 - G_6^2) + \tfrac{1}{8}\,G_6 I_6 + \tfrac{3}{2}\,H_6\right)\,\omega_1\wedge\omega_3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
dP_6 &= \tfrac{1}{60}\,\left(30\,G_6 P_6 - 3\,G_6 I_6 + 2\,G_6^2 - 2\,I_6^2 - 6\,M_6\right)\,\omega_2 + \omega_3\\
&\quad + \left(P_6^3 + \tfrac{1}{4}\,(G_6 + 2\,I_6)\,P_6^2 + \tfrac{1}{40}\,(3\,G_6 I_6 + 2\,I_6^2 - 2\,G_6^2\right.\\
&\quad \left. -8\,M_6 + 120\,H_6)\,P_6 + N_6\right)\,\omega_1,
\end{aligned}
$$

$$
P_6 = A_3^{3/5}\,L_1^{-1/5}\,u_x, \qquad G_6 = G_6(x,u), \quad \ldots, \quad M_6 = M_6(x,u),
$$

$$
\mathbb{D}_1 = A_3^{1/5} L_1^{-2/5}\,\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \mathbb{D}_2 = A_3^{-2/5} L_1^{-1/5}\,\frac{\partial}{\partial u}.
$$

# Случай BBAB: $F_4 = 0,\ L_1 \neq 0,\ L_2 = 0,\ A_3 = 0,$ $L_{1,u} + A_2 L_1 \neq 0$

$$
\begin{aligned}
d\omega_1 &= G_7\,\omega_1\wedge\omega_2,\\
d\omega_2 &= \left(H_7 + \tfrac{2}{15}\,(5\,G_7+6)\,P_7\right)\,\omega_1\wedge\omega_2 + \omega_1\wedge\omega_3,\\
d\omega_3 &= \left(\tfrac{2}{75}\,(5\,G_7+6)\,P_7^2 + \tfrac{1}{5}\,(2\,H_7+5\,J_7)\,P_7 + I_7\right)\,\omega_1\wedge\omega_2\\
&\quad + \tfrac{1}{10}\,\left(2\,(5\,G_7+6)\,P_7 + 15\,H_7\right)\,\omega_1\wedge\omega_3 + \tfrac{3}{5}\,\left(5\,G_7+4\right)\,\omega_2\wedge\omega_3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
dP_7 &= \left((G_7+1)\,P_7^2 + \tfrac{1}{10}\,(15\,H_7 - 2\,K_7)\,P_7 + L_7\right)\,\omega_1\\
&\quad + \tfrac{3}{5}\,\left((5\,G_7+4)\,P_7 - K_7\right)\,\omega_2 + 3\,\omega_3,
\end{aligned}
$$

$$
P_7 = |L_{1,y} + A_2\,L_1|^{3/2}\,L_1^{-2}\,u_x, \quad G_7 = G_7(x,u), \quad \ldots, \quad L_7 = L_7(x,u),
$$

$$
\mathbb{D}_1 = |L_{1,y} + A_2\,L_1|^{1/2}\,L_1^{-1}\,\frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathbb{D}_2 = (L_{1,y} + A_2\,L_1)^{-1}\,L_1\,\frac{\partial}{\partial u}.
$$

# Случай BBB: $F_4 = 0,\ L_1 \neq 0,\ L_2 = 0,\ A_3 = 0,$ $L_{1,u} + A_2 L_1 = 0$

$$d\omega_1 = \eta_1 \wedge \omega_1,$$

$$d\omega_2 = -2\,\eta_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \omega_3,$$

$$d\omega_3 = -3\,\eta_1 \wedge \omega_3 + \frac{1}{25\,L_1^2 b_1^2}\left(15\,L_1^2\,V_8\,u_x + W_8\right)\,\omega_1 \wedge \omega_2,$$

$$V_8 = A_{1,u} - 2\,A_{2,x},$$

$$W_8 = 5\,L_1 L_{1,xx} - 6\,L_{1,x}^2 - A_1 L_1 L_{1,x} - 10\,L_1^2\,A_{1,x} + 25\,L_1^2 A_{0,u} + L_1^2\,(6\,A_1^2 - 25\,A_0 A_2)$$

- Случай BBBA: $\quad A_{1,u} - 2\,A_{2,x} \neq 0$

  $$\Longrightarrow \qquad b_1 = \tfrac{1}{5}\,L_1^{-1}\,\left|V_8\,u_x + W_8\right|^{1/2};$$

- Случай BBBB: $\quad A_{1,u} - 2\,A_{2,x} = 0.$

# Случай BBBA: $F_4 = 0,\ L_1 \neq 0,\ L_2 = 0,\ A_3 = 0,$ $L_{1,u} + A_2 L_1 = 0,\ A_{1,u} - 2\,A_{2,x} \neq 0$

$$d\omega_1 = 0,$$

$$d\omega_2 = G_8\,\omega_1\wedge\omega_2 + \omega_1\wedge\omega_3,$$

$$d\omega_3 = P_8\,\omega_1\wedge\omega_2 + \tfrac{3}{2}\,G_8\,\omega_1\wedge\omega_3,$$

$$dP_8 = (3\,H_8 P_8 + I_8)\,\omega_2 + \tfrac{3}{5}\,\omega_3 + \left(5\,H_8 P_8^2 + \tfrac{5}{6}\,(G_8 + 8\,I_8 - 2)\,P_8 + J_8\right)\,\omega_1,$$

$$P_8 = \frac{V_8^2\,(15\,L_1^2 V_8\,u_x + W_8)}{25\,L_1^4} \qquad G_8 = G_8(x,u), \quad \ldots, \quad J_8 = J_8(x,u),$$

$$\mathbb{D}_1 = V_8\,L_1^{-1}\,\frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathbb{D}_2 = V_8^{-2}\,L_1\,\frac{\partial}{\partial u}.$$

# Случай BBBB: $F_4 = 0$, $L_1 \neq 0$, $L_2 = 0$, $A_3 = 0$, $L_{1,u} + A_2 L_1 = 0$, $A_{1,u} - 2\,A_{2,x} = 0$

$A_{1,u} = 2\,A_{2,x} \quad \Longrightarrow \quad$ существует функция $B = B(x,u)$, такая что $A_1 = 2\,B_x$, $A_2 = B_u \quad \Longrightarrow$

$$u_{xx} = B_u\,u_x^2 + 2\,B_x\,u_x + A_0 \tag{6}$$

ЛЕММА 3: *Пусть $V = V(x,u)$ удовлетворяет условию*

$$V_u = \exp(-B).$$

*Тогда замена переменных $\widetilde{x} = x$, $\widetilde{u} = V(x,u)$ приводит уравнение (6) к виду*

$$\widetilde{u}_{\widetilde{x}\widetilde{x}} = \widetilde{A}_0(\widetilde{x},\widetilde{u}).$$

Без ограничения общности $A_3 = 0$, $A_2 = 0$, $A_1 = 0$. Тогда $L_1 = 3\,A_{0,uu}$, и из условия $L_{1,u} + A_2 L_1 = 0$ получаем $A_{0,uuu} = 0$, поэтому $A_0 = a_2(x)\,u^2 + a_1(x)\,u + a_0(x)$.

# Случай BBBB: $F = a_2(x)\,u^2 + a_1(x)\,u + a_0(x)$

$$
\begin{aligned}
d\omega_1 &= \eta_1 \wedge \omega_1, \\
d\omega_2 &= -2\,\eta_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \omega_3, \\
d\omega_3 &= -3\,\eta_1 \wedge \omega_3 \\
&\quad + \frac{1}{25\,a_2^2 b_1^2}\left(50\,a_2^3\,u + 25\,a_1 a_2^2 + 5\,a_2 a_{2,xx} - 6\,a_{2,x}^2\right)\,\omega_1 \wedge \omega_2,
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$ нормализация:

$$
b_1 = \tfrac{1}{5}\,a_2^{-1}\,\left|50\,a_2^3\,u + 25\,a_1 a_2^2 + 5\,a_2 a_{2,xx} - 6\,a_{2,x}^2\right|^{1/2}.
$$

# Случай BBBB: $F = a_2(x)\,u^2 + a_1(x)\,u + a_0(x)$

Структурные уравнения:

$$d\omega_1 = -\tfrac{1}{2}\,\omega_1\wedge\omega_2,$$

$$d\omega_2 = P_9\,\tfrac{1}{2}\,\omega_1\wedge\omega_2+\omega_1\wedge\omega_3,$$

$$d\omega_3 = \omega_1\wedge\omega_2+\tfrac{3}{2}\,P_9\,\omega_1\wedge\omega_3-\tfrac{3}{2}\,\omega_2\wedge\omega_3,$$

$$P_9 = -\frac{250\,a_2^4\,u_x + 50\,a_2\,a_{2,x}\,u + 25\,a_2^2 a_{2,xxx}}{\left|50\,a_2^3\,u + 25\,a_1 a_2^2 + 5\,a_2 a_{2,xx} - 6\,a_{2,x}^2\right|^{3/2}}$$

$$+\frac{a_{2,x}\,(105\,a_2 a_{2,xx} - 84\,a_{2,x}^2 + 100\,a_1 a_2^2 - 125\,a_2^3}{\left|50\,a_2^3\,u + 25\,a_1 a_2^2 + 5\,a_2 a_{2,xx} - 6\,a_{2,x}^2\right|^{3/2}}$$

# Случай BBBB: $F = a_2(x)\,u^2 + a_1(x)\,u + a_0(x)$

$$
\begin{aligned}
V_9 = {} & 800\,a_2 a_{2,x} a_{2,xxx} - 125\,a_2^3 a_{2,xxxx} + \tfrac{1075}{2}\,a_2^2 a_{2,xx}^2 \\
& +5\,a_2(125\,a_1 a_2 - 594\,a_{2,x})\,a_{2,xx} + 1782\,a_{2,x}^4 \\
& +1250\,a_2^2 a_{2,x}(a_2 a_{1,x} - a_1 a_{2,x}) - 625\,a_2^4 a_{1,xx} \\
& -1250\,a_0 a_2^5 + \tfrac{625}{2}\,a_1^2 a_2^4
\end{aligned}
$$

- Случай BBBBA: $\quad V_9 \neq 0 \quad \Longrightarrow$

  $$dP_9 = \left(G_9^2 + \tfrac{3}{2}\,P_9^2 - \tfrac{1}{2}\right)\,\omega_1 - \tfrac{3}{2}\,P_9\,\omega_2 - \omega_3$$

  $$G_9 = V_9^{1/2}\,(50\,a_2^3\,u + 25\,a_1 a_2^2 + 5\,a_2 a_{2,xx} - 6\,a_{2,x}^2)^{-1};$$

- Случай BBBBB: $\quad V_9 = 0 \quad \Longrightarrow$

  $$dP_9 = \left(\tfrac{3}{2}\,P_9^2 - \tfrac{1}{2}\right)\,\omega_1 - \tfrac{3}{2}\,P_9\,\omega_2 - \omega_3.$$

  Нормальная форма:

  $$u_{xx} = u^2.$$

# Случай BBBBA: $F = a_2(x)\,u^2 + a_1(x)\,u + a_0(x), \quad V_9 \neq 0$

$$dG_9 = \tfrac{1}{2}\,G_9\,\left(2\,P_9 + H_9\,G_9^{1/2}\right)\,\omega_1 - G_9\,\omega_2,$$

$$H_9 = (5\,a_2\,V_{9,x} - 28\,V_9\,a_{2,x})\,V_9^{-5/4}.$$

Инвариантное дифференцирование:

$$\mathbb{D} = a_2\,V_9^{-1/4}\,\frac{\partial}{\partial x}.$$

Нормальная форма:

$$u_{xx} = u^2 + a_0(x).$$

# Уравнения третьего порядка

Michał Godliński, Geometry of Third-Order Ordinary Differential Equations and Its Applications in General Relativity. PhD thesis, University of Warsaw, 2008. arXiv:0810.2234

$$u_{xxx} = F(x, u, u_x, u_{xx}). \tag{7}$$

- контактные преобразования;
- точечные преобразования;
- преобразования $\widetilde{x} = f(x)$, $\widetilde{u} = g(x, u)$.

# Контактная эквивалентность ОДУ порядка 3

Инвариантные формы:

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & b_3 & 0 & 0 \\ b_4 & b_5 & b_7 & 0 \\ b_8 & b_9 & 0 & b_7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} du - p\,dx \\ dp - q\,dx \\ dq - F(x,u,p,q)\,dx \\ dx \end{pmatrix}$$

Обозначения:

$$K = \frac{1}{6}\,\mathcal{D}(F_q) - \frac{1}{9}\,F_q^2 - \frac{1}{2}\,F_p,$$

$$L = \frac{1}{3}\,(F_{qq}K - F_q K_q - 3\,K_p - F_{uq})$$

$$W = \mathcal{D}(K) - \frac{2}{3}\,F_q\,K + F_u,$$

$$Z = \mathcal{D}(W)\,W^{-1} - F_q,$$

$$\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial x} + p\,\frac{\partial}{\partial u} + q\,\frac{\partial}{\partial p} + F\,\frac{\partial}{\partial q}.$$

# Контактная эквивалентность ОДУ порядка 3

Три класса:

- $W = 0, \quad F_{qqqq} = 0;$
- $W \neq 0;$
- $W = 0, \quad F_{qqqq} \neq 0.$

ТЕОРЕМА 1: *Уравнение (7) контактно эквивалентно уравнению* $u_{xxx} = 0$ *тогда и только тогда, когда* $W = 0$, $F_{qqqq} = 0$.

# Случай $W \neq 0$

Обозначения:

$$P = W^{-2/3}\left(K + \tfrac{1}{18}Z^2 + \tfrac{1}{9}Z\,F_q - \tfrac{1}{3}\mathcal{D}(Z)\right),$$

$$Q = \tfrac{1}{3}b\,W^{-2/3}\left(\tfrac{1}{27}F_{qq}Z^2 + \left(K_q - \tfrac{1}{3}Z_p - \tfrac{2}{9}F_qZ_q\right)Z\right.$$
$$\left. + \left(\tfrac{1}{3}\mathcal{D}(Z) - 2\,K\right)Z_q + Z_u + F_{qq}K - 3\,K_p - K_qF_q - F_{uq} + W_q\right),$$

$$R = \tfrac{1}{9}b\left(3\,F_{qq} + 2\,W^{-1}\left(W_qZ - 3\,W_p - W_qF_q\right)\right),$$

$$S = \tfrac{1}{27}b\,W^{-4/3}\left(W_qZ^2 - 3\,W_pZ + 9\,W_u - 3\,W_q\,\mathcal{D}(Z)\right)$$
$$+\tfrac{1}{9}b\,W^{-1/3}\left(3\,\mathcal{D}(Z_q) + F_qZ_q\right),$$

$$T = \tfrac{1}{9}b^2\,W^{-4/3}\left(2\,W_q^2 - 3\,W\,W_{qq}\right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ: $Q = R = S = T = 0 \Longrightarrow P = \mu(x)$.

# Случай $W \neq 0$

ТЕОРЕМА 2: *Уравнение (7) эквивалентно уравнению*

$$u_{xxx} = -2\,\mu(x)\,u_x + (1-\mu'(x))\,u,$$

*если и только если* $W \neq 0$, $Q = R = S = T = 0$.

Инвариантное дифференцирование: $\mathbb{D} = \frac{\partial}{\partial x}$.

СЛЕДСТВИЕ: *Уравнение (7) линеаризуется тогда и только тогда, когда выполнено одно из двух условий:*

- $W = 0$, $F_{qqqq} = 0$;
- $W \neq 0$, $Q = R = S = T = 0$.

# Случай $W \neq 0$

Пусть $Q^2 + R^2 + S^2 + T^2 \neq 0$.

Нормализации, определяющие параметр $b$:

- $T \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad |T| = 1;$
- $T = 0,\ R \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad R = 1;$
- $T = 0,\ R = 0,\ S \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad S = 1;$
- $T = 0,\ R = 0,\ S = 0 \quad \Longrightarrow \quad Q = 1.$

ТЕОРЕМА 3: *Инвариантные формы имеют вид*

$$\omega_1 = b^{-1}\, W^{1/3}\,(du - p\,dx),$$

$$\omega_2 = b^{-1}\,\left(\tfrac{1}{3}\,Z\,(du - p\,dx) + dp - q\,dx\right),$$

$$\omega_3 = b^{-1}\,W^{1/3}\,\left(\left(K + \tfrac{1}{18}\,Z^2\right)\,(du - p\,dx) + \tfrac{1}{3}\,(Z - F_q)\,(dp - q\,dx)\right.$$
$$\left. + dq - F\,dx\right),$$

$$\omega_4 = \tfrac{1}{9}\,W^{-2/3}\,(Z\,W_q - 3\,W\,Z_q)\,(du - p\,dx) + \tfrac{1}{3}\,W_q W^{-2/3}\,(dp - q\,dx)$$
$$+ W^{1/3}\,dx.$$

# Случай $W = 0$, $F_{qqqq} \neq 0$

Нормализации:

- $2\,L_2F_4 - 3\,K_3^2 \neq 0 \quad \Longrightarrow$

  $b = \left(9\,L_2 - \frac{27}{2}\,K_3^2F_5^{-1}\right)^{1/3};$
- $2\,L_2F_4 - 3\,K_3^2 = 0,\ 5\,F_4F_6 - 6\,F_5^2 \neq 0 \quad \Longrightarrow$

  $b = 25\,F_4^3\,(5\,F_4F_6 - 6\,F_5^2)^{-1};$
- $2\,L_2F_4 - 3\,K_3^2 = 0,\ 5\,F_4F_6 - 6\,F_5^2 = 0,$

  $\frac{1}{3}\,F_2 + \frac{2}{15}\,F_4^{-1}\,(27\,K_4 + 3\,F_{4,p} + F_1F_5) - \frac{12}{5}\,K_3F_5F_4^{-2} \neq 0$
  $\Longrightarrow$

  $b = \frac{1}{3}\,F_2 + \frac{2}{15}\,F_4^{-1}\,(27\,K_4 + 3\,F_{4,p} + F_1F_5) - \frac{12}{5}\,K_3F_5F_4^{-2}$

ЗАМЕЧАНИЕ: Одновременное выполнение условий
$2\,L_2F_4 - 3\,K_3^2 = 0,\ 5\,F_4F_6 - 6\,F_5^2 = 0,$
$\frac{1}{3}\,F_2 + \frac{2}{15}\,F_4^{-1}\,(27\,K_4 + 3\,F_{4,p} + F_1F_5) - \frac{12}{5}\,K_3F_5F_4^{-2} = 0$
противоречит условию $F_4 \neq 0$.

# Случай $W = 0$, $F_{qqqq} \neq 0$

ТЕОРЕМА 4: *Инвариантные формы имеют вид*

$$\omega_1 = \left|b^5 F_4^{-1}\right|^{1/2} (du - p\,dx),$$

$$\omega_2 = b\left(-3\,K_3 F_4^{-1}(du - p\,dx) + dp - q\,dx\right),$$

$$\omega_3 = \left|F_4 b^{-1}\right|^{1/2} \left(\left(K + \tfrac{9}{2}\,K_3^2 F_4^{-2}\right)(du - p\,dx) - \left(\tfrac{1}{3}\,F_1 + 3\,K_3 F_4^{-1}\right)(dp - q\,dx) + dq - F\,dx\right),$$

$$\omega_4 = \left|b^3 F_4^{-1}\right|^{1/2} \left(3\,K_3 F_4^{-2}\left(F_4 - \tfrac{4}{5}\,F_5\right)(du - p\,dx) - \tfrac{1}{5}\,F_5 F_4^{-1}(dp - q\,dx) + dx\right).$$