Гомологии и интегрируемые структуры

Иосиф Красильщик (Независимый московский университет)

24 марта 2010 г.

План

- Пример: уравнение Кортевега–де Фриза
- Геометрический язык джетов
- Спектральная последовательность
- Лагранжев формализм на джетах
- Гамильтонов формализм на джетах
- Уравнения

Ссылки

- Joseph Krasil′shchik, *Alexander Verbovetsky, Geometry of jet spaces and integrable systems*, `arXiv:1002.0077`

Пример: КдВ

Уравнение Кортевега–де Фриза

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{1}$$

Пример: КдВ (коммутирующие потоки – высшие КдВ)

Существует бесконечно много потоков, коммутирующих с КдВ:

$$\begin{cases} u_{t_0} = u_x, \\ u_{t_1} = u_{xxx} - 6uu_x, \\ u_{t_2} = u_{xxxxx} - 6uu_{xxx} - 8u_x u_{xx} - 6u_x^2, \\ \dots \end{cases} \tag{2}$$

Пример: КдВ (оператор рекурсии)

Эти потоки можно получить с помощью оператора

$$\mathcal{R} = D_x^2 - 4u - 2u_x D_x^{-1} \colon \varphi_i \mapsto \varphi_{i+1}, \tag{3}$$

где

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u} + u_{xx} \frac{\partial}{\partial u_x} + \dots \tag{4}$$

Пример: КдВ (сохраняющиеся токи)

Существует бесконечно много величин, сохраняющихся на решениях уравнения КдВ:

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} X(u, u_x, \dots)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} D_t X(u, u_x, \dots)\, dx = 0, \qquad (5)$$

где

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + (6uu_x - u_{xxx})\frac{\partial}{\partial u} + D_x(6uu_x - u_{xxx})\frac{\partial}{\partial u_x} + \dots \qquad (6)$$

— производная по времени «в силу уравнения».

Пример: КдВ (производящие функции)

Как эти токи эффективно вычислить?
Сопоставим каждому X функцию

$$\psi_X = \frac{\delta X}{\delta u}, \tag{7}$$

где

$$\frac{\delta}{\delta u} = \frac{\partial}{\partial u} - D_x \circ \frac{\partial}{\partial u_x} + D_x^2 \circ \frac{\partial}{\partial u_{xx}} - \dots \tag{8}$$

— оператор Эйлера (вариационная производная).

Пример: КдВ (второй оператор рекурсии)

Тогда производящие функции сохраняющихся токов можно получить следующим образом:

$$\psi_0 = 1$$

и

$$\psi_{i+1} = \mathcal{R}^\bullet \psi_i, \tag{9}$$

где

$$\mathcal{R}^\bullet = D_x^2 - 4u + 2D_x^{-1} \circ u_x. \tag{10}$$

Пример: КдВ (связь между производящими функциями и высшими КдВ, гамильтоновы структуры)

Операторы

$$\mathcal{H}_1 = D_x \tag{11}$$

и

$$\mathcal{H}_2 = D_x^3 - 4uD_x - 2u_x \tag{12}$$

переводят производящие функции сохраняющихся токов в высшие уравнения КдВ. При этом

$$\mathcal{R} = \mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1^{-1}. \tag{13}$$

Пример: КдВ (связь между производящими функциями и высшими КдВ, симплектические структуры)

Операторы

$$\mathcal{S}_1 = D_x^{-1} \tag{14}$$

и

$$\mathcal{S}_2 = D_x - 2uD_x^{-1} - 2D_x \circ u \tag{15}$$

переводят высшие КдВ в производящие функции сохраняющихся токов. При этом

$$\mathcal{R}^{\bullet} = \mathcal{S}_2 \circ \mathcal{S}_1^{-1}. \tag{16}$$

Пример: КдВ (бигамильтоново представление)

Более того, уравнение КдВ можно представить в виде

$$u_t = \mathcal{H}_1 \frac{\delta}{\delta u}\left(u^3 - \frac{1}{2}u_x^2\right) \tag{17}$$

и

$$u_t = \mathcal{H}_2 \frac{\delta}{\delta u}\left(-\frac{1}{2}u^2\right). \tag{18}$$

При этом равенства

$$\{X, X'\}_i = \mathit{Э}_{\mathcal{H}_i \frac{\delta X}{\delta u}} X' \tag{19}$$

определяют две скобки Пуассона на пространстве сохраняющихся токов, и эти скобки совместны. Здесь

$$\mathit{Э}_\varphi = \varphi \frac{\partial}{\partial u} + D_x(\varphi)\frac{\partial}{\partial u_x} + D_x^2(\varphi)\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \dots \tag{20}$$

— эволюционное дифференцирование.

Пример: КдВ

Собирая воедино, получаем

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{sym} \arrow[r, shift left, "\mathcal{S}_1"] \arrow[d, "\mathcal{R}=\mathcal{H}_2\circ\mathcal{H}_1^{-1}"'] & \mathrm{cosym} \arrow[l, shift left, "\mathcal{H}_1"] \arrow[d, "\mathcal{R}=\mathcal{S}_2\circ\mathcal{S}_1^{-1}"] & CL \arrow[l, "\frac{\delta}{\delta u}"'] \\
\mathrm{sym} \arrow[r, shift left, "\mathcal{S}_2"] & \mathrm{cosym} \arrow[l, shift left, "\mathcal{H}_2"] & CL \arrow[l, "\frac{\delta}{\delta u}"]
\end{tikzcd}$$

Геометрический язык (джеты)

Простейший случай — джеты сечений векторных локально-тривиальных расслоений.
Пусть

$$\begin{array}{ccc} E & u^1, \dots, u^m & \text{(неизвестные функции)} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \pi} & & \\ M & x^1, \dots, x^n & \text{(независимые переменные)} \end{array}$$

Точки множества $J^k(\pi)$ — классы $[f]_x^k$ локальных сечений π, касающихся с порядком k, $x \in M$.
Джеты сечений: $j_k(f)\colon x \mapsto [f]_x^k$.

Локальные координаты (на $J^k(\pi)$)

$$u_\sigma^j\big|_{j_k(f)} = \frac{\partial^{|\sigma|} f^j}{\partial x^\sigma}, \qquad |\sigma| \le k.$$

Геометрический язык (джеты)

Естественные проекции

$$\pi_k\colon J^k(\pi) \to M, \qquad [f]_x^k \mapsto x,$$

и

$$\pi_{k,l}\colon J^k(\pi) \to J^l(\pi), \qquad [f]_x^k \mapsto [f]_x^l, \quad k \geq l.$$

Пространство $J^\infty(\pi)$ — обратный предел цепочки

$$\cdots \longrightarrow J^k(\pi) \longrightarrow J^{k-1}(\pi) \longrightarrow \cdots \longrightarrow E = J^0(\pi) \longrightarrow M$$

Функции на $J^\infty(\pi)$: $\mathcal{F}(\pi) = \cup_k C^\infty(J^k(\pi))$.
Любой $\varphi \in \mathcal{F}(\pi)$ сопоставляется

$$\Delta_\varphi\colon \Gamma(\pi) \to C^\infty(M), \quad \Delta_\varphi(f) = \left.\varphi\right|_{j_\infty(f)}.$$

Геометрический язык (распределение Картана)

Пусть $\theta \in J^k(\pi)$, $k = 0, 1, \ldots .\infty$. Плоскость Картана $\mathcal{C}_\theta \subset T_\theta J^k(\pi)$ — это линейная оболочка касательных плоскостей к графикам джетов, проходящим через θ.
Соответствие $\mathcal{C} : \theta \mapsto \mathcal{C}_\theta$ — распределение Картана.

Теорема

Пусть $k = \infty$. Тогда

1. *Распределение Картана вполне интегрируемо, т.е. $[\mathcal{C}, \mathcal{C}] \subset \mathcal{C}$.*
2. $\dim \mathcal{C} = \dim M$.
3. *Его максимальные интегральные многообразия суть графики джетов.*

Локальные координаты

1. Формы Картана: $du^j_\sigma - \sum_i u^j_{\sigma i}\, dx^i$.
2. Полные производные $D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{j,\sigma} u^j_{\sigma i} \frac{\partial}{\partial u^j_\sigma}$.

Геометрический язык (эволюционные поля)

Пусть $\mathcal{C}(\pi)$ — множество векторных полей, лежащих в распределении Картана. Тогда

$$\{\, X \mid [X, \mathcal{C}(\pi)] \subset \mathcal{C}(\pi) \,\}$$

— алгебра Ли и $\mathcal{C}(\pi)$ — её идеал. Элементы фактор-алгебры $\operatorname{sym}\pi$ называются симметриями распределения Картана. Пусть $\varkappa(\pi) = \Gamma(\pi_\infty^*(\pi))$.

Геометрический язык (эволюционные поля)

Теорема

1. *В каждом классе смежности существует канонический вертикальный представитель.*
2. *Существует взаимно-однозначное соответствие между вертикальными симметриями и* $\varkappa(\pi)$.

Локальные координаты

$$\varphi \in \varkappa(\pi) \mapsto \mathcal{Э}_\varphi = \sum_{j,\sigma} D_\sigma(\varphi^j)\frac{\partial}{\partial u_\sigma^j}$$

Поле $\mathcal{Э}_\varphi$ называется эволюционным. Структура алгебры Ли на $\varkappa$ (скобка Якоби):

$$[\mathcal{Э}_\varphi, \mathcal{Э}_{\varphi'}] = \mathcal{Э}_{\{\varphi,\varphi'\}}. \tag{21}$$

Геометрический язык (линеаризации)

Пусть $\varphi \in \varkappa$ и $f \in \mathcal{F}$:

$$\ell_f(\varphi) = \mathcal{Э}_\varphi(f), \qquad \ell_f \colon \varkappa \to \mathcal{F}.$$

Локальные координаты

$$\ell_f = \left(\ldots, \sum_\sigma \frac{\partial f}{\partial u^j_\sigma} D_\sigma, \ldots\right), \qquad j = 1, \ldots, \dim \pi.$$

Пусть $\pi' \colon E \to M$, $\dim \pi' = m'$. Сечения $f \in \Gamma(\pi^*_\infty(\pi'))$ — нелинейные ДО из $\Gamma(\pi)$ в $\Gamma(\pi')$. Линеаризация $\ell_f \colon \varkappa(\pi) \to \Gamma(\pi^*_\infty(\pi'))$.

Локальные координаты

$$\ell_f = \begin{pmatrix} \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \sum_\sigma \frac{\partial f^\alpha}{\partial u^\beta_\sigma} D_\sigma & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \tag{22}$$

Геометрический язык (горизонтальные джеты)

Пусть ξ — расслоение над $J^\infty(\pi)$. Два сечения эквивалентны в точке $\theta \in J^\infty(\pi)$, если все их полные производные совпадают. Множество классов эквивалентности образует многообразие горизонтальных джетов, $\xi_\infty\colon J_h^\infty(\xi) \to J^\infty(\pi)$. Распределение Картана $\mathcal{C}_h(\xi)$ проектируется в $\mathcal{C}(\pi)$. Всякому сечению $s \in \Gamma(\xi)$ сопоставляется его горизонтальный джет $j_\infty^h\colon J^\infty(\pi) \to J_h^\infty(\xi)$. Если $\xi = \pi_\infty^*(\pi')$, то

$$J_h^\infty(\xi) = J^\infty(\pi) \times_M J^\infty(\pi'). \tag{23}$$

Геометрический язык ($\mathcal{C}$-дифференциальные операторы)

Пусть ξ, ξ' — расслоения над $J^\infty(\pi)$. $\mathbb{R}$-линейное отображение $\Delta\colon \Gamma(\xi) \to \Gamma(\xi')$ — $\mathcal{C}$-дифференциальный оператор, если для любого $s \in \Gamma(\xi)$ и любой $\theta \in J^\infty(\pi)$ значение $\Delta(s)$ в θ определяется горизонтальным джетом сечение s в точке θ.
Обозначение: $\mathcal{CD}(\xi, \xi')$

Пример

Линеаризации суть $\mathcal{C}$-дифференциальные операторы.

Локальные координаты

$\mathcal{C}$-дифференциальные операторы — это операторы в полных производных.

Геометрический язык ($\mathcal{C}$-дифференциальные операторы и горизонтальные джеты)

Теорема

Для любого $\Delta \in \mathcal{CD}(\xi, \xi')$ *существует единственный морфизм* Φ_Δ*, для которого диаграмма*

$$\begin{tikzcd} J_h^\infty(\xi) \arrow[rr, "\Phi_\Delta"] \arrow[dr, "\xi_\infty"'] & & E_{\xi'} \arrow[dl, "\xi'"] \\ & J^\infty(\pi) & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Когомологии ($\mathcal{C}$-спектральная последовательность)

Пусть $\Lambda^*(\pi)$ — алгебра дифференциальных форм на $J^\infty(\pi)$. Тогда

$$\Lambda^1(\pi) = \Lambda^1_h \oplus \Lambda^1_v,$$

где Λ^1_h — горизонтальные формы, Λ^1_v — «вертикальные» формы (формы Картана). Соответственно,

$$\Lambda^k = \oplus_{p+q=k} \Lambda^{p,q}, \qquad \Lambda^{p,q} = \Lambda^p_v \otimes \Lambda^q_h,$$

и

$$d = d_h^{p,q} + d_v^{p,q}, \quad d_h^{p,q} \colon \Lambda^{p,q} \to \Lambda^{p,q+1}, \quad d_v^{p,q} \colon \Lambda^{p,q} \to \Lambda^{p+1,q},$$

и

$$[d_h, d_v] = d_h \circ d_v + d_v \circ d_h = 0. \tag{24}$$

В силу (24) возникает бикомплекс. Спектральная последовательность сходится к когомологиям де Рама $J^\infty(\pi)$.

Когомологии ($\mathcal{C}$-спектральная последовательность)

Локальные координаты

$$\Lambda_h^1 = \{\sum_i a_i\,dx^i\}, \quad a_i \in \mathcal{F}(\pi), \tag{25}$$

$$\Lambda_v^1 = \{\sum_i b_j^\sigma \omega_\sigma^j\}, \quad a_j^\sigma \in \mathcal{F}(\pi), \quad \omega_\sigma^j = du_\sigma^j - \sum_i u_{\sigma i}^j\,dx^i, \tag{26}$$

$$d_h(f) = \sum_i D_i(f)\,dx^i, \tag{27}$$

$$d_v(f) = \sum_{j,\sigma} \frac{\partial f}{\partial u_\sigma^j}\omega_\sigma^j. \tag{28}$$

Замечание

Элементы $\Lambda^{p,q}$ отождествляются с p-линейными кососимметрическими $\mathcal{C}$-дифференциальными операторами из $\varkappa$ в Λ_h^q.

Когомологии (сопряжённые операторы)

Пусть P, Q — модули над $\mathcal{F}(\pi)$ и $\Delta \in \mathcal{CD}(P, Q)$. Положим $\hat{P} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P, \Lambda_h^n)$. Тогда определён сопряжённый оператор $\Delta^* \in \mathcal{CD}(\hat{Q}, \hat{P})$, задаваемый формулой Грина

$$\langle \Delta(p), \hat{q} \rangle - \langle p, \Delta^*(\hat{q}) \rangle = d_h \omega(p, \hat{q}), \tag{29}$$

где $p \in P$, $\hat{q} \in \hat{Q}$, $\omega \colon P \times \hat{Q} \to \Lambda_h^{n-1}$ — $\mathcal{C}$-дифференциальный по обоим аргументам оператор.

Локальные координаты

Если $\Delta = \sum_\sigma a_\sigma D_\sigma$ — скалярный оператор, то

$$\Delta^* = \sum_\sigma (-1)^{|\sigma|} D_\sigma \circ a_\sigma. \tag{30}$$

Для матричных операторов

$$(\Delta_{\alpha\beta})^* = (\Delta^*_{\alpha\beta})^t. \tag{31}$$

Когомологии ($\mathcal{C}$-спектральная последовательность, член E_1)

Теорема (об одной строчке)

$\mathcal{C}$-спектральная последовательность сходится к когомологиям де Рама многообразия M. Пусть $\dim M = n$ и M гомологически тривиально. Тогда:

1. $E_1^{0,0} = \mathbb{R}$.
2. $E_1^{0,n} = H_h^n$ *(n-я горизонтальная когомология).*
3. *При $p > 0$* $E_1^{p,n} = \mathcal{CD}_{p-1}^{\mathrm{sk-ad}}(\varkappa, \hat{\varkappa})$ *(операторы*

$$\Delta\colon \underbrace{\varkappa \times \cdots \times \varkappa}_{p-1 \text{ раз}} \to \hat{\varkappa},$$

(p-1)-линейные, кососимметрические, $\mathcal{C}$-дифференциальные и кососопряжённые по каждому аргументу).

4. *Остальные клетки тривиальны.*

Когомологии (вариационный комплекс)

Введём обозначение $\Omega^p(\pi) = E_1^{p,n}$. Пусть δ — дифференциал в члене E_1. Тогда комплекс

$$0 \longrightarrow \Omega^0 \xrightarrow{\delta} \Omega^1 \xrightarrow{\delta} \cdots \xrightarrow{\delta} \Omega^p \xrightarrow{\delta} \cdots \tag{32}$$

точен. Если $\omega \in \Omega^0$, то

$$\delta(\omega) = \ell_\omega^*(1) \quad (\text{оператор Эйлера}). \tag{33}$$

При $p > 0$

$$(\delta\Delta)(\varphi_1, \ldots, \varphi_p) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1} \ell_{\Delta,\varphi_1,\ldots,\hat{\varphi}_i,\ldots,\varphi_p}(\varphi_i) + (-1)^p \ell^*_{\Delta,\varphi_1,\ldots,\varphi_{p-1}}(\varphi_p), \tag{34}$$

где $\ell_{\Delta,\varphi_1,\ldots,\varphi_k}(\varphi) = Э_\varphi(\Delta)(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$. В частности, при $p = 1$

$$\delta(\psi) = \ell_\psi - \ell_\psi^*. \tag{35}$$

Когомологии (лагранжев формализм)

Элементы Ω^0 — классы лагранжианов.

- Функционал действия[1] $s \mapsto \int_M \mathcal{L}|_{j_\infty(s)}$ стационарен на s тогда и только тогда, когда s решение уравнения Эйлера–Лагранжа: $\delta\mathcal{L}|_{j_\infty(s)} = 0$.
- Тривиальные лагранжианы $\mathcal{L} \in \Lambda_h^n$ суть полные дивергенции, т.е. $\mathcal{L} = d_h^{0,n-1}\omega$.
- Нулевые дивергенции суть полные роторы, т.е. из $d_h^{0,n-1}\omega = 0$ следует $\omega = d_n 0, n-2$.
- Оператор $\Delta_\psi \colon \varkappa \to \hat{\varkappa}$, $\psi \in \Omega^1$, — оператор Эйлера–Лагранжа тогда и только тогда, когда $\ell_\psi = \ell_\psi^*$ (условие Гельмгольца).

[1]Интегрирование — это вычисление класса когомологий формы $\mathcal{L}|_{j_\infty(s)}$

«Две геометрии», I

Дифференциальная геометрия	Вариационная геометрия
точки	сечения расслоения π (поля́)
функции	лагранжианы
значение функции	интеграл (класс когомологий)
векторные поля	эволюционные поля
касательное расслоение	расслоение $J_h^\infty(\varkappa) \to J^\infty(\pi)$
дифференциальные формы	вариационные формы $\Omega^\bullet(\pi)$
комплекс де Рама	вариационный комплекс

Когомологии (гамильтонов формализм)

Объект, двойственный вариационным формам, вариационные мультивекторы:

$$\mathcal{D}_p = \begin{cases} \mathcal{CD}_{p-1}^{\mathrm{sk-ad}}(\hat{\varkappa}, \varkappa), & p > 0, \\ \Omega^0, & p = 0. \end{cases} \tag{36}$$

Вариационная скобка Схоутена

$$[\![\cdot\,,\cdot]\!] \colon \mathcal{D}_p \times \mathcal{D}_q \to \mathcal{D}_{p+q-1}$$

определяется по индукции. Если $B \in \mathcal{D}_0$, то

$$[\![A, B]\!] = (-1)^p [\![B, A]\!] = A(\delta B), \tag{37}$$

если p, $q > 1$ и $\psi \in \hat{\varkappa}$, то

$$[\![A, B]\!](\psi) = [\![A, B(\psi)]\!] + (-1)^q [\![A(\psi), B]\!]. \tag{38}$$

Когомологии (гамильтонов формализм)

Стандартные свойства

$$
\begin{aligned}
&[\![A, B]\!] + (-1)^{(p-1)(q-1)}[\![B, A]\!] = 0,\\
&(-1)^{(p-1)(r-1)}[\![[\![A, B]\!], C]\!] + (-1)^{(q-1)(p-1)}[\![[\![B, C]\!], A]\!]\\
&\qquad + (-1)^{(r-1)(q-1)}[\![[\![C, A]\!], B]\!] = 0.
\end{aligned}
$$

Гамильтонов оператор $A\colon \hat{\varkappa} \to \varkappa$, $A \in \mathcal{D}_2$ (пуассонова структура):

$$[\![A, A]\!] = 0. \tag{39}$$

Скобка Пуассона на $H^n_h(\pi)$

$$\{\omega, \omega'\}_A = \langle A(\delta\omega), \delta\omega'\rangle. \tag{40}$$

Две плотности в инволюции, если $\{\omega, \omega'\}_A = 0$.

Когомологии (гамильтонов формализм)

Стандартные свойства:

$$\{\omega, \omega'\}_A + \{\omega', \omega\}_A = 0,$$
$$\{\{\omega, \omega'\}_A, \omega''\}_A + \{\{\omega', \omega''\}_A, \omega\}_A + \{\{\omega'', \omega\}_A, \omega'\}_A = 0,$$
$$A_{\{\omega,\omega'\}_A} = \{A_\omega, A_{\omega'}\},$$

где $A_\omega = A(\delta\omega)$.

Гамильтонов комплекс

$$0 \longrightarrow H_h^n \xrightarrow{\partial_A} \mathcal{D}_1 \xrightarrow{\partial_A} \cdots \xrightarrow{\partial_A} \mathcal{D}_p \xrightarrow{\partial_A} \cdots,$$

где $\partial_A(B) = [\![A, B]\!]$.

Когомологии (гамильтонов формализм)

Поле ∂_φ называется гамильтоновым, если $\varphi \in \ker \partial_A$, т.е.

$$\partial_\varphi(\{\omega, \omega'\}_A) = \{\partial_\varphi \omega, \omega'\}_A + \{\omega, \partial_\varphi \omega'\}_A, \quad \omega, \omega' \in H^n_h.$$

Если $\varphi = \partial_A \theta = A(\delta\theta)$, то θ — гамильтониан.
Первый интеграл: $\partial_\varphi \omega = 0$. Множество первых интегралов замкнуто относительно скобки Пуассона.
Симметрия: $[\partial_{\varphi'}, \partial_\varphi] = 0$. Множество симметрий замкнуто относительно коммутатора.

Предложение

Если поле гамильтоново, то оператор $\partial_A = A \circ \delta \colon H^n_h \to \mathcal{D}_1$ переводит первые интегралы в симметрии, сохраняя структуру алгебры Ли.

Когомологии (бигамильтоновы структуры)

Два гамильтоновых оператора совместны, если $[\![A, B]\!] = 0$, или $[\partial_A, \partial_B] = 0$ (бигамильтонова пара).

Теорема (схема Магри)

Пусть гамильтонов комплекс для A ацикличен в члене $\mathcal{D}_1$ (т.е. любое гамильтоново поле обладает гамильтонианом) и существуют такие ω_1, ω_2, что $\partial_A \omega_1 = \partial_B \omega_2$. Тогда существуют такие $\omega_3, \dots, \omega_s, \dots$, что

$$\partial_A \omega_s = \partial_B \omega_{s+1}$$

и

$$\{\omega_\alpha, \omega_\beta\}_A = \{\omega_\alpha, \omega_\beta\}_B = 0$$

для всех α, $\beta \geq 1$.

Пример

Уравнение Кортевега–де Фриза.

Гамильтонов формализм (координаты)

Пусть

$$A = \Big(\sum_\sigma a^{ij}_\sigma D_\sigma\Big), \quad B = \Big(\sum_\sigma b^{ij}_\sigma D_\sigma\Big), \quad i,j = 1,\ldots,m = \dim\pi \tag{41}$$

— косопряжённые матричные операторы. Пусть

$$W_A = \sum_{\sigma,i,j} a^{ij}_\sigma p^i_\sigma p^j, \qquad W_B = \sum_{\sigma,i,j} b^{ij}_\sigma p^i_\sigma p^j, \tag{42}$$

где p^j_σ — нечётные переменные. Условие гамильтоновости:

$$\delta\Big(\sum_i \frac{\delta W_A}{\delta u^i}\frac{\delta W_A}{\delta p^i}\Big) = 0; \tag{43}$$

условие совместности

$$\delta\big(\sum_i \Big(\frac{\delta W_A}{\delta u^i}\frac{\delta W_B}{\delta p^i} + \frac{\delta W_B}{\delta u^i}\frac{\delta W_A}{\delta p^i}\Big)\big) = 0. \tag{44}$$

Гамильтонов формализм (симплектические структуры)

Пусть $S \in \Omega^2$ — замкнутая вариационная форма. Она называется симплектической структурой для эволюционного поля $\mathcal{Э}_\varphi$, если $\mathcal{Э}_\varphi(S) = 0$. Как $\mathcal{C}$-дифференциальный оператор, она действует следующим образом

$$S \colon \varkappa \to \hat{\varkappa}$$

и переводит симметрии поля $\mathcal{Э}_\varphi$ в его первые интегралы. Назовём элемент $\psi \in \hat{\varkappa}$ допустимым, если $\psi \in \operatorname{im} S$. На множестве допустимых элементов определена скобка Пуассона

$$\{\psi, \psi'\}_S = S(\psi, \psi').$$

«Две геометрии», II

Дифференциальная геометрия	Вариационная геометрия
мультивекторы	вариационные мультивекторы
скобка Схоутена	вариационная скобка Схоутена
пуассонова структура	гамильтонов оператор
кокасательное расслоение	расслоение $J^\infty_h(\hat{\varkappa}) \to J^\infty(\pi)$

«Две геометрии» ($p\,dq$ на вариационном кокасательном пространстве)

Вариационные аналоги T и T^*:

$$\mathcal{T}(\pi) = J_h^\infty(\varkappa) = J^\infty(\pi \times_M \pi), \quad \mathcal{T}^*(\pi) = J_h^\infty(\hat{\varkappa}) = J^\infty(\pi \times_M \hat{\pi}),$$

где $\hat{\pi} = \mathrm{Hom}(\pi, \bigwedge^n T^*)$. Модуль вариационных 1-форм на $\mathcal{T}^*$:

$$\Omega^1(\mathcal{T}^*) = \hat{\varkappa}(\pi \times_M \hat{\pi}) = \hat{\varkappa}(\pi) \times_{J^\infty(\pi)} \varkappa(\pi).$$

Каноническая вариационная 1-форма (аналог $p\,dq$) определяется равенством

$$\rho_\pi\big|_{j_\infty(\psi)} = (\psi, 0), \tag{45}$$

где $\psi \in \hat{\pi}$.

«Две геометрии» ($dp \wedge dq$ на вариационном кокасательном пространстве)

Модуль вариационных полей на $\mathcal{T}^*$:

$$\mathcal{D}_1(\mathcal{T}^*) = \varkappa(\pi \times_M \hat{\pi}) = \varkappa(\pi) \times_{J^\infty(\pi)} \hat{\varkappa}(\pi).$$

Поэтому вариационные 2-формы на $\mathcal{T}^*$ — это кососопряжённые операторы

$$\mathcal{D}_1(\mathcal{T}^*) = \varkappa(\pi) \times_{J^\infty(\pi)} \hat{\varkappa}(\pi) \to \Omega^1(\mathcal{T}^*) = \hat{\varkappa}(\pi) \times_{J^\infty(\pi)} \varkappa(\pi).$$

Положим

$$\omega_\pi(\varphi, \psi) = (-\psi, \varphi). \tag{46}$$

Это — каноническая 2-форма на $\mathcal{T}^*$ (аналог $dp \wedge dq$).

«Две геометрии» (скобки)

Оператор

$$S_\pi = \omega_\pi^{-1} \colon \Omega(\mathcal{T}^*) \to \mathcal{D}_1(\mathcal{T}^*)$$

— это канонический вариационный бивектор на $\mathcal{T}^*$. Слои кокасательного расслоения можно считать чётными или нечётными:

$$\langle S_\pi(\delta\omega_1), \omega_2\rangle = \begin{cases} \{\omega_1, \omega_2\} \text{ — скобка Пуассона (чётный случай)}, \\ [\![\omega_1, \omega_2]\!] \text{ — скобка Схоутена (нечётный случай)}. \end{cases}$$

Замечание

Соответствие $A \mapsto W_A$ (см. (42)) — это сопоставление бивектору на $J^\infty(\pi)$ кососимметрической квадратичной функции (т.е. горизонтальной n-формы)на $\mathcal{T}^*$.

Геометрический язык (уравнения)

Рассмотрим в $J^k(\pi)$ подмногообразие, заданное условиями $F_s(x^i, u^j_\sigma) = 0$, и все его продолжения

$$D_\sigma(F_s) = 0. \tag{47}$$

Определённый этими условиями подмножество $\mathcal{E} \subset J^\infty(\pi)$ будем называть дифференциальным уравнением. Всегда можно считать, что $\mathcal{E} = \{F = 0\}$, $F \in P$, где P — модуль сечений некоторого векторного расслоения над $J^\infty(\pi)$. Будем предполагать выполнение двух условий.

Регулярность: если $f|_{\mathcal{E}} = 0$, то $f = \Delta(F)$ для некоторого $\Delta \in \mathcal{CD}(P, \mathcal{F})$. Кроме того, будем считать, что $\pi_\infty(\mathcal{E}) = J^0(\pi)$.

Нормальность: для любого $\Delta \in \mathcal{CD}(P, \mathcal{F})$ равенство $\Delta(F) = 0$ влечёт $\Delta|_{\mathcal{E}} = 0$.

Геометрический язык (уравнения)

Пример

1. Уравнение КдВ — это уравнение в расслоении $\pi\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, задаваемое условиями
$$u_{t\sigma} = D_\sigma(6uu_x - u_{xxx}).$$
2. Его же можно понимать как уравнение в расслоении $\pi\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, задаваемое условиями
$$u_x - v = 0, \quad v_x - w = 0, \quad w_x + u_t - 6uv = 0$$
и их продолжениями. Оба уравнения нормальны.
3. Уравнение
$$u_y - v_x = 0, \quad u_z - w_x = 0, \quad v_z - w_y = 0$$
не является нормальным (как и все калибровочные уравнения).

Геометрический язык (распределение Картана)

В силу (47), полные производные ограничиваются с $J^\infty(\pi)$ на $\mathcal{E}$ и порождают интегрируемое распределение Картана $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{E})$. Его максимальные интегральные многообразия — решения $\mathcal{E}$. Любой $\mathcal{C}$-дифференциальный оператор тоже ограничивается на $\mathcal{E}$.
Уравнения $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ эквивалентны, если существует диффеоморфизм $\Phi\colon : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$, переводящий $\mathcal{C}$ в $\mathcal{C}'$.
Симметрии $\mathcal{C}$ — это симметрии уравнения. Они образуют алгебру Ли, обозначаемую $\mathrm{sym}(\mathcal{E})$.
На $\mathcal{E}$ определены картановские и горизонтальные формы и бикомплекс $(\Lambda^{p,q}(\mathcal{E}), d_h^{p,q}, d_v^{p,q})$. Пусть $E_r^{p,q}(\mathcal{E})$ — соответствующая спектральная последовательность ($\mathcal{C}$-спектральная последовательность).
Замкнутая относительно d_h форма $\omega \in \Lambda_h^{n-1}$ называется законом сохранения. Закон сохранения тривиален, если $\omega = d_h\theta$. Таким образом, пространство $\mathrm{cl}(\mathcal{E})$ нетривиальных законов сохранения отождествляется с $H_h^{n-1}(\mathcal{E})$.

Когомологии (спектральная последовательность)

Рассмотрим член $E_1(\mathcal{E})$.

Теорема (о двух строчках)

$\mathcal{C}$-спектральная последовательность сходится к когомологиям де Рама пространства $\mathcal{E}$. Если $\mathcal{E}$ гомологически тривиально и нормально, то все клетки $E_1^{p,q}$ тривиальны, кроме $E_1^{p,n-1}$, $E_1^{p,n}$ и $E_1^{0,0}$.

Рассмотрим $(n-1)$-ю строчку и положим $E_1^{p,n-1} = \Omega^p(\mathcal{E})$. Комплекс

$$0 \longrightarrow \Omega^0 \xrightarrow{\delta} \Omega^1 \xrightarrow{\delta} \cdots \xrightarrow{\delta} \Omega^p \xrightarrow{\delta} \cdots \tag{48}$$

назовём вариационным комплексом уравнения $\mathcal{E}$, а элементы модулей $\Omega^p(\mathcal{E})$ — вариационными p-формами на $\mathcal{E}$.

Когомологии (описание вариационного комплекса)

Положим $\varkappa(\mathcal{E}) = \varkappa(\pi)|_{\mathcal{E}}$ и $\hat{\varkappa}(\mathcal{E}) = \hat{\varkappa}(\pi)|_{\mathcal{E}}$. Пусть $\mathcal{E}$ — нули сечения $F \in P$ и $\ell_{\mathcal{E}} = \ell_F|_{\mathcal{E}}$.

Теорема

Комплекс (48) точен в первых двух членах. При этом

1. $\Omega^0 = \mathrm{cl}(\mathcal{E})$.
2. $\Omega^1 = \ker \ell_{\mathcal{E}}^*$.
3. $\Omega^p = \Theta^p/\bar{\Theta}^p$, $p > 1$, *где* Θ^p *состоит из таких* $\Delta \in \mathcal{CD}_{p-1}^{\mathrm{sk}}(\varkappa, \hat{P})$, *что*

$$\ell_{\mathcal{E}}^* \Delta(\varphi_1, \ldots, \varphi_{p-1}) - \sum_{k=1}^{p-1} \Delta^{*_k}(\varphi_1, \ldots, \ell_{\mathcal{E}}(\varphi_k), \ldots, \varphi_{p-1}) = 0,$$

а $\bar{\Theta}^p$ *состоит из операторов* $\Delta \in \mathcal{CD}_{p-1}^{\mathrm{sk}}(\varkappa, \hat{P})$ *вида*

$$\Delta(\varphi_1, \ldots, \varphi_{p-1}) = \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{k+1} \nabla(\ell_{\mathcal{E}}(\varphi_k), \varphi_1, \ldots, \hat{\varphi}_k \ldots, \varphi_{p-1}),$$

где $\nabla \colon P \times \varkappa \times \ldots \varkappa \to \hat{P}$, $\varphi_i \in \varkappa$ *и* Δ^{*_k} *— сопряжение по*

Когомологии (описание вариационного комплекса)

В частности,

$$\Omega^2(\mathcal{E}) = \frac{\{\,\Delta \in \mathcal{CD}(\varkappa, \hat{P}) \mid \ell_{\mathcal{E}}^*\Delta = \Delta^*\ell_{\mathcal{E}}\,\}}{\{\,\nabla\ell_{\mathcal{E}} \mid \nabla \in \mathcal{CD}(P, \hat{P}), \nabla^* = \nabla\,\}}. \tag{49}$$

Дифференциал $\delta\colon \Omega^0 \to \Omega^1$ вычисляется следующим образом. Пусть $\omega \in \Omega^0$. Значит, $d_h\omega = 0$ и, в силу нормальности, $d_h\omega = \nabla(F)$ на $J^\infty(\pi)$. Тогда

$$\delta\omega = \nabla^*(1)|_{\mathcal{E}}\,. \tag{50}$$

При $p > 0$ дифференциал вычисляется так:

$$(\delta\Delta)(\varphi_1, \ldots, \varphi_p) = \sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1}\ell_{\Delta,\varphi_1,\ldots,\hat{\varphi}_k,\ldots,\varphi_p}(\varphi_k) + \nabla^{*_1}|_{\mathcal{E}}\,(\varphi_1, \ldots, \varphi_p), \tag{51}$$

где $\nabla\colon P \times \varkappa \times \cdots \times \varkappa \to \hat{\varkappa}$ находится из аналогичного условия

$$\ell_F^*\Delta(\varphi_1, \ldots, \varphi_{p-1}) - \sum_{k=1}^{p-1}\Delta^{*_k}(\varphi_1, \ldots, \ell_F(\varphi_k), \ldots, \varphi_{p-1}) = \nabla(F, \varphi_1, \ldots, \varphi_{p-1}).$$

Когомологии (вычисление законов сохранения)

Дифференциал $\delta\colon \Omega^0 = \mathrm{cl}(\mathcal{E}) \to \Omega^1$ сопоставляет всякому закону сохранения ω элемент $\psi_\omega \in \hat{P}$ называемый производящей функцией (или характеристикой) и удовлетворяющий уравнению

$$\ell^*_{\mathcal{E}}(\psi_\omega) = 0 \tag{52}$$

(в случае эволюционных уравнений характеристика — это результат применения оператора Эйлера к коэффициенту при $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$). Решения уравнения (52) называются косимметриями, и ψ является производящей функцией закона сохранения тогда и только тогда, когда

$$\delta(\psi) = 0, \tag{53}$$

где δ вычисляется по формуле (50). В случае эволюционных уравнений условие (53) эквивалентно равенству

$$\ell_\psi = \ell^*_\psi. \tag{54}$$

Геометрия (касательное расслоение)

Построим пространство, функции на котором — вариационные формы уравнения $\mathcal{E}$, т.е. касательное пространство к уравнению. Для этого расширим $\mathcal{E}$ уравнениями

$$\ell_{\mathcal{E}}(\mathbf{q}) = 0, \quad \mathbf{q} = (q^1, \dots, q^m), \tag{55}$$

где $\mathbf{q}$ — новая нечётная переменная. Обозначим полученное уравнение через $\mathcal{TE}$. Очевидно,

$$\sum_i \Omega^i(\mathcal{E}) = \mathrm{cl}(\mathcal{TE}).$$

Значит, $\mathcal{TE}$ — вариационное касательное пространство. Сечения расслоения $\mathcal{TE} \to \mathcal{E}$ — вертикальные поля на $\mathcal{E}$, а «голономные» сечения (т.е. сохраняющие распределение Картана) — симметрии. Они удовлетворяют уравнению

$$\ell_{\mathcal{E}}\varphi = 0. \tag{56}$$

Когомологии (инвариантность линеаризации)

Пусть $\mathcal{E}$ двумя способами вложено в пространства джетов и $\mathcal{E} = \{F_i = 0\} \subset J^\infty(\pi_i)$, $i = 1, 2$. Обозначим через $\ell_{\mathcal{E},i} \colon \varkappa_i \to P_i$ соответствующие операторы линеаризации. Тогда эти операторы гомотопически эквивалентны, т.е. $\mathcal{C}$-дифференциальные операторы в диаграмме

$$
\begin{tikzcd}
\varkappa_1 \arrow[rr, "\ell_{\mathcal{E},1}"'] \arrow[d, shift right, "\alpha"'] & & P_1 \arrow[ll, bend right, "s_1"'] \arrow[d, shift right, "\alpha'"'] \\
\varkappa_2 \arrow[rr, "\ell_{\mathcal{E},2}"] \arrow[u, shift right, "\beta"'] & & P_2 \arrow[ll, bend left, "s_2"] \arrow[u, shift right, "\beta'"']
\end{tikzcd}
\tag{57}
$$

удовлетворяют соотношениям

$$\ell_{\mathcal{E},1}\beta = \beta'\ell_{\mathcal{E},2}, \quad \ell_{\mathcal{E},2}\alpha = \alpha'\ell_{\mathcal{E},1}, \quad \beta\alpha = \mathrm{id} + s_1\ell_{\mathcal{E},1}, \quad \alpha\beta = \mathrm{id} + s_2\ell_{\mathcal{E},2}.$$

«Две геометрии», III

Дифференциальная геометрия	Вариационная геометрия
точки	решения
функции	законы сохранения
комплекс де Рама	вариационный комплекс
векторные поля	симметрии
касательное расслоение	расслоение $\mathcal{TE} \to \mathcal{E}$
дифференциальные формы	законы сохранения на $\mathcal{TE}$

Геометрия (кокасательное расслоение)

Чтобы определить аналог T^*, естественно, по аналогии с (55), расширить $\mathcal{E}$ уравнением

$$\ell_{\mathcal{E}}^*(\mathbf{p}) = 0, \mathbf{p} = (p^1, \dots, p^r), \tag{58}$$

где $\mathbf{p}$ — новая нечётная переменная, а r — количество функций, определяющих уравнение $\mathcal{E}$. Однако без дополнительных условий этот объект не является инвариантом уравнения, а зависит от вложения в джеты и выбора сечения $F \in P$.

Замечание

Нормальность уравнения влечёт нормальность линеаризации: если $\square \circ \ell_{\mathcal{E}} = 0$, то $\square = 0$. Их этого не следует, что тем же свойством обладает оператор $\ell_{\mathcal{E}}^*$.

Когомологии (инвариантность сопряжённой линеаризации)

Пусть, как и выше, заданы два вложения уравнения в джеты, причём для обоих операторы $\ell^*_{\mathcal{E},1}$, $\ell^*_{\mathcal{E},2}$ нормальны. Тогда они гомотопически эквивалентны, т.е. фигурирующие в диаграмме

$$
\begin{tikzcd}
\hat{P}_1 \arrow[r, "\ell^*_{\mathcal{E},1}"'] \arrow[d, shift left, "\beta'^*"] & \hat{\varkappa}_1 \arrow[l, bend right, "s_1^*"'] \arrow[d, shift left, "\beta^*"] \\
\hat{P}_2 \arrow[r, "\ell^*_{\mathcal{E},2}"] \arrow[u, shift left, "\alpha'^*"] & \hat{\varkappa}_2 \arrow[l, bend left, "s_2^*"] \arrow[u, shift left, "\alpha^*"]
\end{tikzcd}
\tag{59}
$$

$\mathcal{C}$-дифференциальные операторы удовлетворяют соотношениям

$$\ell^*_{\mathcal{E},1}\alpha'^* = \alpha^*\ell^*_{\mathcal{E},2},\ \ell^*_{\mathcal{E},2}\beta'^* = \beta^*\ell^*_{\mathcal{E},1},\ \alpha'^*\beta'^* = \mathrm{id} + s_1^*\ell^*_{\mathcal{E},1},\ \beta'^*\alpha'^* = \mathrm{id} + s_2^*\ell^*_{\mathcal{E},2}.$$

Геометрия (кокасательное расслоение)

Для нормальных уравнений, вложенных так, что оператор $\ell_{\mathcal{E}}^*$ нормален, равенство (58) корректно определяет $\mathcal{T}^*\mathcal{E}$. Голономные сечения расслоения $\mathcal{T}^*\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ — это косимметрии, а полиномиальные по слоям кососимметрические функции — вариационные мультивекторы на $\mathcal{E}$. Их описание аналогично описанию вариационных форм:

1. $\mathcal{D}_0 = \mathrm{cl}(\mathcal{E})$.
2. $\mathcal{D}_1 = \ker \ell_{\mathcal{E}} = \mathrm{sym}(\mathcal{E})$.
3. $\mathcal{D}_p = \Xi^p/\bar{\Xi}^p$, $p > 1$, где Ξ^p состоит из таких $\Delta \in \mathcal{CD}^{\mathrm{sk}}_{p-1}(\hat{P}, \varkappa)$, что

$$\ell_{\mathcal{E}}\Delta(\psi_1, \dots, \psi_{p-1}) - \sum_{k=1}^{p-1} \Delta^{*_k}(\psi_1, \dots, \ell_{\mathcal{E}}^*(\psi_k), \dots, \psi_{p-1}) = 0,$$

а $\bar{\Xi}^p$ состоит из операторов $\Delta \in \mathcal{CD}^{\mathrm{sk}}_{p-1}(\hat{P}, \varkappa)$ вида

$$\Delta(\psi_1, \dots, \psi_{p-1}) = \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{k+1} \nabla(\ell_{\mathcal{E}}^*(\psi_k), \psi_1, \dots, \hat{\psi}_k \dots, \psi_{p-1}),$$

где $\nabla \colon \hat{\varkappa} \times \hat{P} \times \dots \hat{P} \to \varkappa$, $\psi_i \in \hat{P}$.

Геометрия (кокасательное расслоение)

В частности,

$$\mathcal{D}_2(\mathcal{E}) = \frac{\{\, \Delta \in \mathcal{CD}(\hat{P}, \varkappa) \mid \ell_{\mathcal{E}}\Delta = \Delta^* \ell_{\mathcal{E}}^* \,\}}{\{\, \nabla \ell_{\mathcal{E}}^* \mid \nabla \in \mathcal{CD}(\hat{\varkappa}, \varkappa), \nabla^* = \nabla \,\}}. \tag{60}$$

Уравнение $\mathcal{T}^*\mathcal{E}$ — всегда лагранжево с лагранжианом $L = \langle \mathbf{p}, F \rangle$. Модули $\varkappa$ и P для него имеют вид

$$\varkappa(\mathcal{T}) = \varkappa(\mathcal{E}) \oplus \hat{P}(\mathcal{E}), \quad P(\mathcal{T}) = \hat{\varkappa}(\mathcal{E}) \oplus P(\mathcal{E}). \tag{61}$$

Каноническая 1-форма $\rho_{\mathcal{E}}$ задаётся равенством

$$\rho_{\mathcal{E}} = (\mathbf{p}, 0),$$

а симплектическая форма $\omega_{\mathcal{E}} = \delta \rho_{\mathcal{E}}$ — это класс оператора $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, действующего из $\hat{P} \oplus \varkappa$ в $\varkappa \oplus \hat{P}$ (см. (60) и (61)). Оператор $\omega_{\mathcal{E}}$ обратим, и обратный к нему $S_{\mathcal{E}}$ задаёт на $\mathcal{T}^*\mathcal{E}$ скобку Схоутена (или Пуассона, в зависимости от выбора чётности).
Бивектор A называется гамильтоновым оператором на $\mathcal{E}$ (или пуассоновой структурой), если $[\![A, A]\!] = 0$.

«Две геометрии», IV

Дифференциальная геометрия	Вариационная геометрия
касательное расслоение	расслоение $\mathcal{T}^*\mathcal{E} \to \mathcal{E}$
мультивекторы	законы сохранения на $\mathcal{T}^*\mathcal{E}$
Форма $p\,dq$	вариационная форма $\rho_{\mathcal{E}} \in \Omega^1(\mathcal{T}^*\mathcal{E})$
Форма $dp \wedge dq$	вариационная форма $\omega_{\mathcal{E}} \in \Omega^2(\mathcal{T}^*\mathcal{E})$
скобка Схоутена	вариационная скобка Схоутена $S_{\mathcal{E}} \in \mathcal{D}_2(\mathcal{T}^*\mathcal{E})$

Δ-накрытия

Из (49) и (60) видно, что для нахождения симплектических и гамильтоновых структур нужно решать операторные уравнения

$$\ell_{\mathcal{E}}^* \circ \Delta = \Delta^* \circ \ell_{\mathcal{E}}, \qquad \ell_{\mathcal{E}} \circ \Delta = \Delta^* \circ \ell_{\mathcal{E}}^*.$$

Эта и аналогичные задачи решаются с помощью следующей конструкции. Пусть $\Delta\colon P \to Q$ — $\mathcal{C}$-дифференциальный оператор. Рассмотрим $\mathcal{E}_\Delta = \ker \Phi_\Delta \subset J_h^\infty(P)$. Проекция $\tau\colon \mathcal{E}_\Delta \to \mathcal{E}$ сохраняет распределение Картана и называется Δ-накрытием. Пусть $\Delta'\colon P' \to Q'$ — другой $\mathcal{C}$-дифференциальный оператор. Поднимем его до оператора $\tilde{\Delta}'$ в Δ-накрытии.

Предложение

$$\ker \tilde{\Delta}' = \frac{\{\, A \in \mathcal{CD}(P, P') \mid \Delta' \circ A = B \circ \Delta, B \in \mathcal{CD}(Q, Q') \,\}}{\{\, A \in \mathcal{CD}(P, P') \mid A = B' \circ \Delta, B' \in \mathcal{CD}(Q, P') \,\}}. \qquad (62)$$

Вычисление интегрируемых структур

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "A"'] & Q \arrow[d, "B"] \arrow[dl, "B'"'] \\
P' \arrow[r, "\Delta'"'] & Q'
\end{tikzcd}
$$

Применим этот результат к конкретным операторам:

Оператор Δ	Оператор Δ'	Действие оператора A
$\ell_{\mathcal{E}}$	$\ell_{\mathcal{E}}$	$\operatorname{sym}\mathcal{E} \to \operatorname{sym}\mathcal{E}$
$\ell_{\mathcal{E}}^*$	$\ell_{\mathcal{E}}$	$\operatorname{sym}\mathcal{E} \to \operatorname{cosym}\mathcal{E}$
$\ell_{\mathcal{E}}$	$\ell_{\mathcal{E}}^*$	$\operatorname{cosym}\mathcal{E} \to \operatorname{sym}\mathcal{E}$
$\ell_{\mathcal{E}}^*$	$\ell_{\mathcal{E}}^*$	$\operatorname{cosym}\mathcal{E} \to \operatorname{cosym}\mathcal{E}$

Пример (уравнение Хироты)

Уравнение

$$mm_{xt} = m_t m_x - m_{xxxx} m + 4m_{xxx} m_x - 3m_{xx}^2 = 0 \tag{63}$$

получается дифференциальной подстановкой $u = -2(\ln m)_{xx}$.

$$\mathcal{R} = m\left(D_x^2 + 8\left(\frac{m_x}{m}\right)_x - 12D_x^{-1} \circ \left(\frac{m_x}{m}\right)_{xx} + 4D_x^{-2} \circ \left(\frac{m_x}{m}\right)_{xxx}\right) \circ \frac{1}{m}$$

$$\mathcal{S}_1 = D_x^2 \circ \frac{1}{m}$$

$$\mathcal{S}_2 = \left(D_x^4 + 8\left(\frac{m_x}{m}\right)_x D_x^2 + 4\left(\frac{m_x}{m}\right)_{xx} D_x\right) \circ \frac{1}{m}$$

$$\mathcal{H} = mD_x^{-2}$$

$$\mathcal{R}^\bullet = \frac{1}{m}\left(D_x^2 + 8\left(\frac{m_x}{m}\right)_x + 12\left(\frac{m_x}{m}\right)_{xx} D_x^{-1} + 4\left(\frac{m_x}{m}\right)_{xxx} D_x^{-2}\right) \circ m$$

Спасибо за внимание.
Дякую за увагу.