И.С. Красильщик

Геометрия бесконечно продолженных уравнений

Независимый московский университет
Весенний семестр 2015–2016 гг.

Предуведомление. Этот курс является продолжением курса, читанного мною в осеннем семестре 2015–2016 гг. (см.[4]). Здесь — краткое содержание лекций и задачи к ним. Эти задачи столь же важны, как и основной материал лекций, поскольку часто содержат определения и конструкции, необходимые для последующего изложения. Распределение материала по лекциям не всегда полностью соответствует видеоверсии.

Текст обновляется по мере чтения лекций. Вопросы можно посылать на мою почту.

Содержание

Лекция 1 (17.02.2016)

В этой лекции определяются пространства бесконечных джетов и вводятся основные геометрические структуры на этих пространствах.

Бесконечные джеты

(1) Напомним, что по каждому векторному расслоению $\pi\colon E \to M$ над гладким многообразием M можно построить пространство k-джетов $J^k(\pi)$. Точки многообразия $J^k(\pi)$ — это классы $[s]_x^k$, $x \in M$, сечений $s\colon M \to E$ расслоения π, графики которых касаются друг друга с порядком, не меньшим k, в общей точке $s(x) \in E$. Соответствия $[s]_x^k \mapsto x$ и $[s]_x^k \mapsto [s]_x^l$, $l \le k$, определяют расслоения $\pi_k\colon J^k(\pi) \to M$ и $\pi_{k,l}\colon J^k(\pi) \to J^l(\pi)$.

(2) Обратный предел цепочки проекций

$$M \xleftarrow{\pi} E \xleftarrow{\pi_{1,0}} J^1(\pi) \longleftarrow \dots \longleftarrow J^k(\pi) \xleftarrow{\pi_{k+1,k}} J^{k+1}(\pi) \longleftarrow \dots$$

называется пространством бесконечных джетов расслоения π и обозначается через $J^\infty(\pi)$. Точки этого пространства можно интерпретировать как классы $[s]_x^\infty$ сечений, чьи графики имеют бесконечный порядок касания. Определены естественные проекции $\pi_\infty\colon J^\infty(\pi) \to M$ и $\pi_{\infty,k}\colon J^\infty(\pi) \to J^k(\pi)$. Каждому сечению $s \in \Gamma(\pi)$ соответствует сечение $j_\infty(s) \in \Gamma(\pi_\infty)$, определяемое равенством

$$j_\infty(s)(x) = [s]_x^\infty, \qquad x \in M,$$

и называемое бесконечным джетом сечения s.

(3) Пространство $J^\infty(\pi)$ является бесконечномерным многообразием, но мы не будем вдаваться в детали его топологии, а воспользуемся алгебро-геометрическим дуализмом, который обсуждался в [4]. Обозначим через $\mathscr{F}_k(\pi)$ алгебру гладких функций на $J^k(\pi)$ и заметим, что цепочка проекций п. 2 определяет цепочку вложений $\mathbb{R}$-алгебр

$$C^\infty(M) \xrightarrow{\nu} E \xrightarrow{\nu_{1,0}} \mathscr{F}_1(\pi) \longrightarrow \dots \longrightarrow J^k(\pi) \xrightarrow{\nu_{k+1,k}} J^{k+1}(\pi) \longrightarrow \dots$$

Определим алгебру гладких функций $\mathscr{F}(\pi)$ на $J^\infty(\pi)$, полагая $\mathscr{F}(\pi) = \cup_{k\ge 0}\mathscr{F}_k(\pi)$. Это — алгебра с фильтрацией, и мы построим дифференциальное исчисление (векторные поля, дифференциальные формы и т.д.) в категории фильтрованных геометрических модулей над этой алгеброй.

(4) Как и на многообразиях $J^k(\pi)$, $k < \infty$, на $J^\infty(\pi)$ можно ввести адаптированные координаты. Пусть $\mathscr{U} \subset M$ локальная карта с координатами $x^1, \dots, x^n$, над которой тривиализуется расслоение π. Тогда, если сечение s записано в локальном базисе в виде

$s^1e_1+\dots+s^me_m$, то мы полагаем

$$u^j_\sigma([s]^\infty_x)=\left.\frac{\partial^{|\sigma|}s^j}{\partial x^\sigma}\right|_x,$$

где σ — симметрический мультииндекс произвольной, но конечной длины. Таким образом, локально гладкие функции на $J^\infty(\pi)$ — это функции произвольного конечного числа аргументов x^i и u^j_σ.

(5) Пусть $\xi_i\colon H_i\to M$ — также векторные расслоения и $\Delta\colon\Gamma(\xi_1)\to\Gamma(\xi_2)$ — линейный дифференциальный оператор. Рассмотрим индуцированные расслоения

$$\begin{tikzcd}
\bar H_i=J^\infty(\pi)\times_M H_i \arrow[r] \arrow[d, "\bar\xi_i=\pi_\infty^*(\xi_i)"'] & H_i \arrow[d, "\xi_i"] \\
J^\infty(\pi) \arrow[r, "\pi_\infty"] & M
\end{tikzcd}$$

и определим отображение $\mathscr{C}_\Delta\colon\Gamma(\bar\xi_1)\to\Gamma(\bar\xi_2)$, полагая

$$\bigl(\mathscr{C}_\Delta(f)\bigr)([s]^\infty_x)=\bigl(\Delta(f\circ j_\infty(s))\bigr)(x),\tag{1}$$

где $s\in\Gamma(\pi)$, $f\in\Gamma(\bar\xi_1)$, $x\in M$.

(6) Из задачи 4, в частности, следует, что если ξ_1 и ξ_2 — тривиальные одномерные расслоения, то ограничение гомоморфизма $\mathscr{C}$ на подмодуль векторных полей $D(M)\subset\mathrm{Diff}_*(C^\infty(M))$ приводит к гомоморфизму

$$\mathscr{C}\colon D(M)\to D(\pi)=D(J^\infty(\pi)),$$

причём

$$\mathscr{C}_{[X,Y]}=[\mathscr{C}_X,\mathscr{C}_Y]$$

для любых векторных полей X и Y на M. Таким образом, $\mathscr{C}$ — плоская связность в расслоении π_∞. Она называется связностью Картана.

(7) Распределение $\mathscr{C}=\mathscr{C}(\pi)$, порождённое над $\mathscr{F}(\pi)$ векторными полями вида $\mathscr{C}_X$, $X\in D(M)$, называется распределением Картана. Оно горизонтально и «формально интегрируемо» в следующем смысле: для любых полей Z, $Z'\in\mathscr{C}$ их коммутатор также лежит в распределении Картана.

(8) Тот факт, что распределение Картана горизонтально, позволяет спроецировать любое поле $Z\in D(\pi)$ на слои расслоения π_∞ вдоль плоскостей этого распределения и получить расщепление

$$D(\pi)=D^v(\pi)\oplus\mathscr{C}(\pi),\tag{2}$$

где $D^v(\pi)$ — модуль π_∞-вертикальных полей, т.е. таких дифференцирований алгебры $\mathscr{F}(\pi)$, которые аннулируют подалгебру $C^\infty(M)$. Пусть Z^v — проекция поля Z на первое слагаемое.

Для всякой функции $f \in \mathscr{F}(\pi)$ определим 1-форму $d_{\mathscr{C}}(f)$, полагая

$$\mathrm{i}_Z(d_{\mathscr{C}}(f)) = Z^v(f). \tag{3}$$

Формы вида $d_{\mathscr{C}}(f)$ называются формами Картана, а оператор $d_{\mathscr{C}} \colon \mathscr{F} \to \Lambda^1(\pi)$ — дифференциалом Картана. Непосредственно из определения следует, что поле лежит в распределении Картана тогда и только тогда, когда $\mathrm{i}_Z\omega = 0$ для любой картановской формы ω.

Задачи

Задача 1. Функторы дифференциального исчисления в категории фильтрованных модулей имеют некоторые особенности. Дайте точные определения.

Задача 2. Докажите, что модуль $\Lambda^*(\pi)$ дифференциальных форм на $J^\infty(\pi)$ — это объединение модулей $\Lambda^*(J^k(\pi))$, которые вложены друг в друга благодаря проекциям из п. 2.

Задача 3. Докажите, что всякое векторное поле на $J^\infty(\pi)$ в адаптированных координатах записывается в виде бесконечной суммы

$$X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{j,\sigma} b_{j,\sigma} \frac{\partial}{\partial u^j_\sigma}, \qquad a_i, b_{j,\sigma} \in \mathscr{F}(\pi),$$

а любой дифференциальный оператор — как бесконечная линейная комбинация слагаемых вида

$$\frac{\partial^{l+r}}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_l} \partial u^{j_1}_{\sigma_1} \dots \partial u^{j_r}_{\sigma_r}}, \qquad 1 \le i_\alpha \le n, \quad 1 \le j_\beta \le m,$$

с коэффициентами из $\mathscr{F}(\pi)$.

Задача 4. В условиях п. 5 докажите следующие факты:

(1) Определение (1) корректно, т.е. не зависит от выбора сечения s в данном классе эквивалентности.

(2) Отображение $\mathscr{C}_\Delta$ является линейным дифференциальным оператором того же порядка, что и Δ.

(3) Соответствие $\mathscr{C} \colon \mathrm{Diff}_*(\xi_1, \xi_2) \to \mathrm{Diff}_*(\bar{\xi_1}, \bar{\xi_2})$ является гомоморфизмом $C^\infty(M)$-модулей.

(4) Если $\xi_2 \colon H_3 \to M$ — третье расслоение и $\nabla \colon \Gamma(\xi_2) \to \Gamma(\xi_3)$ — линейный дифференциальный оператор, то $\mathscr{C}_{\nabla\circ\Delta} = \mathscr{C}_\nabla \circ \mathscr{C}_\Delta$.

(5) Пусть $\varphi \in \Gamma(\xi_1)$. Определим сечение $\bar\varphi \in \Gamma(\bar{\xi_1})$, полагая $\bar\varphi(\theta) = (\theta, \varphi(\pi_\infty(\theta)))$, $\theta \in J^\infty(\pi)$. Тогда $\mathscr{C}_\Delta(\bar\varphi) = \overline{\Delta(\varphi)}$.

Задача 5 (полные производные)**.** Выберем в $J^\infty(\pi)$ адаптированные координаты. Тогда связность Картана полностью определится своими значениями на базисных полях $\partial/\partial x^i$. Покажите, что

$$\mathscr{C}_{\partial/\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{j,\sigma} u^j_{\sigma i} \frac{\partial}{\partial u^j_\sigma}. \tag{4}$$

Эти поля называются полными производными и обозначаются через D_{x^i}.

Задача 6. Докажите, что распределение Картана на $J^\infty(\pi)$ является обратным пределом распределений Картана на конечных джетах.

Задача 7 ($\mathscr{C}$-дифференциальные операторы)**.** Из равенства (1) следует, что операторы вида $\mathscr{C}_\Delta$ допускают ограничения на графики бесконечных джетов. Более общо, скажем, что оператор $\square\colon \Gamma(\bar\xi_1) \to \Gamma(\bar\xi_2)$ является $\mathscr{C}$-дифференциальным, если для любого сечения $\sigma \in \Gamma(\pi)$ найдётся такой дифференциальный оператор $\square_s\colon \Gamma(\xi_1) \to \Gamma(\xi_2)$, что выполнено равенство

$$\square(f) \circ j_\infty(s) = \square_s(f \circ j_\infty(s))$$

для всех сечений $f \in \Gamma(\bar\xi_1)$. Докажите, что локально любой $\mathscr{C}$-дифференциальный оператор выражается через полные производные, т.е. имеет вид $\operatorname{rank}\xi_1 \times \operatorname{rank}\xi_2$-матрицы с элементами вида

$$\sum_{i_1,\dots,i_l} a_{i_1,\dots,i_l} D_{x^{i_1}} \circ \dots \circ D_{x^{i_l}},$$

где $a_{i_1,\dots,i_l} \in \mathscr{F}(\pi)$.

Задача 8 (линеаризации)**.** Сечения расслоения $\bar\xi\colon \bar H \to J^\infty(M)$ отождествляются с нелинейными дифференциальными операторами, действующими из $\Gamma(\pi)$ в $\Gamma(\xi)$:

$$\Delta_s(f) = f \circ j_\infty(s), \qquad s \in \Gamma(\pi), \quad f \in \Gamma(\bar\xi).$$

В частности, сечения расслоения $\bar\pi$ — это операторы из $\Gamma(\pi)$ в себя. Мы будем использовать обозначение $\varkappa(\pi) = \Gamma(\bar\pi)$. Зафиксируем f и φ и рассмотрим такое гладкое семейство $\varphi_t \in \varkappa(\pi)$, что $\left.\frac{d\varphi_t}{dt}\right|_{t=0} = \varphi$. Положим

$$\ell_f(\varphi) = \left.\frac{d(\Delta_f \circ \Delta_{\varphi_t})}{dt}\right|_{t=0}.$$

Докажите, что это определение корректно, т.е. не зависит от выбора семейства φ_t. Полученный оператор

$$\ell_f\colon \varkappa(\pi) \to \Gamma(\bar\xi)$$

называется линеаризацией сечения f. Покажите, что в адаптированных координатах имеет место равенство

$$\ell_f = \left\| \sum_\sigma \frac{\partial f^\alpha}{\partial u^b_\sigma} D_\sigma \right\|, \tag{5}$$

где D_σ — композиция полных производных, соответствующая мультииндексу σ. Таким образом, линеаризация — это $\mathscr{C}$-дифференциальный оператор.

Задача 9. Докажите, что максимальные интегральные многообразия распределения Картана на $J^\infty(\pi)$ — это графики бесконечных джетов и только они.

Задача 10. Докажите, что в адаптированных координатах дифференциал Картана имеет вид

$$d_{\mathscr{C}}(f) = \sum_{j,\sigma} \frac{\partial f}{\partial u^j_\sigma} \omega^j_\sigma, \tag{6}$$

где $\omega^j_\sigma = du^j_\sigma - \sum_i u_{\sigma i}\, dx^i$.

Лекция 2 (24.02.2016)

Здесь описываются инфинитезимальные симметрии распределения Картана на пространствах бесконечных джетов.

Симметрии распределения Картана

(1) Мы начнём с важной конструкции, которая уже обсуждалась в прошлом семестре и понадобится в дальнейшем. Пусть $\xi\colon H \to M$ — векторное расслоение и $\bar{\xi}\colon \bar{H} \to J^\infty(\pi)$ — индуцированное с помощью π_∞ расслоение над $J^\infty(\pi)$. Рассмотрим сечение φ этого расслоения и соответствующий (вообще говоря, нелинейный) дифференциальный оператор $\Delta = \Delta_\varphi\colon \Gamma(\pi) \to \Gamma(\xi)$ (см. задачу 8). Пусть порядок этого оператора равен k. Оператор Δ определяет морфизм расслоений

$$\begin{tikzcd} J^k(\pi) \arrow[rr, "\Phi_\Delta"] \arrow[dr, "\pi_k"'] & & H \arrow[dl, "\xi"] \\ & M, & \end{tikzcd}$$

заданный правилом

$$\Phi_\Delta([s]^k_x) = [\Delta(s)]^0_x = \varphi(x), \qquad x \in M.$$

(2) Напомним, что l-м продолжением оператора Δ называется композиция $\Delta^{(l)} = j_l \circ \Delta\colon \Gamma(\pi) \to \Gamma(\xi_l)$. Это — оператор порядка $k+l$. Ему соответствует гладкое отображение $\Phi^{(l)}_\Delta = \Phi_{\Delta^{(l)}}\colon J^{k+l}(\pi) \to J^l(\xi)$, а совокупность всех этих отображений определяет морфизм

$$\begin{tikzcd} J^\infty(\pi) \arrow[rr, "\Phi^*_\Delta"] \arrow[dr, "\pi_\infty"'] & & J^\infty(\xi) \arrow[dl, "\xi_\infty"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

(см. задачу 11). Таким образом, отображения вида Φ^*_Δ предоставляют широкий класс примеров преобразований, сохраняющих распределение Картана на бесконечных джетах. Нас, однако, будет интересовать инфинитезимальная теория.

(3) Как уже говорилось, инфинитезимальная симметрия распределения — это векторное поле, которое его сохраняет. Таким образом, $Z \in D(\pi)$ — симметрия распределения Картана на $J^\infty(\pi)$, если $[X, \mathscr{C}(\pi)] \subset \mathscr{C}(\pi)$. Поскольку распределение Картана интегрируемо, поля, лежащие в нём, образуют, идеал алгебры симметрий, «настоящими» симметриями разумно считать элементы соответствующей факторалгебры. Однако, в силу расщепления (2), в каждом классе смежности существует канонический представитель — вертикальное поле. Поэтому можно сформулировать следующее определение:

$$\mathrm{sym}(\pi) = \{\, Z \in D^v(\pi) \mid [Z, \mathscr{C}(\pi)] \subset \mathscr{C}(\pi)\,\}\,.$$

Элементы алгебры Ли $\mathrm{sym}(\pi)$ называются высшими симметриями.

(4) Напомним, что в задаче 8 было введено обозначение $\varkappa(\pi) = \Gamma(\bar\pi)$, где $\bar\pi = \pi^*_\infty(\pi)$.

Теорема 1. *Существует естественное взаимно-однозначное соответствие между векторными пространствами* $\mathrm{sym}(\pi)$ *и* $\varkappa(\pi)$. *В локальных координатах это соответствие задаётся формулой*

$$\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^m) \;\mapsto\; \mathbf{E}_\varphi = \sum_{j,\sigma} D_\sigma(\varphi^j) \frac{\partial}{\partial u^j_\sigma}. \tag{7}$$

Векторное поле вида $\mathbf{E}_\varphi$ называется эволюционным, а элемент $\varphi \in \varkappa(\pi)$ называется производящим сечением эволюционного поля.

(5) *Доказательство теоремы* 1. Мы начнём с доказательства второй части. Пусть x^i, u^j_σ — адаптированные координаты в $J^\infty(\pi)$ и

$$Z = \varphi^1 \frac{\partial}{\partial u^1} + \dots + \varphi^m \frac{\partial}{\partial u^m} + \dots + \varphi^j_\sigma \frac{\partial}{\partial u^j_\sigma} + \dots$$

— симметрия, записанная в этих координатах. Тогда, в силу задачи 13, имеем

$$\varphi^j_\sigma = Z(u^j_\sigma) = Z D_\sigma(u^j) = D_\sigma Z(u^j) = D_\sigma(\varphi^j).$$

Перейдём к доказательству первой части. Рассмотрим поле $Z \in \mathrm{sym}(\pi)$ как дифференцирование алгебры $\mathscr{F}(\pi)$; тогда ограничение

$$Z|_{\mathscr{F}_0(\pi)} : \mathscr{F}_0(\pi) = C^\infty(E) \to \mathscr{F}(\pi)$$

отождествляется отождествляется с некоторым элементом модуля $\varkappa(\pi)$ (задача 15), если в качестве ξ взять расслоение $\pi_{\infty,0}$, и мы получает отображение $\mathrm{sym}(\pi) \to \varkappa(\pi)$.

Покажем, во-первых, что оно мономорфно. Действительно, пусть $Z|_{\mathscr{F}_0(\pi)} = 0$. Тогда из задач 13 и 16 с помощью элементарной индукции получаем, что $Z = 0$.

Далее, эпиморфность вытекает из следующих рассуждений. Рассмотрим покрытие пространства $J^\infty(\pi)$ картами с адаптированными координатами и в каждой карте $\mathscr{U}$ построим симметрию $\mathbf{E}_\varphi^{\mathscr{U}}$, воспользовавшись формулой (7). Тогда, тогда на пересечении $\mathscr{U} \cap \mathscr{U}'$ двух координатных окрестностей поля $\mathbf{E}_\varphi^{\mathscr{U}}$ и $\mathbf{E}_\varphi^{\mathscr{U}'}$ обязаны совпадать в силу уже доказанной мономорфности. $\square$

(6) Установленный в теореме 1 изоморфизм позволяет ввести в модуле $\varkappa(\pi)$ бинарную операцию $\{\cdot,\cdot\}$, определяемую равенством

$$\mathbf{E}_{\{\varphi_1,\varphi_2\}} = [\mathbf{E}_{\varphi_1}, \mathbf{E}_{\varphi_2}] \tag{8}$$

называемую скобкой Якоби. Из задачи 17 следует, что в локальных координатах скобка Якоби записывается в виде

$$\{\varphi_1,\varphi_2\}^j = \sum_{\sigma,\alpha} \left(D_\sigma(\varphi_1^\alpha)\frac{\partial \varphi_2^j}{\partial u_\sigma^\alpha} - D_\sigma(\varphi_2^\alpha)\frac{\partial \varphi_1^j}{\partial u_\sigma^\alpha} \right). \tag{9}$$

В дальнейшем мы нередко не будем делать различия между симметриями и их производящими сечениям и между скобкой Ли симметрий как векторных полей и скобкой Якоби их производящих сечений.

(7) Отметим в заключение очевидное и важное равенство

$$\mathbf{E}_\varphi(f) = \ell_f(\varphi), \qquad \varphi \in \varkappa(\pi), \quad f \in \mathscr{F}(\pi),$$

где ℓ_f — оператор универсальной линеаризации (задача 8). Однако правая часть этого равенства имеет смысл для любого сечения $f \in \Gamma(\bar\xi)$, где ξ — векторное расслоение над M, а через $\bar\xi$, как и выше, обозначено индуцированное расслоение $\pi_\infty^*(\xi)$. Поэтому для любого расслоения ξ определён оператор

$$\mathbf{E}_\varphi^\xi \colon \Gamma(\bar\xi) \to \Gamma(\bar\xi), \quad \mathbf{E}_\varphi^\xi(\psi) = \ell_\psi(\varphi), \quad \varphi \in \varkappa(\pi),\ \psi \in \Gamma(\bar\xi). \tag{10}$$

Пользуясь этим фактом, формулу (11) из задачи 17 можно переписать в виде

$$\{\varphi_1,\varphi_2\} = \mathbf{E}_{\varphi_1}^\pi(\varphi_2) - \mathbf{E}_{\varphi_2}^\pi(\varphi_1).$$

Задачи

Задача 11. В условиях п. 2 докажите, что

(1) Отображение Φ_Δ^* корректно определено и действительно является морфизмом расслоений.

(2) Оно сохраняет распределение Картана.

(3) Всякий морфизм, сохраняющий распределение Картана имеет вид Φ_Δ^* для некоторого нелинейного оператора Δ.

Задача 12. Пусть в пространствах $J^\infty(\pi)$ и $J^\infty(\xi)$ выбраны адаптированные координаты (x^i, u^α_σ) и (x^i, v^β_τ) соответственно. Предположим, что оператор Δ (или сечение φ) задан равенствами

$$v^\beta = \varphi^\beta(\dots, x^i, \dots, u^\alpha_\sigma, \dots), \qquad \varphi^\beta \in \mathscr{F}(\pi).$$

Докажите, что морфизм Φ_Δ^* задаётся равенствами

$$v^\beta_\tau = D_\tau(\varphi^\beta),$$

где D_τ — композиция полных производных, соответствующая мультииндексу τ.

Задача 13. Докажите, что поле Z является высшей симметрий распределения Картана тогда и только тогда, когда $[Z, \mathscr{C}_X] = 0$ для любого $X \in D(M)$.

Задача 14. Исследуйте взаимосвязь между теорией инфинитезимальных преобразований Ли–Беклунда, обсуждавшейся в [4], и теорией высших симметрий.

Задача 15. Рассмотрим в касательном расслоении $\tau\colon TE \to M$ подрасслоение $\tau^v\colon T^vE \to M$, где

$$T^vE = \{\, (x, v) \mid \pi_*(v) = 0 \,\}.$$

Его сечения — π-вертикальные векторные поля на E. Пусть $\xi\colon N \to E$ — также расслоение. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
T^vE \times_E N \arrow[r] \arrow[d, "\xi^*(\tau^v)"'] & T^vE \arrow[r, "\tau^v"] \arrow[d, "\tau^v"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\
N \arrow[r, "\xi"] & E \arrow[r, "\pi"] & M.
\end{tikzcd}$$

Докажите, что:

(1) Сечения расслоения $\xi^*(\tau^v)$ — это π-вертикальные дифференцирования из $C^\infty(E)$ в $C^\infty(N)$.

(2) В случае, когда π — векторное расслоение, имеет место изоморфизм $\Gamma(\xi^*(\tau^v)) \simeq \Gamma((\pi \circ \xi)^*(\pi))$.

Задача 16. Докажите, что любое дифференцирование $\mathscr{F}_k(\pi) \to \mathscr{F}(\pi)$, $k > 0$, определяется своим ограничением на подалгебру $\mathscr{F}_{k-1}(\pi)$ и своими значениями на элементах $C^\infty(M)$-подмодуля

$$\{\, \mathscr{C}_X(f) \mid X \in D(M), \quad f \in \mathscr{F}_{k-1}(\pi) \,\}.$$

Задача 17. Докажите, что выполняется равенство

$$\{\varphi_1, \varphi_2\} = \ell_{\varphi_2}(\varphi_1) - \ell_{\varphi_1}(\varphi_2), \tag{11}$$

где ℓ_φ — оператор универсальной линеаризации, определённый в задаче 8.

Задача 18. Докажите равенство

$$\mathbf{E}^{\xi}_{\varphi}(f\psi) = \mathbf{E}^{\mathbf{1}}_{\varphi}(f)\psi + f\mathbf{E}^{\xi}_{\varphi}(\psi),$$

где $\psi \in \Gamma(\bar{\xi})$, $f \in \mathscr{F}(\pi)$, а $\mathbf{1}\colon J^\infty(\pi) \times \mathbb{R} \to J^\infty(\pi)$ — тривиальное одномерное расслоение.

Лекция 3 (02.03.2016)

Наш следующий шаг — построение бесконечно продолженных уравнений и исследование их симметрий.

Бесконечные продолжения

(1) Рассмотрим дифференциальное уравнение $\mathscr{E} \subset J^k(\pi)$ порядка k. Напомним, что точку $\theta \in J^{k+1}(\pi)$, $k > 0$, можно понимать как пару $(\bar{\theta}, L_\theta)$, где $\bar{\theta} = \pi_{k+1,k}(\theta) \in J^k(\pi)$, а L_θ — плоскость, которая касается графика k-джета, проходящего через точку $\bar{\theta}$. Поэтому можно рассмотреть множество

$$\mathscr{E}^{(1)} = \left\{ \theta \in J^{k+1}(\pi) \mid \bar{\theta} \in \mathscr{E},\ L_\theta \subset T_{\bar{\theta}}\mathscr{E} \right\}.$$

Оно называется первым продолжением уравнения $\mathscr{E}$.

(2) В «хороших» точках множества $\mathscr{E}^{(1)}$ (т.е. в тех, в окрестности которых оно является гладким подмногообразием в $J^{k+1}(\pi)$) конструкцию предыдущего пункта можно повторить и получить второе продолжение, и т.д. и получить цепочку отображений

$$\ldots \longrightarrow \mathscr{E}^{(l+1)} \longrightarrow \mathscr{E}^{(l)} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathscr{E}^{(1)} \longrightarrow \mathscr{E} \longrightarrow J^0(\pi) \longrightarrow M.$$

Её обратный предел называется бесконечным продолжением уравнения. Точки бесконечного продолжения — это формальные решения рассматриваемого уравнения.

(3) Договоримся об обозначениях. Поскольку в дальнейшем мы будем иметь дело только с бесконечным продолжением, этот объект для простоты будет обозначаться через $\mathscr{E}$ и, как правило, мы будем называть его просто уравнением. Если, паче чаяния, нам понадобится исходное, непродолженное уравнение, то мы обозначим его через $\mathscr{E}^{(0)}$. Мы будем также рассматривать естественные отображения

$$\pi_{\infty,k+l}\colon \mathscr{E} \to \mathscr{E}^{(l)}, \quad \pi_{\infty,0}\colon \mathscr{E} \to J^0(\pi), \quad \pi_\infty\colon \mathscr{E} \to M,$$

обозначая их так же, как и соответствующие проекции многообразий джетов.

(4) Уравнение называется формально интегрируемым, если все множества его конечные продолжения являются гладкими многообразиями, а отображения $\pi_{k+l+1,k+l}\colon \mathscr{E}^{(l+1)} \to \mathscr{E}^{(l)}$ — расслоениями. В дальнейшем мы будем иметь дело с формально интегрируемыми уравнениями, хотя это предположение далеко не всегда обязательно.

(5) Алгебра гладких функций на $\mathscr{E}$ обозначается через $\mathscr{F}(\mathscr{E})$ и определяется следующим образом:

$$\mathscr{F}(\mathscr{E}) = \mathscr{F}(\pi)\big|_{\mathscr{E}} = \left\{\, f\colon \mathscr{E} \to \mathbb{R} \mid \exists \bar{f} \in \mathscr{F}(\pi)\colon f = \bar{f}\big|_{\mathscr{E}} \,\right\}.$$

Аналогично, если ξ — расслоение над M и $\bar{\xi}$ — расслоение над $\mathscr{E}$, индуцированное проекцией $\pi_\infty\colon \mathscr{E} \to M$, то мы *по определению* считаем, что всякое сечение расслоения $\bar{\xi}$ — это ограниечение некоторого сечения соответствующего расслоения над $J^\infty(\pi)$. В дальнейшем используется обозначение $\Gamma(\bar{\xi}) = \mathscr{F}(\mathscr{E}, \xi)$.

(6) Из задачи 20 следует, что поля вида $\mathscr{C}_X$, $X \in D(M)$, касаются любого бесконечно продолженного уравнения $\mathscr{E}$. Соответствие

$$X \mapsto \mathscr{C}_X\big|_{\mathscr{E}}$$

определяет связность и распределение Картана на $\mathscr{E}$, которые тоже будут обозначаться через $\mathscr{C}$, если не возникает двусмысленности.

(7) Пусть многообразие $\mathscr{E}^{(0)} \subset J^\infty(\pi)$ задано как нули сечения F некоторого расслоения $\pi_\infty^*(\xi)$, где ξ — векторное расслоение над M, т.е. уравнение определяется некоторым оператором $\Delta = \Delta_F\colon \Gamma(\pi) \to \Gamma(\xi)$. Пусть локально сечение F задано как вектор-функция $(F^1, \dots, F^r)$. Тогда из задач 12 и 21 следует, что бесконечное продолжение определяется системой условий

$$D_\sigma(F^j) = 0, \qquad j = 1, \dots, r,$$

где σ — мультииндекс произвольной длины.

Оговоримся сразу, что функции F^j всегда выбираются таким образом, что формы $d_\theta F^j$, $j = 1, \dots, r$, линейно независимы в любой точке $\theta \in \mathscr{E}$.

(8) Рассмотрим примеры.

Пример 1. Уравнение Кортевега–де Фриза можно записать в виде

$$u_t = uu_x + u_{xxx}.$$

Тогда первое продолжение получается добавлением условий

$$\begin{aligned} u_{xt} &= u_x^2 + uu_{xx} + u_{xxxx}, \\ u_{tt} &= u_t u_x + uu_{xt} + u_{xxxt} \end{aligned}$$

и т.д. Заметим, что в качестве координат на $\mathscr{E}$ можно выбрать функции

$$x,\ t,\ u_k = u_{\underbrace{x\dots x}_{k \text{ раз}}}.$$

Мы будем называть их внутренними координатами. Ограничить какой-нибудь объект на $\mathscr{E}$ означает переписать его в терминах внутренних координат. Например, ограничения полных производных на $\mathscr{E}$ имеют вид

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{k=0}^{\infty} u_{k+1}\frac{\partial}{\partial u_k}, \quad D_t = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=0}^{\infty} D_x^k(uu_1 + u_3)\frac{\partial}{\partial u_k},$$

где $u_0 = u$.

Пример 2. Первое продолжение уравнения синус Гордона имеет вид

$$\begin{aligned} u_{xy} &= \sin u,\\ u_{xxy} &= u_x \cos u,\\ u_{xyy} &= u_y \cos u, \end{aligned}$$

а чтобы получить второе продолжения, к ним нужно добавить ещё три уравнения:

$$\begin{aligned} u_{xxxy} &= u_{xx}\cos u - u_x^2 \sin u,\\ u_{xxyy} &= u_{xy}\cos u - u_x u_y \sin u,\\ u_{xyyy} &= u_{yy}\cos u - u_y^2 \sin u. \end{aligned}$$

В качестве внутренних координат можно выбрать функции

$$x,\ y,\ u,\ u_{x,k} = u\underbrace{x\dots x}_{k\ \text{раз}},\ u_{y,k} = u\underbrace{y\dots y}_{k\ \text{раз}}.$$

Конечно, выбор внутренних координат не является единственным и определяется удобством последующих вычислений.

(9) Дадим теперь одно из важнейших определений. Скажем, что эволюционное векторное поле $\mathbf{E}_{\bar\varphi}$, $\bar\varphi \in \varkappa(\pi)$, является (высшей) симметрией уравнения $\mathscr{E}$, если оно касается этого уравнения.

Пусть $\Phi \in \Gamma(\bar\xi)$, $\xi\colon H \to M$ и уравнение $\mathscr{E} \subset J^\infty(\pi)$ является нулями сечения F. Рассмотрим линеаризацию $\ell_F\colon \varkappa(\pi) \to \Gamma(\xi)$ (задача 8). Поскольку оператор ℓ_F является $\mathscr{C}$-дифференциальным, его можно ограничить на $\mathscr{E}$ (задача 20); обозначим это ограничение через $\ell_{\mathscr{E}}$. Мы также будем обозначать через $\varkappa(\mathscr{E})$ ограничение модуля $\varkappa(\pi)$ на $\mathscr{E}$.

Теорема 2. *Эволюционное поле $\mathbf{E}_{\bar\varphi}$ тогда и только тогда является симметрией уравнения $\mathscr{E}$, когда*

$$\ell_{\mathscr{E}}(\varphi) = 0,$$

где $\varphi = \bar\varphi|_{\mathscr{E}} \in \varkappa(\mathscr{E})$.

(10) *Доказательство теоремы* 2. Пусть $\mathbf{E}_{\bar\varphi}$ — эволюционное поле и $\mathbf{E}_{\bar\varphi}^{\xi}$ — его действие в модуле $\Gamma(\bar\xi)$ (формула (10)). Условие касания можно записать в виде

$$\mathbf{E}_{\bar\varphi}^{\xi}(F)\Big|_{\mathscr{E}} = 0.$$

Но
$$\mathbf{E}^{\xi}_{\bar\varphi}(F)\Big|_{\mathscr{E}} = \ell_F(\bar\varphi)|_{\mathscr{E}} = \ell_F|_{\mathscr{E}}\left(\bar\varphi|_{\mathscr{E}}\right)$$
Значит, $\ell_{\mathscr{E}}(\varphi) = 0$. □

(11) Данное выше определение симметрии имеет существенный недостаток: оно использует представление $\mathscr{E}$ как множества нулей некоторого сечения (и вложение уравнения в некоторое конкретное пространство джетов, см. задачу 24). Дадим альтернативное, внутреннее определение.

Пусть $\mathscr{C} = \mathscr{C}_{\mathscr{E}}$ — распределение Картана на $\mathscr{E}$ и $\pi_\infty\colon \mathscr{E} \to M$ — проекция на многообразие независимых переменных. Скажем, что π_∞-вертикальное поле $Z \in D^v(\mathscr{E})$ является симметрией уравнения $\mathscr{E}$, если $[Z, \mathscr{C}] \subset \mathscr{C}$. Множество симметрий образует $\mathbb{R}$-алгебру Ли относительно коммутатора, которая обозначается через $\operatorname{sym}(\mathscr{E})$.

(12) Покажем, что при незначительных ограничениях это определение фактически сводится к предыдущему.

Теорема 3. *Пусть уравнение $\mathscr{E}$ таково, что $\pi_{\infty,0}(\mathscr{E}) = J^0(\pi)$. Тогда любая симметрия $Z \in \operatorname{sym}(\mathscr{E})$ является ограничением на $\mathscr{E}$ некоторого эволюционного поля $\mathbf{E}_{\bar\varphi} \in D^v(\pi)$.*

Доказательство теоремы 3. В силу условия теоремы, имеет место мономорфизм алгебр $\mathscr{F}_0(\pi) \to \mathscr{F}(\mathscr{E})$. Рассмотрим конструкцию из задачи 15:

$$\begin{tikzcd}
J^\infty(\pi)\times_E T^vE \arrow[d, "\pi^*_{\infty,0}(\tau^v)"'] & \mathscr{E}\times_E T^vE \arrow[l, hook'] \arrow[r] \arrow[d, "\pi^*_{\infty,0}(\tau^v)|_{\mathscr{E}}"'] & T^vE \arrow[d, "\tau^v"] \\
J^\infty(\pi) & \mathscr{E} \arrow[l, hook'] \arrow[r, "\pi_{\infty,0}"] & E
\end{tikzcd}$$

Ограничивая поле Z на подалгебру $\mathscr{F}_0(\mathscr{E})$, мы получаем дифференцирование $\mathscr{F}_0(\pi) \to \mathscr{F}(\mathscr{E})$, которое можно отождествить с сечением φ расслоения $\pi^*_{\infty,0}(\tau^v)\big|_{\mathscr{E}}$. Рассмотрим такое сечение $\bar\varphi \in \varkappa(\pi)$, что $\bar\varphi|_{\mathscr{E}} = \varphi$. Это и есть производящее сечение искомого эволюционного поля. □

Таким образом, алгебру $\operatorname{sym}(\mathscr{E})$ можно отождествить с ядром линейного $\mathscr{C}$-дифференциального оператора
$$\ell_{\mathscr{E}}\colon \varkappa(\mathscr{E}) \to \mathscr{F}(\mathscr{E}, \xi).$$
При этом структура алгебры Ли задаётся ограничением скобки Якоби (11) на $\mathscr{E}$.

(13) Рассмотрим примеры.

Пример 3. Чтобы найти симметрии уравнения Кортевега–де Фриза, нужно решить уравнение
$$D_t(\varphi) = u_x\varphi + uD_x(\varphi) + D_x^3(\varphi),$$

где $\varphi = \varphi(t, x, u, \dots, u_k)$ и полные производные записаны во внутренних координатах из примера 1.

Пример 4. Определяющим уравнением для симметрий уравнения синус Гордона является

$$D_x D_y(\varphi) = \cos u \cdot \varphi,$$

где φ зависит от внутренних координат, описанных в примере 2.

Пример 5. Симметрии уравнения Бюргерса $u_t = uu_x + u_{xx}$ суть решения уравнения

$$D_t(\varphi) = u_x\varphi + uD_x(\varphi) + D_x^2(\varphi).$$

Внутренние координаты на этом уравнении (как, впрочем, и на любом эволюционном уравнении) можно выбрать так же, как и в примере 1.

Задачи

Задача 19. Постройте примеры уравнений, не являющихся формально интегрируемыми.

Задача 20. Докажите, что любой $\mathscr{C}$-дифференциальный оператор Δ над $J^\infty(\pi)$ ограничивается на бесконечно продолженные уравнения, т.е. имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\bar{\xi}) & \xrightarrow{\Delta} & \Gamma(\bar{\xi}') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathscr{F}(\mathscr{E}, \xi) & \xrightarrow{\Delta_{\mathscr{E}}} & \mathscr{F}(\mathscr{E}, \xi'), \end{array}$$

где вертикальные стрелки обозначают операцию ограничения.

Задача 21. Докажите, что в условиях п. 7 l-е продолжение уравнения задаётся оператором $\Delta^{(l)}$ (п. 2 предыдущей лекции).

Задача 22. Выпишите выражения для полных производных в примере 2.

Задача 23. Покажите, что теория классических инфинитезимальных симметрий, рассмотренная в прошлом семестре, «вкладывается» в теорию высших симметрий.

Задача 24. Как одно и то же уравнение можно вложить в разные $J^\infty(\pi)$?

Задача 25. Докажите, что ограничение поля $\mathbf{E}_{\bar{\varphi}}$, построенного при доказательстве теоремы 3, совпадает с симметрией Z.

Задача 26. Докажите, что если $\mathscr{E}$ — обыкновенное дифференциальное уравнение (т.е. если $\dim M = 1$), то алгебра $\mathrm{sym}(\mathscr{E})$ совпадает с алгеброй внутренних классических симметрий уравнения (см.[4]).

Задача 27. Система

$$w_t = u_x, \quad u_t = ww_x + v_x, \quad v_t = -uw_x - 3wu_x$$

называется бездисперсионным уравнением Буссинеска. Постройте внутренние координаты и выпишите определяющие уравнения для симметрий.

Лекция 4 (09.03.2016)

Здесь мы обсудим, как вычисляются алгебры высших симметрий. В качестве примеров мы выбрали уравнения Бюргерса и Кортевега–де Фриза.

Примеры вычислений

(1) Начнём с уравнения Бюргерса. Это уравнение описывает нелинейные волны в диссипативной недиспергирующей среде и имеет вид

$$u_t = uu_x + \nu u_{xx}, \tag{12}$$

где $\nu = \text{const} \neq 0$ — вязкость (если $\nu = 0$, то это — уравнение Хопфа).

(2) Мы решим более общую задачу и выясним, когда уравнение

$$u_t = f(u, u_x) + u_{xx} \tag{13}$$

допускает бесконечное число высших симметрий. Выберем в качестве координат на $\mathscr{E}$ функции t, x, u_k, $k \geq 0$, как это было сделано в п. 2 лекции 3 (пример 1). Тогда полные производные запишутся виде

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + u_1 \frac{\partial}{\partial u} + \dots u_{k+1} \frac{\partial}{\partial u_k} + \dots,$$
$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + (f + u_2) \frac{\partial}{\partial u} + \dots + \left(D_x^k(f) + u_{k+2} \right) \frac{\partial}{\partial u_k} + \dots,$$

а симметрии находятся из уравнения $\ell_{\mathscr{E}}(\varphi) = 0$, где

$$\ell_{\mathscr{E}} = D_t - D_x^2 - f_1 D_x - f_0,$$

$\varphi = \varphi(t, x, u, \dots, u_k)$ а через g_i обозначена частная производная $\partial g / \partial u_i$ для любой функции $g \in \mathscr{F}(\mathscr{E})$.

(3) Из первого и второго уравнений задачи 29 немедленно следует, что, во-первых,

$$\varphi_k = a_k(t)$$

и, во-вторых,

$$2D_x(\varphi_{k-1}) = \dot{a}_k + kD_x(f_1)a_k,$$

где $\dot{a} = da/dt$. Значит,

$$\varphi_{k-1} = \frac{1}{2}(\dot{a}_k + kf_1 a_k)x + a_{k-1}(t).$$

Воспользуемся теперь задачей 30:

$$D_t(f_1) = (u_2 + f)f_{01} + D_x(u_2 + f)f_{11} = \\ = (u_2 + f)(f_1 f_{01} - D_x(f_{11})) + D_x((u_2 + f)f_{11}) \in \operatorname{im} D_x.$$

Значит, $(u_2 + f)(f_1 f_{01} - D_x(f_{11})) \in \operatorname{im} D_x$. Но функции вида $D_x g$ линейны по старшей производной, полученное выражение — квадратично. Следовательно, $f_{111} = 0$ и

$$f = Au_x^2 + Bu_x + C,$$

где A, B и C — функции, зависящие только от u. Значит, уравнение (13) обязано иметь вид

$$u_t = u_{xx} + A(u)u_x^2 + B(u)u_x + C(u), \tag{14}$$

где, как следует из вычислений,

$$AB_0 = B_{00}, \qquad CB_0 = \text{const}.$$

Из задачи 31 вытекает, что без ограничения общности можно считать, что $A = 0$. Значит $B = \beta_0 + \beta_1 u$, $\beta = 0$, $\beta_1 = \text{const}$. Возможны два случая: (a) $\beta_1 \neq 0$, (b) $\beta_1 = 0$.

(4) Если $\beta_1 \neq 0$, то $C = \text{const}$ и уравнение (14) приводится к виду

$$u_t = uu_x + u_{xx},$$

т.е. к уравнению Бюргерса (задача 32). В противном случае уравнение примет вид

$$u_t = u_{xx}$$

(задачи 33 и 34). Итог нашим вычислениям подводит

Предложение 1. *Если уравнение* (13) *допускает высшие симметрии порядка* ≥ 3, *эквивалентно либо уравнению Бюргерса, либо уравнению теплопроводности.*

(5) Займёмся вычислением алгебры $\operatorname{sym}(\mathscr{E})$ для уравнения Бюргерса. Во-первых, заметим, что из вычислений п. 3 следует, что любая симметрия порядка k должна иметь вид

$$\varphi_k[a] = au_k + \frac{1}{2}(\dot{a}x + au + a')u_{k-1} + O(k-2), \tag{15}$$

где $O(l)$ обозначает члены, не зависящие от $O(l+1)$ и более старших переменных. Из задачи 35 следует, что

$$\{\varphi_k[a], \varphi_l[b]\} = \frac{1}{2}\varphi_{k+l-2}[l\dot{a}b - k\dot{b}a]. \tag{16}$$

(6) Формулу (15) можно понимать как «оценку сверху» элементов алгебры $\operatorname{sym}(\mathscr{E})$. «Оценка снизу» даётся перечислением классических симметрий:

$$\varphi_1^0 = u_1, \quad \varphi_1^1 = tu_1 + 1$$

$$\varphi_2^0 = u_2 + uu_1, \quad \varphi_2^1 = tu_2 + \left(tu + \frac{1}{2}x\right)u_1 + \frac{1}{2}u,$$
$$\varphi_2^2 = t^2u_2 + (t^2u + tx)u_1 + tu + x.$$

(7) Рассмотрим симметрию φ_1^0 (трансляцию по x). Из сказанного выше следует, что
$$\{\varphi_k[a], \varphi_1^0\} = \frac{1}{2}\dot{a}u_{k-1} + O(k-2).$$
Следовательно, если $\varphi_k[a]$ — симметрия, то и
$$\frac{d^{k-1}a}{dt^{k-1}}u_1 + O(0)$$
— симметрия. Но из сказанного выше видно, что все симметрии такого видя суть многочлены первой степени по t. Значит, a — многочлен степени, не выше k.

(8) Покажем, наконец, что для всех k и $i = 0, 1, \ldots, k$ симметрия вида
$$\varphi_k^i = t^i u_k + O(k-1)$$
действительно существует. Рассмотрим симметрию φ_3^1 из задачи 37. Тогда
$$\{\varphi_k[a], \varphi_3^1\} = \frac{1}{2}(3\dot{a}t - ka)u_{k+1} + O(k).$$
Следовательно, применяя оператор $\{\cdot, \varphi_3^1\}$ к симметрии $\varphi_1^0 = u_1$ нужное число раз, мы получим все симметрии вида φ_k^0.

(9) Рассмотрим теперь симметрию φ_2^2. Легко видеть, что
$$\{\varphi_k[a], \varphi_2^2\} = t(t\dot{a} - ka)u_k + O(k-1).$$
Поэтому, действуя оператором $\{\cdot, \varphi_2^2\}$ на φ_k^0, мы получим симметрии $\varphi_k^1, \ldots, \varphi_k^k$.

(10) Чтобы завершить описание алгебры симметрий уравнения Бюргерса, опишем одну распространённую и практически важную конструкцию. Присвоим переменным веса, полагая
$$|t| = 2, \qquad |x| = 1, \qquad |u_k| = -k-1,$$
а любому дифференциальному моному из $\mathscr{F}(\mathscr{E})$ — сумму весов входящих в него сомножителей. Тогда оператор линеаризации получает вес, равный -2 ($|\ell_{\mathscr{E}}|(\varphi) = |\varphi| - 2$) и, поскольку все симметрии уравнения полиномиальны (задача 38), достаточно искать только однородные в смысле веса решения уравнения $\ell_{\mathscr{E}}(\varphi) = 0$. Очевидно, что два параметра симметрии — её вес и порядок — однозначно её определяют.

(11) Теперь мы можем сформулировать окончательный результат:

Предложение 2. *Алгебра высших симметрий уравнения Бюргерса как векторное пространство порождена элементами* $\varphi_k^i = t^i u_k + O(k-1)$, $k = 1, 2, \dots$, $i = 0, 1, \dots, k$. *При этом*

$$\{\varphi_k^i, \varphi_l^j\} = \frac{1}{2}(li - kj)\varphi_{k+l-2}^{i+j-1}.$$

В частности, симметрии φ_k^0 *попарно коммутируют. При этом как алгебра Ли она порождена тремя элементами —* φ_1^0, φ_2^2 *и* φ_3^1.

(12) Обратимся к уравнению Кортевега–де Фриза

$$u_t = uu_x + u_{xxx}.$$

Его симметрии суть решения уравнения

$$D_t(\varphi) = u_1\varphi + uD_x(\varphi) + D_x^3(\varphi).$$

Решая это уравнения для φ порядка ≤ 3, нетрудно убедиться, что уравнение КдФ допускает только симметрии вида

$$\varphi_1^0 = u_1, \qquad \varphi_1^1 = tu_1 + 1,$$
$$\varphi_3^0 = u_3 + uu_1, \qquad \varphi_3^1 = tu_3 + \left(tu + \frac{1}{3}x\right)u_1 + \frac{2}{3}u$$

(классические симметрии). Пользуясь оценками, аналогичными тем, которые были получены для уравнения Бюргерса (задача 40), можно также доказать, что все симметрии полиномиальны и симметрий вида $t^i u_k + \dots$, $i > 1$, $k > 3$ не существует. Однако прямые вычисления показывают, что у уравнения КдФ есть симметрия

$$\varphi_5^0 = u_5 + uu_3 + u_1u_2 + u^2u_1.$$

Если продолжать (громоздкие и не слишком поучительные) вычисления, то найдутся симметрии φ_7^0 и т.д.

(13) Существование так называемой бесконечной серии высших уравнений КдФ (т.е. симметрий вида φ_k^0) впервые было установлено с помощью оператора

$$\mathscr{R} = D_x^2 + \frac{2}{3}u + \frac{1}{3}u_1D_x^{-1}, \tag{17}$$

который называется оператором рекурсии Ленарда (см. задачу 41). Если, однако, применить этот оператор к масштабной симметрии φ_3^1, то получится выражение, содержащее член $D_x^{-1}(u)$, которое в рамках развитой нами геометрической картины не имеет смысла. Возникает естественный вопрос: можно ли придать ему геометрический смысл? Этим мы займёмся в следующей лекции, а затем построим геометрическую теорию операторов рекурсии.

Задачи

Задача 28. Покажите, что подходящим масштабным преобразованием уравнение (12) можно привести к виду $u_t = uu_x + u_{xx}$.

Задача 29. Докажите, что если φ — симметрия и $k \geq 2$, то выполняются равенства

$$D_x(\varphi_k) = 0,$$
$$2D_x(\varphi_{k-1}) = \ell_{\mathscr{E}}(\varphi_k) + [f_0 + kD_x(f_1)]\,\varphi_k,$$

и

$$2D_x(\varphi_i) = \ell_{\mathscr{E}}(\varphi_{i+1}) + \sum_{\alpha=i+1}^{k} \left[\binom{\alpha}{\alpha - i - 1} D_x^{\alpha-i-1}(f_0) + \binom{\alpha}{\alpha - i} D_x^{\alpha-i}(f_1) \right] \varphi_\alpha.$$

при $i < k - 1$.

Задача 30. Докажите, что если $\varphi_k = a_k(t) \neq 0$, то третье уравнение ($i = k - 2$) из задачи 29 разрешимо только тогда, когда $D_t(f_1) \in \operatorname{im} D_x$: $D_t f = D_x g$ для некоторой функции g на уравнении (это означает, что форма $f\,dx + g\,dt$ является законом сохранения уравнения; см. ниже).

Задача 31. Пусть $A = A(u)$ — функция из уравнения (14), а Ψ — отличное от константы решение уравнения

$$\Psi_{uu} + A(\Psi)\Psi_u^2 = 0.$$

Докажите, что замена $u \mapsto \Psi(u)$ приводит уравнение (14) к виду

$$u_t = u_{xx} + \tilde{B}(u)u_x + \tilde{C}(u).$$

Задача 32. Найдите замену, приводящую уравнение $u_t = u_{xx} + (\beta_1 u + \beta_0)u_x + \gamma$ к уравнению Бюргерса.

Задача 33. Докажите, что если $B = \mathrm{const}$ и $C = C(u)$, то условием разрешимости четвёртого уравнения ($i = k - 3$) из задачи 29 является линейность функции C.

Задача 34. Найдите замену, приводящую уравнение $u_t = u_{xx} + \beta_0 u_x + \gamma_1 u + \gamma_0$ к уравнению теплопроводности.

Задача 35. Докажите, что если $\varphi_k[a]$ и $\varphi_l[b]$ — функции вида (15), то

$$\{\varphi_k[a], \varphi_l[b]\} = \frac{1}{2}(l\dot{a}b - k\dot{b}a)u_{k+l-2} + O(k + l - 3).$$

Задача 36. Убедитесь в том, что функциями, перечисленными в п. 6, исчерпываются классические симметрии уравнения Бюргерса.

Задача 37. Убедитесь, что уравнения Бюргерса допускает симметрию

$$\varphi_3^1 = tu_3 + \frac{1}{2}(x + 3tu)u_2 + \frac{3}{2}tu_1^2 + \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}tu\right)uu_1 + \frac{1}{4}u^2.$$

Задача 38. Докажите, что симметрии уравнения Бюргерса полиномиальны по всем переменным, от которых они зависят.

Задача 39. Опишите алгебру симметрий уравнения теплопроводности.

Задача 40. Получите оценки для симметрий уравнения Кортевега–де Фриза, аналогичные формулам (15) и (16).

Задача 41. Рассмотрите оператор (17) и договоримся, что $D_x^{-1}(0) = 0$.

(1) Докажите, что если φ — симметрия уравнения КдФ и действие $\varphi \mapsto \mathscr{R}(\varphi)$ определено, то $\mathscr{R}(\varphi)$ — тоже симметрия.
(2) Пусть φ — симметрия, не зависящая от x и t. Докажите что она обязана иметь вид $D_x(\psi)$ и, тем самым, действие оператора $\mathscr{R}$ на неё определено корректно.

Задача 42. Докажите, что оператор

$$\mathscr{R} = D_x + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u_1 D_x^{-1}$$

является оператором рекурсии для симметрий уравнения Бюргерса.

Лекция 5 (16.03.2016)

Эта лекция посвящена введению в «нелокальную геометрию» дифференциальных уравнений.

Дифференциальные накрытия

(1) Уравнение $\mathscr{E} \subset J^\infty(\pi)$ называется дифференциально связным, если единственными интегралами системы

$$\mathscr{C}_X(f) = 0, \qquad f \in \mathscr{F}(\mathscr{E}), \quad X \in D(M),$$

являются константы. Очевидно, в локальных координатах дифференциальную связность достаточно проверить, решая уравнения $D_{x^i}(f) = 0$, $i = 1, \dots, n$. В дальнейшем дифференциальная связность предполагается.

(2) Пусть $\tilde{\mathscr{E}}$ — другое уравнение и $\tau \colon \tilde{\mathscr{E}} \to \mathscr{E}$ — морфизм, т.е. такое гладкое отображение, что

$$\tau_*(\tilde{\mathscr{C}}_{\tilde{\theta}}) \subset \mathscr{C}_{\tau(\tilde{\theta})}, \qquad \tilde{\theta} \in \tilde{\mathscr{E}},$$

где $\tilde{\mathscr{C}}$ и $\mathscr{C}$ — распределения Картана на $\tilde{\mathscr{E}}$ и $\mathscr{E}$ соответственно. Он называется дифференциальным накрытием (или просто накрытием), если ограничение $\tau_*|_{\mathscr{C}_{\tau(\tilde{\theta})}}$ является изоморфизмом для любой точки $\tilde{\theta} \in \tilde{\mathscr{E}}$. В дальнейшем мы, как правило, будем предполагать, что τ — векторное расслоение. Число $\operatorname{rank} \tau$ (или бесконечность) называется размерностью накрытия.

(3) Рассмотрим пример.

Пример 6. Пусть $\mathscr{E}$ — уравнение Кортевега–де Фриза с внутренними координатами t, x, u, $u_1\dots$ и $\tilde{\mathscr{E}}$ — потенциальное уравнение КдФ $v_t = \frac{1}{2}v_x^2 + v_{xxx}$ с координатами x, t и v, $v_1\dots$ Тогда отображение τ, заданное равенствами

$$\tau^*(t) = t, \quad \tau^*(x) = x, \quad \tau^*(u_k) = v_{k+1} \qquad k = 0, 1, \dots,$$

является накрытием.

(4) Морфизмом накрытий называется коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} \tilde{\mathscr{E}}_1 \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\tau_1"'] & \tilde{\mathscr{E}}_2 \arrow[d, "\tau_2"] \\ \mathscr{E}_1 \arrow[r, "f"] & \mathscr{E}_2, \end{tikzcd}$$

где $\tilde{f}$ и f — морфизмы уравнений. Морфизм называется эквивалентностью, если обе горизонтальные стрелки — диффеоморфизмы. Преобразования эквивалентности называют также калибровочными.

(5) Накрытие $\tau\colon \tilde{\mathscr{E}} \to \mathscr{E}$ называется неприводимым, если накрывающее уравнение диффереციально связно. В противном случае оно приводимо. Конечномерное накрытие называется тривиальным, если пространство решений системы $\tilde{\mathscr{C}}_X(f) = 0$, $X \in D(M)$, имеет максимально возможный ранг. В бесконечномерном случае тривиальность можно определить, воспользовавшись результатом задачи 50.

(6) Рассмотрим два накрытия над уравнением $\mathscr{E}$ и диаграмму

$$\begin{tikzcd} \tilde{\mathscr{E}}_1 \times_{\mathscr{E}} \tilde{\mathscr{E}}_2 \arrow[r, "\tilde{\tau}_2"] \arrow[d, "\tilde{\tau}_1"'] \arrow[dr, "\tau_1\times\tau_2"] & \tilde{\mathscr{E}}_1 \arrow[d, "\tau_1"] \\ \tilde{\mathscr{E}}_2 \arrow[r, "\tau_2"'] & \mathscr{E}. \end{tikzcd} \tag{18}$$

где $\tilde{\tau}_1 = \tau_2^*(\tau_1)$, $\tilde{\tau}_2 = \tau_1^*(\tau_2)$. Определим в расслоении $\tau_1 \times \tau_2$ связность $\mathscr{C}^\times$ из условий

$$\tau_{2,*}(\mathscr{C}_X^\times) = \mathscr{C}_X^1, \quad \tau_{1,*}(\mathscr{C}_X^\times) = \mathscr{C}_X^2, \qquad X \in D(M).$$

Определённая таким образом структура накрытия (задача 47) называется суммой Уитни накрытий τ_1 и τ_2.

(7) Дадим координатную версию понятия накрытия. Пусть x^i, u_σ^j — внутренние координаты на уравнении $\mathscr{E}$ и w^α — послойные координаты расслоения τ в некоторой его тривиализации (называемые нелокальными переменными). Тогда полные производные на $\mathscr{E}$ можно представить в виде

$$\tilde{D}_{x^i} = D_{x^i} + Y_i, \qquad i = 1, \dots, n, \tag{19}$$

где

$$Y_i = \sum_\alpha Y_i^\alpha \frac{\partial}{\partial w^\alpha}$$

— τ-вертикальные векторные поля («нелокальные хвосты»). При этом должно выполняться условие

$$D_{x^i}(Y_j) - D_{x^j}(Y_i) + [Y_i, Y_j] = 0, \qquad 1 \le i < j \le n, \tag{20}$$

где $D_{x^\alpha}(Y_\beta)$ обозначает покомпонентное действие.

Пример 7. В накрытии из примера 6 полные производные имеют вид

$$\tilde{D}_x = D_x + u\frac{\partial}{\partial v}, \qquad \tilde{D}_t = D_t + \left(\frac{1}{2}u^2 + u_{xx}\right)\frac{\partial}{\partial v},$$

а система (26) — это

$$\frac{\partial v}{\partial x} = u, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{2}u^2 + u_{xx}.$$

Таким образом, v — это та самая нелокальная переменная $D_x^{-1}(u)$, которая возникла в п. 13 предыдущей лекции при действии оператора рекурсии Ленарда.

(8) Эффективно описать все накрытия над данным уравнением — задача, практически неразрешимая. Есть, однако, частные случаи, в которых удаётся получить достаточно общие классы накрытий. Один из них — накрытия над эволюционными уравнениями, подчиняющиеся так называемому анзацу Уолквиста–Эстабрука. Именно, пусть, для простоты, $\mathscr{E}$ — эволюционное уравнение

$$u_t = f(u, \dots, u_k),$$

не зависящее явно от x и t, и

$$\tilde{D}_x = D_x + X, \qquad \tilde{D}_t = D_t + T,$$

где хвосты X и T зависят только от переменных $u, \dots, u_{k-1}$. Классы эквивалентности этих накрытий можно описать в терминах некоторой бесконечномерной алгебры Ли — алгебры Уолквиста–Эстабрука.

(9) Проиллюстрируем, как возникает алгебра Уолквиста–Эстабрука, на примере уравнения Бюргерса.

Пример 8. Для уравнения $u_t = uu_x + u_{xx}$ система (20) в условиях анзаца имеет вид

$$u_1\frac{\partial T}{\partial u} + u_2\frac{\partial T}{\partial u_1} - (uu_1 + u_2)\frac{\partial X}{\partial u} - (u_1^2 + uu_2 + u_3)\frac{\partial X}{\partial u_1} + [X, T] = 0, \tag{21}$$

где $X = X(u, u_1)$, $T = T(u, u_1)$ — τ-вертикальные векторные поля. Отсюда видно, что поле T не зависит от u_1 и

$$T = u_1 \frac{\partial X}{\partial u} + R,$$

причём вертикальное поле R также не зависит от u_1. Подставляя это выражение в (21), получаем

$$u_1^2 \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} + u_1 \left(\frac{\partial R}{\partial u} - u \frac{\partial X}{\partial u} + \left[X, \frac{\partial X}{\partial u} \right] \right) + [X, R] = 0,$$

откуда немедленно следует, что

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} = 0, \qquad \frac{\partial R}{\partial u} - u \frac{\partial X}{\partial u} + \left[X, \frac{\partial X}{\partial u} \right] = 0, \qquad [X, R] = 0.$$

Из этих уравнений легко следует, что хвосты имеют вид

$$X = uA + B, \qquad T = \left(u_1 + \frac{1}{2} u^2 \right) A + u[A, D] + C,$$

где A, B и C — векторные поля на слое накрытия, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$[A, [A, B]] = \frac{1}{2}[A, B], \qquad [B, [B, A]] = [A, C], \qquad [B, C] = 0. \tag{22}$$

Эти поля вместе соотношениями, которым они удовлетворяют, и определяют алгебру Уолквиста–Эстабрука уравнения Бюргерса.

(10) Таким образом, любое накрытие типа Уолквиста–Эстабрука над уравнением Бюргерса локально определяется представлением свободной алгебры $\mathfrak{we}(\mathscr{E})$ с образующими A, B, C и соотношениями (22) в векторных полях на пространстве $\mathbb{R}^N$, где N — размерность накрытия (см. задачу 52).

(11) Рассмотрим конечномерное накрытие $\tau \colon \tilde{\mathscr{E}} \to \mathscr{E}$, $\operatorname{rank} \tau = N$, и решение $s \in \mathscr{E}$ уравнения $\mathscr{E}$. Тогда ограничение распределения Картана $\tilde{\mathscr{C}}$ на $(N + n)$-мерное многообразие $\tilde{s} = \tau^{-1}(s) \subset \tilde{\mathscr{E}}$ — вполне интегрируемое распределение, а его максимальные интегральные многообразия суть решения уравнения $\tilde{\mathscr{E}}$. Следовательно, многообразие $\tilde{s}$ расслаивается на N-параметрическое семейство решений.

Пример 9. Рассмотрим накрытие τ^0 из задачи 52 и перейдём к эквивалентному накрытию τ с калибровочного преобразования $w \mapsto 2 \ln w$. Новая нелокальная переменная определяется равенством

$$w_x = \frac{1}{2} w u,$$

которое называется преобразованием Коула–Хопфа, а накрывающее уравнение — это уравнение теплопроводности $w_t = w_{xx}$ (задача 55). Рассматриваемое накрытие одномерно, и каждому решению $u = u(x,t)$ соответствует однопараметрическое семейство решений

$$w_\lambda(x,t) = \lambda e^{\frac{1}{2}\int u\,dx}, \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

уравнения теплопроводности.

(12) Продолжим анализ примера 9. Пусть u_1 и u_2 — решения уравнения Бюргерса и w_{1,λ_1}, w_{2,λ_2} — соответствующие решения уравнения теплопроводности. Тогда, поскольку последнее линейно, их сумма проектируется в двупараметрическое семейство решений

$$u_{12} = \frac{\lambda_1 u_1 e^{\frac{1}{2}\int u_1\,dx} + \lambda_2 u_2 e^{\frac{1}{2}\int u_2\,dx}}{\lambda_1 e^{\frac{1}{2}\int u_1\,dx}\,dx + \lambda_2 e^{\frac{1}{2}\int u_2\,dx}\,dx}$$

уравнения Бюргерса. Описанная процедура называется принципом нелинейной суперпозиции. Например, суперпозицей двух очевидных постоянных решений является семейство функций

$$u_{12} = \frac{\lambda_1 c_1 e^{\frac{c_1 x}{2}} + \lambda_2 c_2 e^{\frac{c_2 x}{2}}}{\lambda_1 e^{\frac{c_1 x}{2}} + \lambda_2 e^{\frac{c_2 x}{2}}},$$

где c_1, $c_2 = \mathrm{const}$ — исходные решения.

(13) Рассмотрим близкую конструкцию. Пусть w' — решение уравнения теплопроводности. Тогда сдвиг $w \mapsto w + w'$ порождает симметрию $\varphi_{w'}$ уравнения и можно рассмотреть диаграмму

$$\begin{tikzcd}
& \tilde{\mathscr{E}} \arrow[r, "\varphi_{w'}"] \arrow[dl, "\tau"'] \arrow[dr, "\tau'"] & \tilde{\mathscr{E}} \arrow[d, "\tau"] \\
\mathscr{E} & & \mathscr{E}.
\end{tikzcd}$$

Её средняя часть, состоящая из пары накрытий τ и $\tau' = \tau \circ \varphi_{w'}$ называется авто-преобразованием Беклунда и обладает следующим свойством: если s — решение уравнения Бюргерса, то множества $\tau^{-1}(\tau'(s))$ и $(\tau')^{-1}(\tau(s))$ «рассыпаются» на семейства решений того же уравнения.

(14) Впервые такие преобразования были обнаружены В. Беклундом при исследовании иммерсий поверхностей постоянной отрицательной кривизны (псевдосферических поверхностей) в евклидово пространство. Эти иммерсии описываются уравнением синус Гордона

$$u_{xy} = \sin u,$$

а найденное Беклундом преобразование аналитически записывается в виде

$$\mathscr{B}_\lambda\colon\ w_x = 2\lambda \sin\frac{w+u}{2} + u_x, \quad w_y = \frac{2}{\lambda}\sin\frac{w-u}{2} - u_y, \qquad \lambda \neq 0. \quad (23)$$

(15) Замечательное свойство преобразований Беклунда обнаружил Л. Бьянки: он доказал так называемую теорему перестановочности, которую неформально можно проиллюстрировать следующей диаграммой

$$\begin{tikzcd}
& u_\lambda \arrow[dr, "\mathscr{B}_\mu"] & \\
u \arrow[ur, "\mathscr{B}_\lambda"] \arrow[dr, "\mathscr{B}_\mu"'] & & u_{\lambda\mu}. \\
& u_\mu \arrow[ur, "\mathscr{B}_\lambda"'] &
\end{tikzcd}$$

пусть есть решение u Иными словами, если u — решение уравнения синус Гордона и u_λ, u_μ обозначают новые его решения, полученные с помощью (23) при различных значениях параметра, то существует решение

$$u_{\lambda\mu} = (u_\lambda)_\mu = (u_\mu)_\lambda.$$

(16) Более того, это решение можно выразить явно:

$$u_{\lambda\mu} = u + 4\operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}\operatorname{tg}\frac{u_\mu - u_\lambda}{4}\right), \tag{24}$$

так что для его построения не требуется интегрирования. Например, в качестве u можно естественно взять простейшее, тривиальное решение $u = 0$. Тогда

$$u_\lambda = 4\operatorname{arctg}\left(\lambda x + \frac{y}{\lambda} + \alpha\right), \qquad \alpha = \mathrm{const}, \tag{25}$$

— решение, называемое 1-кинком. Теперь, пользуясь формулой (24), можно построить бесконечно псевдосферических поверхностей, вложенных в $\mathbb{R}^3$. Подобная ситуация не является исключительной и часто возникает при изучении интегрируемых уравнений (см., например, задачи 59 и 60).

Преобразования Беклунда понадобятся нам в дальнейшем для исследования операторов рекурсии и других структур, отвечающих за интегрируемость.

(17) В заключение мы обсудим некоторые аспекты теории симметрий, возникающие в нелокальной ситуации. Пусть $\tau\colon \tilde{\mathscr{E}} \to \mathscr{E}$ — накрытие. Симметрия Z накрывающего уравнения называется τ-нелокальной симметрией уравнения $\mathscr{E}$. Нелокальная симметрия называется невидимой, если $Z|_{\mathscr{F}(\mathscr{E})} = 0$. Дифференцирование $Z\colon \mathscr{F}(\mathscr{E}) \to \mathscr{F}(\tilde{\mathscr{E}})$ называется τ-тенью, если оно π_∞-вертикально

и для любого поля $X \in D(M)$ диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(\mathscr{E}) \arrow[r, "\mathscr{C}_X"] \arrow[d, "Z"'] & \mathscr{F}(\mathscr{E}) \arrow[d, "Z"] \\ \mathscr{F}(\tilde{\mathscr{E}}) \arrow[r, "\tilde{\mathscr{C}}_X"] & \mathscr{F}(\tilde{\mathscr{E}}) \end{tikzcd}$$

коммутативна.

(18) Если накрытие задано в виде

$$\tilde{D}_{x^i} = D_{x^i} + \sum_{\alpha} Y_i^{\alpha} \frac{\partial}{\partial w^{\alpha}},$$

то нелокальная симметрия задаётся системой функций φ, $\psi^{\alpha} \in \mathscr{F}(\mathscr{E})$, удовлетворяющих уравнениям

$$\begin{aligned} &\tilde{\ell}_{\mathscr{E}}(\varphi) = 0, \\ &\tilde{D}_{x^i}(\psi^{\alpha}) = \tilde{\ell}_{Y_i^{\alpha}}(\varphi) + \sum_{\beta} \frac{\partial Y_i^{\alpha}}{\partial w^{\beta}} \psi^{\beta}, \end{aligned}$$

где «тильды» обозначают поднятия $\mathscr{C}$-дифференциальных операторов (задача 44). При этом невидимые симметрии — это такие симметрии, у которых $\varphi = 0$, а у теней, наоборот, равны нулю все компоненты ψ^{α}.

Задачи

Задача 43. Приведите пример уравнения, не являющегося дифференциально связным.

Задача 44. Покажите что любой $\mathscr{C}$-дифференциальный оператор Δ на $\mathscr{E}$ поднимается до $\mathscr{C}$-дифференциального оператора $\tilde{\Delta}$ на $\tilde{\mathscr{E}}$ и операция поднятия согласована с композицией.

Задача 45. Какова размерность накрытия из примера 6?

Задача 46. Чему равен ранг системы решений в случае тривиального накрытия (п. 5)?

Задача 47. Рассмотрим конструкцию п. 6. Докажите, что:

(1) связность $\mathscr{C}^{\times}$ определена корректно и является плоской;
(2) диаграмма (18) является морфизмом накрытий.

Задача 48. Пусть $\tau_i \colon \tilde{\mathscr{E}}_i \to \mathscr{E}$, $i = 1, 2,$ — неприводимые конечномерные накрытия. Докажите, что:

(1) необходимым условием их эквивалентности является приводимость суммы Уитни;
(2) если накрытия одномерны, то это условие является достаточным.

Каковы достаточные условия эквивалентности, если размерности накрытий > 1?

Задача 49. Покажите, что условие (20) равносильно тому, что нелокальные переменные удовлетворяют системе уравнений $\tilde{\mathscr{E}}$

$$\frac{\partial w^\alpha}{\partial x^i} = Y_i^\alpha, \tag{26}$$

которая должна быть совместна с уравнением $\mathscr{E}$. При этом поля $\tilde{D}_{x^i}$ суть полные производные на $\tilde{\mathscr{E}}$.

Задача 50. Докажите, что конечномерное накрытие тривиально тогда и только тогда, когда существует локальная система координат, в которой хвосты Y_i становятся нулевыми.

Задача 51. Пусть $\tau_i\colon \tilde{\mathscr{E}}_i \to \mathscr{E}$, $i = 1, 2,$ — накрытия, локально определяемые хвостами

$$Y_{1,i} = \sum_\alpha Y_{2,i}^\alpha \frac{\partial}{\partial w_1^\alpha}, \qquad Y_{2,i} = \sum_\alpha Y_{2,i}^\alpha \frac{\partial}{\partial w_2^\alpha}$$

Покажите, что сумма Уитни этих накрытий определяется полями

$$\tilde{D}_{x^i} = D_{x^i} + Y_{1,i} + Y_{2,i}.$$

Задача 52. Докажите, что любое нетривиальное одномерное накрытие типа Уолквиста–Эстабрука над уравнением Бюргерса эквивалентно одному из следующих:

$$\begin{aligned}
\tau^0\colon \tilde{D}_x &= D_x + u\frac{\partial}{\partial w},\\
\tilde{D}_t &= D_t + \left(u_1 + \frac{1}{2}u^2\right)\frac{\partial}{\partial w};\\
\tau_\lambda^+\colon \tilde{D}_x &= D_x + \left(u + e^{w/2} + \lambda\right)\frac{\partial}{\partial w},\\
\tilde{D}_t &= D_t + \left(u_1 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}e^{w/2}u - \frac{\lambda}{2}e^{w/2} - \frac{\lambda^2}{2}\right)\frac{\partial}{\partial w};\\
\tau_\lambda^-\colon \tilde{D}_x &= D_x + \left(u - e^{w/2} + \lambda\right)\frac{\partial}{\partial w},\\
\tilde{D}_t &= D_t + \left(u_1 + \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}e^{w/2}u + \frac{\lambda}{2}e^{w/2} - \frac{\lambda^2}{2}\right)\frac{\partial}{\partial w},
\end{aligned}$$

$\lambda = \mathrm{const}$, причём все это накрытия попарно неэквивалентны.

Задача 53. Опишите алгебру Уолквиста–Эстабрука для уравнения Кортевега–де Фриза и найдите классы эквивалентности одномерных накрытий, соответствующих представлениям этой алгебры.

Задача 54. Рассмотрите уравнение $u_{xy} = f(u)$ и попробуйте сформулировать для него анзац, аналогичный анзацу Уолквиста–Эстабрука. Расклассифицируйте эти уравнения в зависимости от допускаемых ими накрытий.

Задача 55. Докажите, что нарывающим уравнением в накрытии из примера 9 является одномерное уравнение теплопроводности.

Задача 56. Покажите, что система уравнений Коши–Римана является преобразованием Беклунда для уравнения Лапласа.

Задача 57. Докажите, что равенства (23) определяют однопараметрическое семейство попарно неэквивалентных накрытий над уравнением синус Гордона.

Задача 58. Докажите формулы (24) и (25).

Задача 59. Рассмотрим потенциальное уравнение Кортевега–де Фриза в виде $u_t + 3u_x^2 + u_{xxx} = 0$.

(1) Докажите, что система

$$w_x = \lambda - u_x - \frac{1}{2}(u-w)^2, \qquad w_t = (u-w)(u_{xx} - w_{xx}) - 2(u_x^2 + u_x w_x + w_x^2)$$

определяет его авто-преобразование Беклунда.

(2) Докажите, что для этого преобразования теорема перестановочности имеет вид

$$u_{\lambda\mu} = 2\frac{\lambda - \mu}{u_\lambda - u_\mu}, \qquad \lambda \neq \mu.$$

(3) Покажите, что результатом его применения к тривильному решению является односолитонное решение

$$u_\lambda = \sqrt{2\lambda} \cdot \operatorname{th}\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}(x - 2\lambda t)\right)$$

и найдите выражение для двусолитонных решений.

Задача 60. Пользуясь тем, что потенциальное уравнение Кортевега–де Фриза накрывает уравнение КдФ, и результатами задачи 59, опишите преобразование Беклунда для КдФ и опишите его многосолитонные решения.

Задача 61. Докажите, что уравнение Лиувилля $u_{xy} = e^u$ накрывается линейным уравнением и найдите формулу нелинейной суперпозиции для его решений.

Задача 62. Пусть $\tau\colon \tilde{\mathscr{E}} \to \mathscr{E}$ — накрытие и $Z\colon \mathscr{F}(\mathscr{E}) \to \mathscr{F}(\tilde{\mathscr{E}})$ — тень в этом накрытии. Говорят, что эта тень поднимается (или восстанавливается), если существует такая нелокальная симметрия $\tilde{Z}\colon \mathscr{F}(\tilde{\mathscr{E}}) \to \mathscr{F}(\tilde{\mathscr{E}})$, что $\tilde{Z}\Big|_{\mathscr{F}(\mathscr{E})} = Z$. Не всякая тень восстанавливается, но справедлив более слабый результат:

Предложение 3. *Существует накрытие $\tau_Z\colon \tilde{\mathscr{E}}_Z \to \tilde{\mathscr{E}}$ и такая тень $\tilde{Z}\colon \mathscr{F}(\tilde{\mathscr{E}}) \to \mathscr{F}(\tilde{\mathscr{E}}_Z)$ в этом накрытии, что $\tilde{Z}\Big|_{\mathscr{E}} = Z$.*

Докажите это утверждение.

Задача 63. Рассмотрим накрытие $\tau\colon \tilde{\mathscr{E}} \to \mathscr{E}$ и классическую симметрию Z уравнения $\mathscr{E}$. Докажите, что если поле Z не поднимается в накрытие τ, то оно порождает однопараметрическое семейство попарно неэквивалентных накрытий $\tau_\lambda\colon \tilde{\mathscr{E}} \to \mathscr{E}$, $\tau_0 = \tau$.

Лекция 6 (23.03.2016)

Здесь мы изучим важный класс накрытий и не менее важные инварианты уравнений, возникающие в этой связи.

Законы сохранения абелевы накрытия

(1) Начнём с примера.

Пример 10. Рассмотрим снова накрытие

$$\tilde{D}_x = D_x + u\frac{\partial}{\partial w}, \qquad \tilde{D}_t = D_t + \left(u_2 + \frac{1}{2}u^2\right)\frac{\partial}{\partial w}$$

(см. примеры 6 и 7). Накрывающим уравнением является потенциальное уравнение Кортевега–де Фриза, и это факт использовался в задаче 60. Рассмотрим дифференциальную форму

$$\omega = u\,dx + \left(u_2 + \frac{1}{2}u^2\right)dt$$

на $\mathscr{E}$. Эта форма обладает двумя свойствами:

(a) она замкнута, но не точна относительно дифференциала

$$d_h = dx \wedge D_x + dt \wedge D_t$$

на $\mathscr{E}$;

(b) будучи поднятой на $\tilde{\mathscr{E}}$, она становится точной: $\omega = \tilde{d}_h(w)$, где $\tilde{d}_h = dx \wedge \tilde{D}_x + dt \wedge \tilde{D}_t$.

Аналогичным свойством обладает форма

$$\omega = \frac{1}{2}u^2\,dx + \left(\frac{1}{3}u^3 + u_2 - \frac{1}{2}u_1^2\right)dt.$$

(2) Формы подобного рода называются законами сохранения, и вот по какой причине. Рассмотрим эволюционное уравнение $u_t = f(t, x, u, \dots, u_k)$ и d_h-замкнутую форму $\omega = X\,dx + T\,dt$ на нём. Пусть $s = s(t, x)$ — такое решение, что $\lim_{x\to\pm\infty} s = 0$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty} X|_s\,dx = \left(D_t\int_{-\infty}^{+\infty} X\,dx\right)\Big|_s = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} D_t X\,dx\right)\Big|_s = \\ = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} D_x T\,dx\right)\Big|_s = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx}\,T|_s\,dx = 0.$$

Иными словами, величина $\int_{-\infty}^{+\infty} X|_s \, dx$ является постоянной на решениях с указанными свойствами (или, например, на периодических по x решениях). Заметим, что если $X = D_x(X')$, то сохраняется тривиальная величина; поэтому d_h-точные формы — это тривиальные законы сохранения. В частности, рассмотренные в примере 10 формы являются законами сохранения импульса и энергии соответственно.

(3) Прежде чем переходить к общей теории, обсудим одно замечательное свойство уравнения КдФ — оно обладает бесконечным набором нетривиальных законов сохранения, и этот факт также вытекает из теории накрытий.

Пример 11. Рассмотрим накрытие над уравнением Кортевега–де Фриза, определяемое дифференциальной подстановкой

$$u = w - \varepsilon w_x - \frac{1}{6}\varepsilon^2 w^2. \tag{27}$$

Следовательно,

$$u_t - uu_x - u_{xxx} = \left(1 - \varepsilon D_x - \frac{1}{3}\varepsilon^2 w\right)\left(w_t + \left(\frac{1}{3}\varepsilon^2 w^2 - w\right) w_x - w_{xxx}\right) =$$

$$= \left(1 - \varepsilon D_x - \frac{1}{3}\varepsilon^2 w\right)\left(D_t(w) - D_x\left(w_{xx} + \frac{1}{2}w^2 - \frac{1}{9}\varepsilon^2 w^3\right)\right),$$

так что форма

$$\omega = w\, dx - \left(w_{xx} + \frac{1}{2}w^2 - \frac{1}{9}\varepsilon^2 w^3\right) dt$$

является законом сохранения накрывающего уравнения. Разложим w в формальный ряд по степеням ε:

$$w = w_0 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \dots$$

Тогда величины w_i также являются плотностями законов сохранения. Подставляя это разложение в равенство (27), получаем

$$u = \sum_{i \geq 0} \varepsilon^i w_i - \varepsilon \left(\sum_{i \geq 0} \varepsilon^i w_i\right)_x - \frac{1}{6}\varepsilon^2 \left(\sum_{i \geq 0} \varepsilon^i w_i\right)^2,$$

откуда вытекают рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned}
u &= w_0, \\
0 &= w_1 - (w_0)_x, \\
0 &= w_2 - (w_1)_x - \frac{1}{6}w_0^2, \\
0 &= w_3 - (w_2)_x - \frac{1}{3}w_0 w_1, \\
0 &= w_4 - (w_3)_x - \frac{1}{6}(w_1^2 + 2w_0 w_2),
\end{aligned}$$

$$\dots,$$

или

$$\begin{aligned}
&w_0 = u,\\
&w_1 = u_x,\\
&w_2 = u_{xx} + \frac{1}{6}u^2,\\
&w_3 = u_{xxx} + \frac{2}{3}uu_x,\\
&w_4 = u_{xxxx} + \frac{5}{6}u_x^2 + uu_{xx} + \frac{1}{18}u^3,\\
&\quad\dots
\end{aligned}$$

Искомый результат следует из задачи 66.

(4) Ещё один пример.

Пример 12. Рассмотрим уравнение неразрывности струи

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^1)}{\partial x^1} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial(\rho v^3)}{\partial x^3} = 0,$$

часто возникающее в гидродинамике; здесь ρ — плотность, а v^i — компоненты скорости жидкости. Очевидно, это уравнение равносильно условию d_h-замкнутости формы

$$\begin{aligned}
\omega = \rho\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 &- \\
&- \rho v^1\, dt \wedge dx^2 \wedge dx^3 - \rho v^2\, dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 - \rho v^3\, dt \wedge dx^1 \wedge dx^2,
\end{aligned}$$

где $d_h = dt \wedge D_t + \sum_{i=1}^3 dx^i \wedge D_{x^i}$, так что по теореме Гаусса получаем

$$-\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \int_{\partial V} (\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\, d\sigma,$$

где V — область в $\mathbb{R}^3$, ∂V — её граница, $\mathbf{n}$ — вектор нормали, $\mathbf{v}$ — вектор скорости и σ — элемент площади поверхности. Таким образом, если скорость перпендикулярна вектору нормали (поток не пересекает границу), масса жидкости сохраняется.

(5) Теперь мы можем перейти к общей теории законов сохранения. Рассмотрим векторное расслоение $\pi\colon E \to M$ и его бесконечные джеты $\pi_\infty\colon J^\infty(\pi) \to M$. Обозначим через t_q^* q-ю внешнюю степень кокасательного расслоения $t^*\colon T^*M \to M$ к многообразию M. Рассмотрим индуцированные расслоения $\bar{t}_q^* = \pi_\infty^*(t_q^*)$ и обозначим через $\Lambda_h^q(\pi)$ модули их сечений. Элементы этих модулей называются горизонтальными формами.

(6) Применим конструкцию п. 5 лекции 1 к комплексу де Рама $d\colon \Lambda^q(M) \to \Lambda^{q+1}(M)$ многообразия M и введём обозначение $d_h = \mathscr{C}_d$. В силу п. 4 задачи 4 возникает комплекс

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}(\pi) \xrightarrow{d_h} \Lambda_h^1(\pi) \longrightarrow \dots \longrightarrow \Lambda_h^q(\pi) \xrightarrow{d_h} \tag{28}$$
$$\xrightarrow{d_h} \Lambda_h^{q+1}(\pi) \longrightarrow \dots \longrightarrow \Lambda_h^n(\pi) \longrightarrow 0,$$

который называется горизонтальным комплексом де Рама. Его когомологии обозачаются через $H_h^q(\pi)$. Ограничивая всю конструкцию на уравнение $\mathscr{E} \subset J^\infty(\pi)$, мы получаем модуль горизонтальных форм $\Lambda^q(\mathscr{E})$ на уравнении и соответствующий комплекс де Рама $d_h\colon \Lambda_h^q(\mathscr{E}) \to \Lambda_h^{q+1}(\mathscr{E})$ с группами горизонтальных когомологий $H_h^q(\mathscr{E})$.

(7) Очевидно, в локальных координатах горизонтальные формы степени q являются выражениями вида

$$\sum a_{i_1,\dots,i_q}\, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}, \qquad a_{i_1,\dots,i_q} \in \mathscr{F}(\mathscr{E}),$$

а горизонтальный дифференциал де Рама задаётся равенством

$$d_h = \sum_i dx^i \wedge D_{x^i},$$

где D_{x^i} — полные производные на уравнении.

(8) Горизонтальная форма $\omega \in \Lambda_h^{n-1}(\mathscr{E})$ называется законом сохранения уравнения $\mathscr{E}$, если $d_h\omega = 0$. Закон сохранения тривиален, если $\omega = d_h\theta$, и тогда форма $\theta \in \Lambda_h^{n-2}(\mathscr{E})$ называется его потенциалом. Классы эквивалентности законов сохранения по модулю тривиальных отождествляются, таким образом, с элементами группы $H_h^{n-1}(\mathscr{E})$. Наша задача — научиться вычислять нетривиальные законы сохранения.

(9) В дальнейшем для простоты мы будем предполагать, что уравнение $\mathscr{E}$ топологически тривиально, т.е. все его когомологии де Рама, кроме нулевых, равны нулю. Кроме того, мы считаем, что выполнено следующее

Условие регулярности. Пусть уравнение $\mathscr{E}$ задано как нули некоторого сечения $F \in P = \Gamma(\bar{\xi})$ и сечение $G \in Q = \Gamma(\bar{\zeta})$ таково, что $G|_{\mathscr{E}} = 0$. Тогда $G = \Delta(F)$ для некоторого $\mathscr{C}$-дифференциального оператора $\Delta\colon P \to Q$.

(10) Рассмотрим некоторый модуль $Q = \Gamma(\bar{\zeta})$ и комплекс

$$0 \longrightarrow \mathscr{C}\mathrm{Diff}(Q, \mathscr{F}(\pi) \xrightarrow{d_Q} \mathscr{C}\mathrm{Diff}(Q, \Lambda_h^1(\pi)) \longrightarrow \dots \tag{29}$$
$$\dots \longrightarrow \mathscr{C}\mathrm{Diff}(Q, \Lambda_h^q(\pi)) \xrightarrow{d_Q} \mathscr{C}\mathrm{Diff}(Q, \Lambda_h^{q+1}(\pi)) \longrightarrow \dots$$
$$\dots \longrightarrow \mathscr{C}\mathrm{Diff}(Q, \Lambda_h^n(\pi)) \longrightarrow 0,$$

где $\mathscr{C}\mathrm{Diff}(Q,\bullet) = \sum_{k\geq 0}\mathscr{C}\mathrm{Diff}_k(Q,\bullet)$ обозначает модуль всех $\mathscr{C}$-дифференциальных операторов, а $d_Q(\nabla) = d_h \circ \nabla$, $\nabla \in \mathscr{C}\mathrm{Diff}(Q,\bullet)$.

Предложение 4. *Комплекс* (29) *ацикличен во всех членах, кроме последнего, а* $H^n(d_Q) = \hom_{\mathscr{F}(\pi)}(Q, \Lambda_h^n(\pi))$.

Всюду ниже мы будем использовать обозначение $\hat{Q} = \hom_{\mathscr{F}(\pi)}(Q, \Lambda_h^n(\pi))$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность вложений комплексов

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathscr{C}\mathrm{Diff}_0(Q,\Lambda_h^n) \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{C}\mathrm{Diff}_0(Q,\Lambda_h^{n-1}) \arrow[r, "\delta_Q"] \arrow[d, hook] & \mathscr{C}\mathrm{Diff}_1(Q,\Lambda_h^n) \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
\dots & \dots \arrow[d, hook] & \dots \arrow[d, hook] & \dots \\
\dots \arrow[r] & \mathscr{C}\mathrm{Diff}_{k-1}(Q,\Lambda_h^{n-1}) \arrow[r, "\delta_Q"] \arrow[d, hook] & \mathscr{C}\mathrm{Diff}_k(Q,\Lambda_h^n) \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
\dots \arrow[r] & \mathscr{C}\mathrm{Diff}_k(Q,\Lambda_h^{n-1}) \arrow[r, "\delta_Q"] \arrow[d, hook] & \mathscr{C}\mathrm{Diff}_{k+1}(Q,\Lambda_h^n) \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots
\end{tikzcd}$$

Мы докажем, что факторкомплексы ацикличны, откуда по индукции легко будет следовать, что когомологии комплекса (29) совпадают с когомологиями нулевой строчки, т.е. с $\hat{Q}$.

Действительно, из того, что отображения факторов являются гомоморфизмами (задача 70), следует, что точность достаточно установить в каждой точке $\theta \in \mathscr{E}$. Пусть $x = \pi_\infty(\theta) \in M$ и $x^1, \dots, x^n$ — локальные координаты в окрестности этой точки. Тогда, очевидно,

$$\left.\frac{\mathscr{C}\mathrm{Diff}_k(Q,\Lambda_h^q)}{\mathscr{C}\mathrm{Diff}_{k-1}(Q,\Lambda_h^q)}\right|_\theta = \zeta_x^* \otimes S^k T_x M \otimes \Lambda^q T_x^* M,$$

где ζ_x — слой расслоения ζ, и

$$\delta_Q(z \otimes \xi_{i_1} \cdot \ldots \cdot \xi_{i_k} \otimes dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}) = \\ = \sum_{i=1}^n z \otimes \xi_{i_1} \cdot \ldots \cdot \xi_{i_k} \cdot \xi_i \otimes dx^i \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q} \quad (30)$$

где $z \in \zeta_x^*$ и $\xi_i = \partial/\partial x^i\big|_x$. Но это — комплекс Кошуля алгебры полиномов с коэффициентами в $V = \zeta_x^*$, и он точен. $\square$

(11) Предложение 4 можно сформулировать в следующей эквивалентной и важной форме:

Предложение 5. *Если* $\nabla\colon Q \to \Lambda_h^q$ — $\mathscr{C}$*-дифференциальный оператор,* $0 < q < n$, *и* $d_h \circ \nabla = 0$, *то существует такой* $\mathscr{C}$*-дифференциальный оператор* $\nabla'\colon Q \to \Lambda_h^{q-1}$, *что* $\nabla = d_h \circ \nabla'$:

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[rr, "\nabla"] \arrow[dr, "\nabla'"'] & & \Lambda_h^q \arrow[r, "d_h"] & \Lambda_h^{q+1} \arrow[r] & 0. \\ & \Lambda_h^{q-1} \arrow[ur, "d_h"'] & & & \end{tikzcd}$$

(12) Рассмотрим $\mathscr{C}$-дифференциальный оператор $\Delta\colon P \to Q$. Тогда отображение композиции

$$c_\Delta\colon \mathscr{C}\mathrm{Diff}(Q, \Lambda_h^q) \to \mathscr{C}\mathrm{Diff}(P, \Lambda_h^q), \qquad \nabla \mapsto \nabla \circ \Delta,$$

определяет морфизм комплексов

$$\begin{tikzcd} \dots \arrow[r] & \mathscr{C}\mathrm{Diff}(Q, \Lambda_h^q) \arrow[r, "d_Q"] \arrow[d, "c_\Delta"'] & \mathscr{C}\mathrm{Diff}(Q, \Lambda_h^{q+1}) \arrow[r] \arrow[d, "c_\Delta"] & \dots \\ \dots \arrow[r] & \mathscr{C}\mathrm{Diff}(P, \Lambda_h^q) \arrow[r, "d_P"] & \mathscr{C}\mathrm{Diff}(P, \Lambda_h^{q+1}) \arrow[r] & \dots \end{tikzcd}$$

Соответствующее отображение групп когомологий

$$\Delta^*\colon \hat{Q} \to \hat{P}$$

называется оператором, сопряжённым к оператору Δ.

(13) Сформулируем основные свойства сопряжённых операторов.

Предложение 6. *Пусть* $\Delta\colon P \to Q$ — $\mathscr{C}$*-дифференциальный оператор порядка* k. *Тогда:*

(a) *Оператор* Δ^* *также является* $\mathscr{C}$*-дифференциальным порядка* k.

(b) *Операция сопряжения идемпотентна, т.е.* $(\Delta^*)^* = \Delta$.

(c) $(\Delta_1 + \Delta_2)^* = \Delta_1^* + \Delta_2^*$

(d) *Если* $\nabla\colon Q \to R$ — *ещё один* $\mathscr{C}$*-дифференциальный оператор, то* $(\nabla \circ \Delta)^* = \Delta^* \circ \nabla^*$.

(e) *Если* $p \in P$, $\hat{q} \in \hat{Q}$, *то*

$$\langle \hat{q}, \Delta(p) \rangle - \langle \Delta^*(\hat{q}), p \rangle = d_h \omega_{p,\hat{q}}(\Delta), \tag{31}$$

где

$$\langle \cdot, \cdot \rangle\colon \hat{P} \times P \to \Lambda_h^n$$

обозначает естественное спаривание.

(f) *Соответствие*

$$P \times \hat{Q} \to \Lambda_h^{n-1}, \qquad (p, \hat{q}) \mapsto \omega_{p,\hat{q}}(\Delta),$$

Является $\mathscr{C}$-дифференциальным оператором по обоим аргументам.

Равенство (31) называется формулой Грина.

(14) Из предложения 6 и задачи 73 немедленно следует выражение для сопряжённого оператора в координатах: если $\Delta = \sum_\sigma a_\sigma D_\sigma$ — скалярный оператор, то

$$\Delta^* = \sum_\sigma (-1)^{|\sigma|} D_\sigma \circ a_\sigma,$$

а для матричных операторов $\Delta = (\sum_\sigma a_\sigma^{ij} D_\sigma)$ выполнено равенство

$$\Delta = \left(\sum_\sigma (-1)^{|\sigma|} D_\sigma \circ a_\sigma^{ij} \right)^{\mathrm{t}},$$

где $(\cdot)^{\mathrm{t}}$ обозначает транспонирование.

(15) Рассмотрим уравнение $\mathscr{E} \subset J^\infty(\pi)$, заданное как нули сечения $F \in P = \Gamma(\bar{\xi})$, $\xi\colon H \to M$ и закон сохранения $\omega \in \Lambda_h^{n-1}(\mathscr{E})$ этого уравнения. Тогда, в силу условия регулярности (п. 9)

$$d_h \bar{\omega} = \Delta(F),$$

где $\bar{\omega} \in \Lambda_h^{n-1}(\pi)$ — такая форма на $J^\infty(\pi)$, что $\bar{\omega}|_{\mathscr{E}} = \omega$, а $\Delta\colon P \to \Lambda_h^n(\pi)$ — некоторый $\mathscr{C}$-дифференциальный оператор. Тогда $\Delta^*\colon \mathscr{F}(\pi) \to \hat{P}$ (задача 74), и элемент

$$\psi_\omega = \Delta^*(1)|_{\mathscr{E}} \in \hat{P}$$

называется производящим сечением закона сохранения.

Теорема 4. *Пусть $\mathscr{E} \subset J^\infty(\pi)$ — регулярное уравнение. Тогда*:

(a) *для любого его закона сохранения $\omega \in \Lambda_h^{n-1}(\mathscr{E})$ выполнено равенство*

$$\ell_{\mathscr{E}}^*(\psi_\omega) = 0;$$

(b) *если закон сохранения тривиален, то*

$$\psi_\omega = 0.$$

Следовательно, соответствие $\omega \mapsto \psi_\omega$ определяет отображение $H_h^{n-1}(\mathscr{E}) \to \ker \ell_{\mathscr{E}}^*$.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Пусть

$$d_h \bar{\omega} = \Delta(F)$$

на $J^\infty(\pi)$. Рассмотрим линеаризацию этого равенства

$$\ell_{d_h \bar{\omega}} = \ell_{\Delta(F)}.$$

Тогда для любого элемента $\varphi \in \varkappa(\pi)$ имеем

$$\ell_{d_h \bar{\omega}}(\varphi) = \mathbf{E}_\varphi(d_h \bar{\omega}) = d_h(\mathbf{E}_\varphi(\bar{\omega})) = d_h(\ell_{\bar{\omega}} \varphi),$$

т.е.

$$\ell_{d_h\bar\omega} = d_h \circ \ell_{\bar\omega}.$$

С другой стороны,

$$\ell_{\Delta(F)}(\varphi) = \mathbf{E}_\varphi(\Delta(F)) = (\mathbf{E}_\varphi(\Delta))(F) + \Delta(\mathbf{E}_\varphi F) = \\ = \ell_\Delta(\varphi, F) + \Delta(\ell_F(\varphi)). \quad (32)$$

Заметим, что действие $\mathbf{E}_\varphi(\Delta)$ определено корректно, поскольку для любых векторных расслоений ξ и ζ над M модуль $\mathscr{C}\mathrm{Diff}(\bar\xi, \bar\zeta)$ отождествляется с модулем $\Gamma(\overline{\mathrm{diff}(\xi,\zeta)})$, где $\mathrm{diff}(\xi,\zeta)$ — расслоение линейных дифференциальных операторов, действующих из сечений расслоения ξ в сечения ζ. Поэтому определена линеаризация $\mathscr{C}$-дифференциального оператора $\Delta\colon P \to \Lambda_h^n(\pi)$, и это оператор $\varkappa(\pi) \times P \to \Lambda_h^n(\pi)$, $\mathscr{C}$-дифференциальный по обоим аргументам. Иными словами, равенство (32) можно переписать в виде

$$\ell_{\Delta(F)} = \ell_\Delta(\cdot, F) + \Delta \circ \ell_F.$$

Следовательно,

$$\ell_F^*(\Delta^*(1)) = (\Delta \circ \ell_F)^*(1) = (d_h \circ \ell_{\bar\omega} - \ell_\Delta(\cdot, F))^*(1) = \\ = ((-1)^{n-1}\ell_{\bar\omega} \circ d_h - \ell_\Delta^{*_1}(\cdot, F))(1) = -\ell_\Delta^{*_1}(\cdot, F)(1),$$

где символ ^{*_1} обозначает сопряжение по первому аргументу. Ограничивая полученное равенство на $\mathscr{E}$, получаем искомое.

Докажем второе утверждение. Пусть $\omega = d_h\theta$ — тривиальный закон сохранения. Тогда, в силу регулярности,

$$\bar\omega - d_h\bar\theta = \square(F),$$

т.е.

$$d_h\bar\omega = d_h(\square(F)).$$

Значит, оператор Δ, фигурирующий в определении производящего сечения, имеет вид $\Delta = d_h \circ \square$ и

$$\Delta^*(1) = (-1)^{n-1}\square(d_h(1)) = 0.$$

Теорема доказана. $\square$

(16) Решения уравнения

$$\ell_{\mathscr{E}}(\psi) = 0$$

называются косимметриями, и пространство косимметрий обозначается через $\mathrm{cosym}(\mathscr{E})$.

(17) Ограничимся случаем $\dim M = 2$ и рассмотрим накрытие $\tau\colon \tilde{\mathscr{E}} \to \mathscr{E}$ размерности $l < \infty$. Оно называется абелевыми, если существует l таких линейно независимых (над $\mathbb{R}$) законов сохранения $\omega_1, \dots, \omega_l$, что формы $\tau^*\omega_1, \dots, \tau^*\omega_l$ точны на $\tilde{\mathscr{E}}$. Будем говорить, что τ ассоциировано с законами сохранения $\omega_1, \dots, \omega_l$. Основные свойства абелевых накрытий сформулированы в задаче 83.

Задачи

Задача 64. Очевидно, форма $\omega = u\,dx + \left(\frac{1}{2}u^2 + u_1\right)dt$ является законом сохранения уравнения Бюргерса. Докажите, что любой другой закон сохранения либо тривиален, либо отличается от указанного на тривиальный.

Задача 65. Выпишите X- и T-компоненты накрытия, определённого равенством (27). Докажите, что накрывающее уравнение эквивалентно модифицированному уравнению Кортевега–де Фриза $w_t = u^2u_x + u_{xxx}$.

Задача 66. Докажите, что правые части полученных в примере 11 равенств являются плотностями законов сохранения уравнения КдФ. Докажите, что для нечётных i эти законы тривиальны, а для чётных — нет.

Задача 67. Докажите, что для обыкновенных дифференциальных уравнений понятие закона сохранения совпадает с понятием первого интеграла.

Задача 68. Докажите, что действие эволюционных полей коммутирует с горизрнтальным дифференциалом де Рама: $\mathrm{L}_{\mathbf{E}_\varphi}(d_h\omega) = d_h(\mathrm{L}_{\mathbf{E}_\varphi}\omega)$.

Задача 69. Докажите, что для любой функции $f \in \mathscr{F}(\mathscr{E})$ выполняется равенство $d_h f = df - d_{\mathscr{C}} f$, где $d_{\mathscr{C}}$ — дифференциал Картана, определённые равенством (3).

Задача 70. Докажите, что отображения

$$S^k(Q, \Lambda_h^q) = \frac{\mathscr{C}\mathrm{Diff}_k(Q, \Lambda_h^q)}{\mathscr{C}\mathrm{Diff}_{k-1}(Q, \Lambda_h^q)} \to S^{k+1}(Q, \Lambda_h^{q+1}) = \frac{\mathscr{C}\mathrm{Diff}_{k+1}(Q, \Lambda_h^{q+1})}{\mathscr{C}\mathrm{Diff}_k(Q, \Lambda_h^{q+1})}$$

порождённые операторами d_Q, являются гомоморфизмами $\mathscr{F}(\mathscr{E})$-модулей.

Задача 71. Докажите равенство (30) и точность δ_Q-комплекса.

Задача 72. Докажите предложение 6

Задача 73. Докажите следующие утверждения:

(1) Если Δ — оператор нулевого порядка, т.е. матрица с функциональными коэффициентами, то Δ^* — это транспонированная матрица.

(2) Если $\Delta = D_{x^i}$, то $\Delta^* = -D_{x^i}$.

Задача 74. Докажите, что $\hat{\Lambda}_h^i = \Lambda_h^{n-i}$, причём каждой форме $\omega_{n-1} \in \Lambda_h^{n-i}$ соответствует гомоморфизм внешнего умножения $\omega_i \mapsto \omega_{n-i} \wedge \omega_i$. Докажите также, что $\langle \omega_{n-i}, \omega_i \rangle = \omega_{n-i} \wedge \omega_i$.

Задача 75. Докажите, что сопряжённым к оператору $d_h\colon \Lambda_h^q \to \Lambda_h^{q+1}$ является оператор $(-1)^{q+1} d_h\colon \Lambda_h^{n-q-1} \to \Lambda_h^{n-q}$.

Задача 76. Докажите, что производящее сечение определено корректно, т.е. зависит от $\omega \in \Lambda_n^{n-1}(\mathscr{E})$, а не от его продолжения $\bar{\omega} \in \Lambda_h^{n-1}(\pi)$.

Задача 77. Между симметриями и косимметриями регулярного уравнения существует естественное спаривание

$$\operatorname{sym}\mathscr{E} \times \operatorname{cosym}\mathscr{E} \to H_h^{n-1}(\mathscr{E}).$$

Постройте его.

Задача 78. В силу задачи 68, симметрии уравнения действую на классы эквивалентности его законов сохранения. Определим действие симметрии φ на производящих сечениях, полагая

$$\mathrm{L}_\varphi(\psi_\omega) = \psi_{\mathrm{L}_{\mathbf{E}_\varphi(\omega)}}.$$

Пусть уравнение задано как нули сечения $F \in P$. Тогда, поскольку уравнение регулярно,

$$\mathbf{E}_\varphi(F) = \bar{\Delta}(F),$$

где $\bar{\varphi} \in \varkappa(\pi)$ — такой элемент, что $\bar{\varphi}\big|_{\mathscr{E}} = \varphi$, а $\bar{\Delta}\colon P \to P$ — некоторый $\mathscr{C}$-дифференциальный оператор. Докажите, что

$$\mathrm{L}_\varphi(\psi_\omega) = \mathbf{E}_\varphi(\psi_\omega) + \Delta^*(\psi_\omega), \tag{33}$$

где $\Delta = \bar{\Delta}\big|_{\mathscr{E}}$.

Задача 79. Пусть

$$u_t^j = f(x^1, \dots, x^n, \dots, u_\sigma^\alpha, \dots), \qquad j, \alpha = 1, \dots, m,$$

— система эволюционных уравнений, где σ — мультииндекс, соответствующий переменным x^i. Докажите, что если

$$\omega = X\,dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n + dt \wedge \sum_{i=1}^n T_i\,dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n$$

— закон сохранения этой системы, то его производящая функция имеет вид

$$\delta(X) = \left(\frac{\delta X}{\delta u^1}, \dots, \frac{\delta X}{\delta u^m}\right), \tag{34}$$

где

$$\frac{\delta X}{\delta u^j} = \sum_\sigma (-1)^{|\sigma|} D_\sigma \left(\frac{\partial X}{\partial u_\sigma^j}\right). \tag{35}$$

Оператор δ называется оператором Эйлера, а выражения (35) — вариационными производными.

Задача 80. Докажите, что для эволюционных уравнений формула (33) имеет вид

$$\mathrm{L}_\varphi(\psi_\omega) = \mathbf{E}_\varphi(\psi_\omega) + \{\varphi, \psi_\omega\},$$

где $\{\cdot,\cdot\}$ — скобка Якоби.

Задача 81. Выберите на бесконечном продолжении уравнения синус Гордона удобные внутренние координаты и выведите в этих координатах выражение для производящих сечений законов сохранения.

Задача 82. Рассмотрите законы сохранения, построенные для уравнения КдФ в примере 11 и докажите, что для любого такого закона сохранения ω функция $D_x(\psi_\omega)$ является симметрией.

Задача 83. Докажите, что абелевы накрытия обладают следующими свойствами:

(1) Любое накрытие, эквивалентное абелеву, также является абелевым.

(2) Пусть абелевы накрытия τ и τ' ассоциированы с системами законов сохранения $\{\omega_i\}$ и $\{\omega_i'\}$ соответственно. Накрытия эквивалентны тогда и только тогда, когда порождаемые этими системами $\mathbb{R}$-подпространства в $H_h^1(\mathscr{E})$ совпадают.

(3) Для любого абелева накрытия существуют такие локальные координаты, что хвосты Y_i в равенствах (19) не зависят от нелокальных переменных.

Лекция 7 (30.03.2016)

Здесь мы строим расслоения горизонтальных джетов и вводим понятие касательного накрытия к бесконечно продолженному уравнению. Это понятие играет ключевую роль в геометрической теории операторов рекурсии, а также в теории вариационных симплектических структур.

Горизонтальные джеты и касательное накрытие

(1) Рассмотрим пространство $J^\infty(\pi)$ и расслоение $\bar{\xi} = \pi_\infty^*(\xi)\colon \bar{H} \to J^\infty(\pi)$, где $\xi\colon H \to M$ — векторное расслоение. Пусть $Q = \Gamma(\bar{\xi})$. Скажем, что сечения g_1, $g_2 \in Q$ горизонтально k-эквивалентны в точке $\theta = [s]_x^\infty \in J^\infty(\pi)$, где $\sigma \in \Gamma(\pi)$ и $x \in M$, если графики сечений $s^*(g_1)$, $s^*(g_2) \in \Gamma(\xi)$ касаются с порядком, не меньшим k. Обозначим через $[g]_\theta^{h,k}$ класс горизонтальной k-эквивалентности сечения g точке θ.

(2) Обозначим через $J_h^k(\bar{\xi})$ множество всевозможных классов горизонтальной k-эквивалентности. Для сечения $g \in Q$ определим его горизонтальный k-джет $j_k^h(g)\colon J^\infty(\pi) \to J_h^k(\bar{\xi})$, полагая $(j_k^h(g))(\theta) = [g]_\theta^{h,k}$, и точно так же, как это было сделано в случае «обыкновенных» джетов, введём в $J_h^k(\bar{\xi})$ минимальную топологию, в которой все отображения $j_k^h(g)$ непрерывны. Обозначим через $\bar{\xi}_k\colon J_h^k(\bar{\xi}) \to J^\infty(\pi)$ естественную проекцию $[g]_\theta^{h,k} \mapsto \theta$.

(3) Пусть $\mathscr{U} \subset J^\infty(\pi)$ — координатная окрестность с адаптированными координатами (x^i, u_σ^j), тривиализующая расслоение $\bar{\xi}$, и $e_1, \dots, e_l$ — базис локальных сечений над $\mathscr{U}$. Определим в

$\bar\xi_k^{-1}(\mathscr{U})$ координатные функции $\bar\xi^*(x^i)$, $\bar\xi^*(u^j_\sigma)$ и g^j_σ, полагая

$$g^j_\sigma(\theta) = D_\sigma(g^j)\big|_\theta, \qquad \theta \in J^\infty(\pi), \quad g = g^1 e_1 + \dots + g^l e_l.$$

В силу задачи 85 определение корректно.

(4) Определённые таким образом координатные окрестности задают гладкую структуру на пространстве $J^\infty_h(\bar\xi)$, если в качестве функций переходя взять преобразования Ли, являющиеся поднятиями автоморфизмов расслоения ξ. При этом естественные отображения

$$\bar\xi_k\colon J^k_h(\bar\xi) \to J^\infty(\pi), \qquad \bar\xi_{k,l}\colon J^k_h(\bar\xi) \to J^l_h(\bar\xi), \quad k \ge l,$$

являются гладкими расслоениями, причём первое — векторное. Обратный предел системы проекций $\bar\xi_{k,l}$ называется многообразием бесконечных горизонтальных джетов и обозначается через $J^\infty_h(\bar\xi)$.

(5) Если $\mathscr{E} \subset J^\infty(\pi)$ — бесконечно продолженное уравнение, то расслоение $\bar\xi_k\colon J^k_h(\bar\xi) \to \mathscr{E}$, $k = 0, 1, \dots, \infty$, определяется как ограничение расслоения $\bar\xi_\infty\colon J^k_h(\bar\xi) \to J^\infty(\pi)$ на $\mathscr{E}$. Модуль сечений расслоения $\bar\xi_k$ обозначается через $\mathscr{J}^k_h(Q)$.

(6) Многообразие $J^\infty_h(\bar\xi)$ наделено n-мерным горизонтальным (формально) интегрируемым распределением — распределением Картана. В каждой точке $\bar\theta \in J^\infty_h(\bar\xi)$ плоскость этого распределения — это касательная плоскость к графику сечения $j^h_\infty(g)$, проходящего через эту точку. При этом проекция $\bar\xi_\infty\colon J^\infty_h(\bar\xi) \to \mathscr{E}$ является накрытием.

(7) Пусть $\Delta\colon Q \to R$ — $\mathscr{C}$-дифференциальный оператор порядка k, $Q = \Gamma(\bar\xi)$, $R = \Gamma(\bar\zeta)$. Определим отображение $\Phi_\Delta\colon J^k_h(\bar\xi) \to J^0_h(\bar\zeta) = \bar H$, где $\bar H$ — тотальное пространство расслоения $\bar\zeta$, полагая

$$\Phi_\Delta([g]^{h,k}_\theta) = \Delta(g)\big|_\theta, \qquad g \in \Gamma(\bar\xi), \quad \theta \in \mathscr{E}.$$

Очевидно, Φ_Δ — морфизм векторных расслоений. Обратно, всякий такой морфизм Φ определяет дифференциальный оператор $\Delta_\Phi\colon \Gamma(\bar\xi) \to \Gamma(\bar\zeta)$ по правилу

$$\Delta_\Phi(g) = \Phi(j^h_k(g)),$$

и этот оператор, в силу задачи 87, является $\mathscr{C}$-дифференциальным. Как и в п. 2 лекции 2, определим r-е продолжение оператора Δ как композицию

$$\Delta^{(r)} = j^h_r \circ \Delta\colon Q \to \mathscr{J}^r_h(R).$$

Это — вновь $\mathscr{C}$-дифференциальный оператор, и он определяет морфизм векторных расслоений $\Phi^{(r)}_\Delta = \Phi_{\Delta^{(r)}}\colon J^{k+r}_h(\bar\xi) \to J^r_h(\bar\zeta)$, так что диаграммы

$$
\begin{array}{ccc}
J_h^{k+r+1}(\bar\xi) & \xrightarrow{\Phi_\Delta^{(r+1)}} & J_h^{r+1}(\bar\zeta) \\
\bar\xi_{k+r+1,k+r}\downarrow & & \downarrow\bar\zeta_{r+1,r} \\
J_h^{k+r}(\bar\xi) & \xrightarrow{\Phi_\Delta^{(r)}} & J_h^{r}(\bar\zeta)
\end{array}
$$

очевидным образом коммутативны.

(8) Следовательно, определён морфизм векторных расслоений

$$
\begin{tikzcd}
J_h^\infty(\bar\xi) \arrow[rr, "\Phi_\Delta^*"] \arrow[dr, "\bar\xi_\infty"'] & & J_h^\infty(\bar\zeta) \arrow[dl, "\bar\zeta_\infty"] \\
& \mathscr{E}. &
\end{tikzcd}
$$

Его ядро обозначается через $\mathscr{E}_\Delta$, а проекция $\bar\xi_\infty\colon \mathscr{E}_\Delta \to \mathscr{E}$ называется Δ-накрытием. Мы будем предполагать, что рассматриваемые нами Δ-накрытия удовлетворяют условию, аналогичному условию регулярности:

Условие h-регулярности. Пусть подмногообразие $\mathscr{E}_\Delta \subset J_h^\infty(\bar\xi)$ задано как нули некоторого сечения $F_\Delta \in Q = \Gamma(\bar\xi')$ (см. ниже п. 10) и сечение $G \in R = \Gamma(\bar\zeta)$ таково, что $G|_{\mathscr{E}_\Delta} = 0$. Тогда имеет место равенство $G = \square(F_\Delta)$ для некоторого $\mathscr{C}$-дифференциального оператора $\square\colon Q \to R$.

Теперь мы сформулируем и докажем два важных свойства Δ-накрытий, которые понадобятся в дальнейшем.

(9) Пусть $\Delta\colon Q \to R$ — $\mathscr{C}$-дифференциальный оператор. Следующее утверждение можно понимать как «геометризацию» формулы Грина:

Предложение 7. *Каждое решение $\hat r \in \hat R$ уравнения $\Delta^*(\hat r) = 0$, $\hat r \neq 0$, естественным образом определяет нетривиальный закон сохранения уравнения $\mathscr{E}_\Delta$.*

Доказательство. Действительно, для любых элементов $q \in Q$ и $\hat r \in \hat R$ в силу формулы Грина имеем

$$\langle \Delta(q), \hat r\rangle - \langle q, \Delta^*(\hat r)\rangle = d_h\omega_{\hat r} \tag{36}$$

для некоторой формы $\omega \in \Lambda_h^{n-1}(\mathscr{E}_\Delta)$. Следовательно, если $q \in \mathscr{E}_\Delta$ и $\hat r \in \ker \Delta^*$, то ω — закон сохранения. Докажем его нетривиальность.

Пусть уравнение $\mathscr{E}$ задано как нули некоторого сечения $F \in P$. Тогда уравнение $\mathscr{E}_\Delta$ является нулями сечения $(F, G) \in P \oplus R$, где $G = \Delta(q)$. Тогда, поскольку $\langle q, \Delta^*(\hat r)\rangle = 0$ на уравнении, имеет место равенство

$$\langle q, \Delta^*(\hat{r})\rangle = \nabla(F), \qquad \nabla\colon P \to \Lambda_h^n(J_h^\infty(\xi)),$$

на пространстве джетов. Оператор $\Box\colon P \oplus R \to \Lambda_h^n(J_h^\infty(\xi))$, определяющий производящее сечение закона сохранения $\omega_{\hat{r}}$, в силу равенства (36), имеет вид

$$\Box\colon (p, r) \mapsto \langle r, \hat{r}\rangle - \nabla(p)$$

Поэтому производящее сечение $\psi_{\omega_{\hat{r}}} = \Box^*(1)|_{\mathscr{E}_\Delta} \in \hat{R} \oplus \hat{P}$ имеет вид

$$\psi_{\omega_{\hat{r}}} = \langle \hat{r}, \nabla^*(1)|_{\mathscr{E}_\Delta}\rangle$$

и не равно нулю. Значит, сам закон сохранения нетривиален в силу теоремы 4 $\Box$

(10) Ниже для формулировки предложения 8 нам понадобится обобщение одной конструкции, которая уже встречалась в предыдущем семестре. Пусть, как и выше, $Q = \Gamma(\bar{\xi})$, а $Q' = \Gamma(\bar{\xi}')$ для некоторого расслоения $\bar{\xi}'$ над $\mathscr{E}$. Тогда всякому сечению φ расслоения $\bar{\xi}_\infty^*(\bar{\xi}')$ над $J_h^\infty(\bar{\xi})$ можно сопоставить $\mathscr{C}$-дифференциальный оператор $\Delta_\varphi\colon Q \to Q'$, действующий по правилу

$$\Delta_\varphi(f) = \varphi|_{j_\infty^h(f)}, \qquad f \in Q.$$

Обратно, любой такой оператор определяет сечение

$$\varphi_\nabla([f]_\theta^\infty) = \nabla(f)|_\theta, \qquad \theta \in \mathscr{E}.$$

При ограничении φ на подмногообразие $\mathscr{E}_\Delta$ мы получим $\mathscr{C}$-дифференциальные операторы, действующие из ядра оператора Δ в Q'.

(11) Рассмотрим ещё один $\mathscr{C}$-дифференциальный оператор $\Delta'\colon Q' \to R'$, $Q' = \Gamma(\bar{\xi}')$, $R' = \Gamma(\bar{\zeta}')$, и его каноническое поднятие $\tilde{\Delta}'$ до $\mathscr{C}$-дифференциального оператора над пространством Δ-накрытия.

Предложение 8. *Пусть рассматриваемое Δ-накрытие удовлетворяет условию h-регулярности. Тогда решения уравнения*

$$\tilde{\Delta}'(\varphi) = 0, \tag{37}$$

$\varphi \in \bar{\xi}_\infty^*(\bar{\xi}')$, *находятся во взаимно-однозначном соответствии с классами эквивалентности $\mathscr{C}$-дифференциальных операторов $\Delta_\varphi\colon Q \to Q'$, удовлетворяющих равенству*

$$\Delta' \circ \Delta_\varphi = \Box \circ \Delta,$$

где $\Box\colon R \to R'$ — некоторый $\mathscr{C}$-дифференциальный оператор (*см. диаграмму* (38))*. При этом эквивалентность рассматривается по модулю операторов вида $\Delta_\varphi = \Box' \circ \Delta$.*

Таким образом, сечениям φ, удовлетворяющим условию (37) соответствуют операторы, переводящие решения уравнения $\Delta(\psi) = 0$ в решения уравнения $\Delta'(\psi') = 0$.

$$\begin{tikzcd}
\bar{H} \arrow[rr, squiggly, "\Delta"] \arrow[dr, "\bar{\xi}"] \arrow[dd, squiggly, "\Delta_\varphi"'] & & \bar{K} \arrow[dl, "\bar{\zeta}"'] \arrow[dd, squiggly, "\square"] \\
& \mathscr{E} & \\
\bar{H}' \arrow[rr, squiggly, "\Delta'"'] \arrow[ur, "\bar{\xi}'"] & & \bar{K}' \arrow[ul, "\bar{\zeta}'"']
\end{tikzcd} \qquad (38)$$

Здесь $\bar{H}$, $\bar{H}'$, $\bar{K}$, $\bar{K}'$ обозначают тотальные пространства соответствующих индуцированных расслоений, прямые стрелки — отображения, а волнистые — $\mathscr{C}$-дифференциальные операторы на модулях сечений.

Доказательство. В силу h-регулярности, из равенства (37) следует, что

$$\tilde{\Delta}'(\varphi) = \square(\varphi_\Delta)$$

на пространстве горизонтальных джетов. Ограничивая это равенство график произвольного сечения вида $j^h_\infty(f)$, $f \in \Gamma(\pi^*_\infty(\xi))$, получаем

$$\Delta'(\Delta_\varphi(f)) = \square(\Delta(f)),$$

что и доказывает искомое равенство. Очевидно также, что если оператор ∇ имеет вид $\nabla = \square' \circ \Delta$, то $\nabla|_{\mathscr{E}_\Delta} = 0$. $\square$

(12) Рассмотрим расслоение бесконечных джетов $\pi_\infty\colon J^\infty(\pi) \to M$ и индуцированное расслоение $\bar{\pi} = \pi^*_\infty(\pi)\colon \bar{E} \to J^\infty(\pi)$. Напомним, что модуль его сечений обозначается через $\varkappa(\pi)$.

Предложение 9. *Расслоение горизонтальных джетов $\bar{\pi}^h_\infty\colon J^\infty_h(\bar{\pi}) \to J^\infty(\pi)$ изоморфно вертикальному касательному расслоению $\tau^v\colon T^v J^\infty(\pi) \to M$.*

Доказательство. Рассмотрим точку $\theta \in J^\infty(\pi)$, $x \in M$. Пусть также $z = [\varphi]^{h,\infty}_\theta \in J^\infty_h(\pi)$, $\varphi \in \varkappa(\pi)$ и $f \in \mathscr{F}(\pi)$ — гладкая функция на $J^\infty(\pi)$. Положим

$$\gamma(z)(f)|_\theta = \mathbf{E}_\varphi(f)|_\theta\,.$$

Таким образом, $\gamma(z)$ определяет касательный вектор к $J^\infty(\pi)$ в точке θ. Это и есть искомый изоморфизм (задача 91). $\square$

(13) Рассмотрим формально интегрируемое уравнение $\mathscr{E}$ и модуль $\varkappa(\mathscr{E}) = \varkappa(\pi)|_{\mathscr{E}}$. Тогда, буквально повторяя доказательство предложения 9, мы получаем изоморфизм расслоений

$\bar\pi_\infty\colon J^\infty_h(\varkappa(\mathscr{E}))\to\mathscr{E}$ и $T^vJ^\infty(\pi)|_{\mathscr{E}}$. Пользуясь этим отождествлением, рассмотрим подрасслоение в $\bar\pi_\infty$, соответствующее расслоению вертикальных относительно проекции $\pi_\infty\colon\mathscr{E}\to M$ касательных векторов к $\mathscr{E}$. Обозначим это расслоение через

$$\mathrm{t}=\mathrm{t}_{\mathscr{E}}\colon\ \mathscr{T}\mathscr{E}\to\mathscr{E}.$$

В силу п. 6 и задачи 93 это — накрытие. Оно называется касательным накрытием уравнения $\mathscr{E}$.

(14) Поскольку $\mathrm{t}_{\mathscr{E}}$ — векторное расслоение, имеет смысл говорить о послойно-линейных функциях на $\mathscr{T}\mathscr{E}$: функция $f\in\mathscr{F}(\mathscr{T}\mathscr{E})$ послойно-линейна, если

$$(\alpha_1v_1+\alpha_2v_2)^*(f)=\alpha_1v_1^*(f)+\alpha_2v_2^*(f)$$

для любых α_1, $\alpha_2\in\mathscr{F}(\mathscr{E})$ и v_1, $v_2\in\Gamma(\mathrm{t}_{\mathscr{E}})$. Эти функции можно описать следующим образом: рассмотрим расщепление (2) и двойственное ему расщепление

$$\Lambda^1(\mathscr{E})=\Lambda^1_h(\mathscr{E})\oplus\Lambda^1_v(\mathscr{E}),\tag{39}$$

где $\Lambda^1_v(\mathscr{E})$ — подмодуль, порождённый формами Картана $d_{\mathscr{C}}(f)$ (см. равенство (3)). Тогда, поскольку $\mathscr{T}\mathscr{E}=T^v(\mathscr{E})$, послойно-линейные функции отождествляются с элементами модуля $\Lambda^1_v(\mathscr{E})$. При этом, если $\omega\in\Lambda^1_v(\mathscr{E})$ и $z=[\varphi]^{h,\infty}_\theta\in J^\infty_h(\varkappa(\mathscr{E}))$, $\theta\in\mathscr{E}$, то

$$\omega(z)=\mathrm{i}_{\mathbf{E}_\varphi}(\omega)\big|_z\,.$$

При этом структура накрытия в $\mathrm{t}_{\mathscr{E}}$ определяется равенствами

$$\tilde{\mathscr{C}}_Z(d_{\mathscr{C}}f)=d_{\mathscr{C}}(\mathscr{C}_Zf),\tag{40}$$

где $\tilde{\mathscr{C}}$ — связность Картана в накрытии, $\mathscr{C}$ — та же связность на уравнении $\mathscr{E}$, а $f\in\mathscr{F}(\mathscr{E})$ и $Z\in D(M)$.

(15) Важнейшее свойство касательного накрытия таково:

Предложение 10. *Касательное накрытие уравнения $\mathscr{E}$ является Δ-накрытием, где $\Delta=\ell_{\mathscr{E}}$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{E}=\{F=0\}$, где $F=(F^1,\dots,F^r)\in\Gamma(\bar\xi)$. Тогда для любой точки $z=[\varphi]^{h,\infty}_\theta\in\mathscr{T}\mathscr{E}$ имеем

$$0=(d_{\mathscr{C}}F)|_z=\mathrm{i}_{\mathbf{E}_\varphi}d_{\mathscr{C}}F\big|_\theta=(\ell_F\varphi)|_\theta=\ell_{\mathscr{E}}|_z$$

в силу задач 95 и 96. □

(16) Пусть уравнение задано равенствами $F^1=\dots=F^r=0$ и q^j_σ — координаты в слое накрытия $\bar\pi_\infty\colon J^\infty_h(\varkappa(\mathscr{E}))\to\mathscr{E}$. Тогда пространство касательного накрытия задаётся равенствами

$$\sum_{\sigma,\alpha}\frac{\partial F^j}{\partial u^\alpha_\sigma}q^\alpha_\sigma=0,\qquad j=1,\dots,r.$$

Например, касательное накрытие уравнения КдФ — это система

$$u_t = uu_x + u_{xxx}, \qquad q_t = u_x q + u q_x + q_{xxx},$$

а уравнения синус Гордона — система

$$u_{xy} = \sin u, \qquad q_{xy} = \cos u \cdot q.$$

(17) Скажем, что сечение накрытия голономно, если оно является морфизмом уравнений. Следствием предложения 10 и теоремы 2 является

Предложение 11. *Сечение* $\varphi\colon \mathscr{E} \to \mathscr{T}\mathscr{E}$ *является симметрией уравнения* $\mathscr{E}$ *тогда и только тогда, когда оно голономно.*

(18) Соответствие $\mathscr{E} \Rightarrow \mathscr{T}\mathscr{E}$ функториально в следующем смысле. Пусть задан морфизм такой расслоений

$$\begin{tikzcd} \mathscr{E} \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\pi_\infty"'] & & \bar{\mathscr{E}} \arrow[dl, "\bar{\pi}_\infty"] \\ & M, & \end{tikzcd}$$

что g является морфизмом уравнений. Тогда определён морфизм касательных накрытий, для которого диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathscr{T}\mathscr{E} \arrow[r, "\mathrm{t}(g)"] \arrow[d, "\mathrm{t}_{\mathscr{E}}"'] & \mathscr{T}\bar{\mathscr{E}} \arrow[d, "\mathrm{t}_{\bar{\mathscr{E}}}"] \\ \mathscr{E} \arrow[r, "g"] & \bar{\mathscr{E}} \end{tikzcd}$$

коммутативна.

(19) Выбрав в качестве послойно-линейных функций на $\mathscr{T}\mathscr{E}$ картановские 1-формы $\omega_f = d_{\mathscr{C}}(f)$, $f \in \mathscr{F}(\mathscr{E})$, мы зделаем ещё один шаг, — возможно, несколько неожиданный на первый взгляд, но, как вскоре будет видно, вполне оправданный. Именно, будем рассматривать $\mathscr{T}\mathscr{E}$ как супермногообразие, чётной базой которого является пространство $\mathscr{E}$, а структурным кольцом — грассманова алгебра $\Lambda_v^*(\mathscr{E}) = \sum_{p\ge 0} \Lambda_v^p(\mathscr{E})$, где

$$\Lambda_v^p(\mathscr{E}) = \underbrace{\Lambda_v^1(\mathscr{E}) \wedge \ldots \Lambda_v^1(\mathscr{E})}_{p\ \text{раз}}.$$

С помощью алгебраического подхода, описанного в [4], легко построить дифференциальное исчисление этом супермногообразии.

(20) Пусть $Z = \mathbf{E}_\varphi$ — симметрия уравнения $\mathscr{E}$. Определим (чётное) векторное поле $\mathbf{E}_\varphi^{\mathrm{e}}$ на $\mathscr{T}\mathscr{E}$, полагая

$$\mathbf{E}_\varphi^{\mathrm{e}}(\omega) = \mathrm{L}_Z(\omega), \qquad \omega \in \Lambda_v^*(\mathscr{E}).$$

Определим также нечётное поле $\mathbf{E}_\varphi^{\mathrm{o}}$, равенствами

$$\mathbf{E}_\varphi^{\mathrm{o}}(f) = 0, \quad f \in \mathscr{F}(\mathscr{E}), \qquad \mathbf{E}_\varphi^{\mathrm{o}}(\omega) = \mathrm{i}_Z(\omega), \quad \omega \in \Lambda_v^*(\mathscr{E}).$$

Предложение 12. *Для любой симметрии* $\varphi \in \mathrm{sym}(\mathscr{E})$ *поля* $\mathbf{E}^{\mathrm{e}}_{\varphi}$ *и* $\mathbf{E}^{\mathrm{o}}_{\varphi}$ *являются симметриями касательного накрытия. При этом* $\mathbf{E}^{\mathrm{e}}_{\varphi}$ *является поднятием симметрии* φ, *а симметрия* $\mathbf{E}^{\mathrm{o}}_{\varphi}$ *невидима.*

Задачи

Задача 84. Докажите, что горизонтальная k-эквивалентность не зависит от выбора представителя в классе $[s]^{\infty}_{x}$.

Задача 85. Пусть (x^i, u^j_σ) — адаптированные координаты в $\mathscr{U} \subset J^\infty(\pi)$ и окрестность $\mathscr{U}$ такова, что расслоение $\bar{\xi}$ тривиализуется над ней. Пусть также $e_1, \dots, e_l$ — локальный базис в этой тривиализации. Докажите, что сечения $g_i = g^1_i e_1 + \dots + g^l_i e_l$, $i = 1, 2$, горизонтально $k-$эквивалентны тогда и только тогда, когда $D_\sigma(g^j_1) = D_\sigma(g^j_2)$ для всех $j = 1, \dots, l$ и таких σ, что $|\sigma| \le k$.

Задача 86. Докажите, что структура накрытия в расслоении $\bar{\xi}_\infty$ локально определяется равенствами

$$\bar{D}_{x^i} = D_{x^i} + \sum_{j,\delta} g^j_{\sigma i} \frac{\partial}{\partial g^j_\sigma},$$

где D_{x^i} — полные производные на $\mathscr{E}$.

Задача 87. Докажите, что оператор j^h_k является $\mathscr{C}$-дифференциальным и что его ограничение на графики бесконечных джетов — это оператор j_k.

Задача 88. Докажите, что отображение Φ_Δ в п. 7 определено корректно.

Задача 89. Докажите, что для любого сечения $s \in \Gamma(\pi)$ выполняется равенство

$$\Delta^{(r)}\Big|_{j_\infty(s)} = \Delta\big|^{(r)}_{j_\infty(s)}$$

т.е. операция продолжения перестановочна с ограничением на график бесконечного джета.

Задача 90. Докажите, что в локальных координатах сечение $\varphi_\nabla = (\varphi^1_\nabla, \dots, \varphi^{r'}_\nabla)$, $r' = \operatorname{rank} \xi'$, построенное в п. 11, имеет вид

$$\varphi^j_\nabla = \sum_{i,\sigma} a^j_{i,\sigma} g^i_\sigma,$$

если ∇ — это матричный $\mathscr{C}$-дифференциальный оператор вида $\nabla = \left(\sum_\sigma a^j_{i,\sigma} D_\sigma\right)$, $i = 1, \dots, \operatorname{rank} \xi$, $j = 1, \dots, \operatorname{rank} \xi'$, а g^i_σ — адаптированные координаты в слое Δ-накрытия.

Задача 91. Докажите, что отображение $\gamma\colon J^\infty_h(\varkappa) \to T^v J^\infty(\pi)$, построенное в доказательстве предложения 9, определено корректно и действительно является изоморфизмом расслоений.

Задача 92. Докажите, что изоморфизм γ переводит сечения вида $j^h_\infty(\varphi)$ расслоения горизонтальных джетов в сечения $\mathbf{E}_\varphi$ вертикального касательного расслоения.

Задача 93. Докажите, что распределение Картана на $J^\infty_h(\varkappa(\mathscr{E}))$ индуцирует на $\mathscr{T}\mathscr{E}$ n-мерное интегрируемое распределение.

Задача 94. Докажите, что $[d_{\mathscr{C}}, \mathscr{C}_Z] = 0$ для любого поля $Z \in D(M)$.

Задача 95. Докажите равенство $\mathrm{i}_{\mathbf{E}_\varphi}(d_{\mathscr{C}} f) = \ell_f(\varphi)$.

Задача 96. Пусть $\bar{\xi}\colon \bar{H} \to \mathscr{E}$ — расслоение вида $\pi^*_\infty(\xi)$, где $\xi\colon H \to M$ — векторное расслоение. Пусть сечение $g \in \Gamma(\bar{\xi})$ локально представлено в виде $g = \sum_j g^j e_j$, $g^j \in \mathscr{F}(\mathscr{E})$. Положим

$$d_{\mathscr{C}}(g) = \sum_j d_{\mathscr{C}}(g^j) e_j.$$

Докажите, что это определение корректно.

Задача 97. Докажите равенство (40).

Задача 98. Пусть в локальных координатах уравнения $\mathscr{E}$ и $\bar{\mathscr{E}}$ заданы условиями $F(x, \dots, u^j_\sigma, \dots) = 0$ и $\bar{F}(x, \dots, \bar{u}^j_\sigma, \dots) = 0$ соответственно, а морфизм из п. 18 — равенствами $\bar{u}^j = g^j(x, \dots, u^\alpha_\sigma, \dots)$. Докажите, что морфизм $\mathrm{t}(g)$ имеет в этом случае вид

$$\bar{q}^j = \ell_{g^j}(q) = \sum_{\alpha,\sigma} \frac{\partial g^j}{\partial u^\alpha_\sigma} q^\alpha_\sigma.$$

Задача 99. Пусть $\tau\colon \tilde{\mathscr{E}} \to \mathscr{E}$ — накрытие. Тогда, в силу п. 18, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{T}\tilde{\mathscr{E}} \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{t}(\tau)"] \arrow[dr, "\mathrm{t}_{\tilde{\mathscr{E}}}"] & \widetilde{\mathscr{T}\mathscr{E}} \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{\mathrm{t}}_{\mathscr{E}}"] & \mathscr{T}\mathscr{E} \arrow[d, "\mathrm{t}_{\mathscr{E}}"] \\
K(\tau) \arrow[u] \arrow[r, "k(\tau)"] & \tilde{\mathscr{E}} \arrow[r, "\tau"] & \mathscr{E},
\end{tikzcd}$$

где $\tilde{\mathrm{t}}_{\mathscr{E}} = \tau^*(\mathrm{t}_{\mathscr{E}})\colon \widetilde{\mathscr{T}\mathscr{E}} \to \tilde{\mathscr{E}}$ — индуцированное расслоение, а $k(\tau)\colon K(\tau) \to \tilde{\mathscr{E}}$ — ядро морфизма $\mathrm{t}(\tau)$. Докажите, что голономные сечения накрытия $\tilde{\mathrm{t}}_{\mathscr{E}}$ отождествляются с тенями нелокальных симметрий в накрытии τ, а сечения ядра $k(\tau)$ — с невидимыми симметриями (см. п. 17 лекции 5).

Задача 100. Докажите предложение 12.

Задача 101. Выпишите производящие сечения симметрий $\mathbf{E}^{\mathrm{e}}_\varphi$ и $\mathbf{E}^{\mathrm{o}}_\varphi$. В частности, докажите, что $[\mathbf{E}^{\mathrm{e}}_\varphi, \mathbf{E}^{\mathrm{e}}_\psi] = \mathbf{E}^{\mathrm{e}}_{\{\varphi,\psi\}}$.

Задача 102. Распространив дифференциал Картана $d_{\mathscr{C}}$ на $\Lambda^*_v(\mathscr{E})$, полагая $d_{\mathscr{C}}(\omega\wedge\theta)=d_{\mathscr{C}}(\omega)\wedge\theta+(-1)^{\omega}\omega\wedge d_{\mathscr{C}}(\theta)$, его можно считать нечётным векторным полем на $\mathscr{T}\mathscr{E}$. Обозначим это поле через $\mathbf{Z}^{\mathrm{e}}$. Можно также рассмотреть чётное поле $\mathbf{Z}^{\mathrm{o}}$, полагая $\mathbf{Z}^{\mathrm{o}}(\omega)=\mathrm{i}_{d_{\mathscr{C}}}(\omega)$, где $d_{\mathscr{C}}$ понимается как элемент модуля $D_1(\Lambda^1(\mathscr{E}))$ (см. [4]). Докажите, что эти поля суть симметрии уравнения $\mathscr{T}\mathscr{E}$ и выпишите их производящие сечения.

Задача 103. Вычислите коммутаторы полей вида $\mathbf{E}^{\mathrm{e}}_{\varphi}$ и $\mathbf{E}^{\mathrm{e}}_{\varphi}$ между собой, а также их коммутаторы с симметриями $\mathbf{Z}^{\mathrm{e}}$ и $\mathbf{Z}^{\mathrm{o}}$. Чему равен коммутатор $[\mathbf{Z}^{\mathrm{e}},\mathbf{Z}^{\mathrm{o}}]$?

Лекция 8 (06.04.2016)

В этой лекции будет дано определение операторов рекурсии для симметрий, изучены свойства таких операторов и описаны методы их вычисления.

Операторы рекурсии

(1) Рассмотрим регулярное уравнение $\pi_\infty\colon\mathscr{E}\to M$ и его касательное накрытие $\mathrm{t}_{\mathscr{E}}\colon\ \mathscr{T}\mathscr{E}\to\mathscr{E}$. Пусть $\bar\pi$ — расслоение над $\mathscr{T}\mathscr{E}$, полученное индуцированием расслоения $\pi\colon E\to M$ с помощью композиции $\pi_\infty\circ\mathrm{t}_{\mathscr{E}}$. Тогда непосредственным следствием предложения 8 и задачи 104 является

Предложение 13. *Пусть $\varphi\in\Gamma(\bar\pi)$ — послойно-линейное сечение и $\tilde\ell_{\mathscr{E}}$ — поднятие оператора линеаризации в касательное накрытие и уравнение $\mathscr{E}$ задано как нули некоторого сечения $F\in P$. Тогда решения уравнения*

$$\tilde\ell_{\mathscr{E}}(\varphi)=0 \tag{41}$$

находятся во взаимно-однозначном соответствии с классами $\mathscr{C}$-дифференциальных операторов

$$\frac{\{\,\mathscr{R}=\mathscr{R}_\varphi\colon\varkappa(\mathscr{E})\to\varkappa(\mathscr{E})\mid \ell_{\mathscr{E}}\circ\mathscr{R}=\Delta\circ\ell_{\mathscr{E}}\,\}}{\{\mathscr{R}=\nabla\circ\ell_{\mathscr{E}}\}},$$

где $\Delta\colon P\to P$ и $\nabla\colon P\to\varkappa(\mathscr{E})$ — также некоторые $\mathscr{C}$-дифференциальные операторы.

(2) Таким образом, операторы $\mathscr{R}_\varphi$, соответствующие решениям уравнения (41), переводят симметрии уравнения $\mathscr{E}$ в симметрии. Они называются операторами рекурсии. При этом действие операторов вида $\nabla\circ\ell_{\mathscr{E}}$ тривиально. Очевидно, операторы рекурсии образуют ассоциативную алгебру с единицей относительно композиции, причём множество тривильных операторов — её двусторонний идеал. Соотвествующая факторалгебра обозначается через $\mathscr{R}ec\,(\mathscr{E})$.

(3) Пусть $x^1, \dots, x^n, \dots, u^j_\sigma, \dots, q^j_\sigma \dots$ — адаптированные координаты на $\mathscr{T}\mathscr{E}$, $j = 1, \dots, m$. Тогда сечение $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^m)$ должно иметь вид

$$\varphi^j = \sum_{\sigma,\alpha} a^j_{\sigma,\alpha} q^\alpha_\sigma,$$

где $a^j_{\sigma,\alpha} \in \mathscr{F}(\mathscr{E})$, а соответствующий оператор рекурсии — это матричный $\mathscr{C}$-дифференциальный оператор $\mathscr{R}_\varphi = \left(\sum_\sigma a^j_{\sigma,\alpha} D_\sigma\right)$.

Пример 13. Рассмотрим уравнение теплопроводности $u_t = u_{xx}$. Его касательное накрытие задаётся дополнительным уравнением $q_t = q_{xx}$. Тогда уравнением, определяющим операторы рекурсии, является

$$D_t(\varphi) = D_x^2(\varphi),$$

где $\varphi = a_0 q_0 + \dots + a_k q_k$, $a_i = a_i(x, t, u, \dots, u_{k_i})$. При $k = 1$ получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} D_t(a_0) &= D_x^2(a_0), \\ D_t(a_1) &= 2D_x(a_0) + D_x^2(a_1), \\ 0 &= 2D_x(a_1). \end{aligned}$$

У неё три линейно независимых решения —

$$\varphi^0_0 = q_0, \qquad \varphi^0_1 = q_1, \qquad \varphi^1_1 = tq_1 + \frac{x}{2} q_0,$$

которым соответствуют операторы рекурсии

$$\mathscr{R}_0 = \mathrm{id}, \qquad \mathscr{R}^0_1 = D_x, \qquad \mathscr{R}^1_1 = tD_x + \frac{x}{2}.$$

Эти операторы порождают алгебру $\mathscr{R}ec\,(\mathscr{E})$ (см. задачу 105).

(4) На первый взгляд, предложение 13 полностью решает задачу нахождения операторов рекурсии — по крайней мере, в принципе. Это, однако, не так. Во-первых, операторы рекурсии «почти никогда» не бывают локальными[1] — мы уже встречались с такими операторами в п. 13 (КдФ) и в задаче 42 (уравнение Бюргерса). Во-вторых, в теории интегрируемых систем интересны операторы рекурсии, которые порождают коммутативные алгебры (серии) симметрий. Мы начнём с обсуждения второго вопроса, поскольку ответ на него понадобится и при изучении нелокальных операторов.

[1]Фольклорный результат состоит в том, что локальные операторы рекурсии бывают только у линейных уравнений с постоянными коэффициентами, однако мне не известны работы, где бы это было доказано. Доказать (или опровергнуть) это утверждение — хорошая задача.

(5) Заметим прежде всего, что из предложения 13 следует, что операторы рекурсии можно понимать как тени (см. п. 18 лекции 5) в касательном накрытии. Прежде чем воспользоватьтя этим наблюдением, необходимо, конечно, в бо́льших деталях обсудить теорию симметрий для уравнений, содержащих нечётные переменные. Мы ограничимся объектами, которые назовём градуированными расширениями.

(6) Рассмотрим уравнение $\pi_\infty\colon \mathscr{E} \to M$ и векторное расслоение $\upsilon\colon W \to M$. Без ограничения общности, по крайней мере локально, любое накрытие $\tau\colon \tilde{\mathscr{E}} \to \mathscr{E}$ над $\mathscr{E}$ можно рассматривать как поднакрытие в $\bar{\upsilon}_\infty\colon J^\infty_h(\bar{\upsilon}) \to \mathscr{E}$ для некоторого υ. Скажем, что τ — конечного типа, если $\operatorname{rank}\upsilon < \infty$.

(7) Обозначим через $\mathscr{F}^1(\tilde{\mathscr{E}})$ модуль послойно-линейных функций на $\tilde{\mathscr{E}}$ и скажем, что накрытие линейно, если $\tilde{\mathscr{C}}_Y(\mathscr{F}^1(\tilde{\mathscr{E}})) \subset \mathscr{F}^1(\tilde{\mathscr{E}})$ для любого поля $Y \in D(M)$. Рассмотрим грассманову алгебру

$$\mathscr{F}^*(\tilde{\mathscr{E}}) = \sum_{i\geq 0} \mathscr{F}^i(\tilde{\mathscr{E}}), \qquad \mathscr{F}^i(\tilde{\mathscr{E}}) = \Lambda^i \mathscr{F}^1(\tilde{\mathscr{E}}), \quad \mathscr{F}^0(\tilde{\mathscr{E}}) = \mathscr{F}(\mathscr{E}),$$

и распространим и распространим действие полей $\tilde{\mathscr{C}}_Y$ на $\mathscr{F}^*(\tilde{\mathscr{E}})$ по правилу Лейбница. Полученную пару $(\tilde{\mathscr{E}}, \mathscr{F}^*(\tilde{\mathscr{E}}))$, оснащённую так определённой связностью Картана $\tilde{\mathscr{C}}$ будем называть (градуированным) τ-расширением уравнения $\mathscr{E}$.

(8) Пусть Z — градуированное дифференцирование алгебры $\mathscr{F}^*(\tilde{\mathscr{E}})$, т.е. такое $\mathbb{R}$-линейное отображение, что

$$Z(\mathscr{F}^i(\tilde{\mathscr{E}})) \subset \mathscr{F}^{i+|Z|}(\tilde{\mathscr{E}}),$$
$$Z(a \wedge b) = Z(a) \wedge b + (-1)^{|a|\cdot|Z|} a \wedge Z(b)$$

(символ $|\cdot|$ обозначает чётность элемента). Оно называется (градуированной) симметрией τ-расширения, если

(a) оно вертикально, т.е. $Z|_{C^\infty(M)} = 0$,

(b) и сохраняет связность Картана, т.е. $[Z, \tilde{\mathscr{C}}_Y] =$ для всех $Y \in D(M)$.

(9) Для описания симметрий τ-расширений рассмотрим градуированный $\mathscr{F}^*(\tilde{\mathscr{E}})$-модуль $\varkappa_\tau(\mathscr{E})$, определённый следующим образом:

$$\varkappa_\tau(\mathscr{E}) = \mathscr{F}^*(\tilde{\mathscr{E}}) \otimes_{\mathscr{F}(\tilde{\mathscr{E}})} (\Gamma(\bar{\pi}) \oplus \Gamma(\bar{\upsilon})),$$

и положим

$$|\varphi \otimes v| = \begin{cases} |\varphi|, & \text{если } v \in \Gamma(\bar{\pi}), \\ |\varphi| - 1, & \text{если } v \in \Gamma(\bar{\upsilon}). \end{cases}$$

Тогда справедлив аналог теоремы 2:

Предложение 14. *Пусть $\tau\colon \tilde{\mathscr{E}} \to \mathscr{E}$ — линейное накрытие конечного типа, $\tilde{\mathscr{E}} \subset J_h^\infty(\bar{v})$. Тогда существует взаимно-однозначное соответствие между градуированными симметриями соответствующего τ-расширения и элементами модуля $\varkappa_\tau(\mathscr{E})$, удовлетворяющими уравнению*

$$\ell_{\tilde{\mathscr{E}}}(\Phi) = 0.$$

При этом, если в локальных координатах

$$\Phi = \sum_\alpha \varphi_0^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \sum_\beta \varphi_1^\beta \frac{\partial}{\partial v^\beta},$$

то соответствующее градуированное векторное поле имеет вид

$$\mathbf{E}_\Phi = \sum_{\alpha,\sigma} D_\sigma(\varphi_0^\alpha) \frac{\partial}{\partial u_\sigma^\alpha} + \sum_{\beta,\rho} D_\sigma(\varphi_1^\beta) \frac{\partial}{\partial v_\rho^\beta},$$

где суммирование осуществляется по всем внутренним координатам уравнения $\tilde{\mathscr{E}}$.

(10) Вернёмся к касательному накрытию, понимая его как градуированное расширение. В этом случае $\mathscr{F}^*(\mathscr{T}\mathscr{E}) = \Lambda_v^*(\mathscr{E})$ (ср. с п. 19 лекции 7).

Предложение 15. *Любая градуированная тень в касательном накрытии допускает естественное поднятие до его градуированной симметрии.*

Доказательство. Пусть S — тень. Она является градуированным дифференцированием из алгебры $\mathscr{F}(\mathscr{E})$ со значениями в $\Lambda_v^*(\mathscr{E})$. Поэтому для любой функции $\omega \in \mathscr{F}^*(\mathscr{E})$ (т.е. картановской формы на $\mathscr{E}$) определено действие

$$\tilde{S} = \mathrm{L}_S^{\mathscr{C}}(\omega) = d_{\mathscr{C}}(\mathrm{i}_S(\omega)) - (-1)^{|\omega|-1}\mathrm{i}_S(d_{\mathscr{C}}(\omega)) \tag{42}$$

(см. [4]). Это и есть искомое поднятие. □

(11) Следствием доказанного результата является существование канонической проекции алгебры (градуированных) симметрий кокасательного накрытия на подалгебру (градуированных) невидимых симметрий. Действительно, пусть X — симметрия. Тогда $S_X = X|_{\mathscr{F}(\mathscr{E})}$ — тень и поле $X - \tilde{S}_X$, где $\tilde{S}_X$ — каноническое поднятие, является искомой невидимой симметрией.

(12) Применительно к «обычным» симметриям градуировки 0 сказанное означает, что алгебра Ли $\mathrm{sym}(\mathscr{T}\mathscr{E})$ (как векторное пространство) раскладывается в прямую сумму пространства теней (поднятия) и подалгебры, состоящей из невидимых симметрий. Эта подалгебра содержит, по крайней мере, алгебру $\mathrm{sym}\,\mathscr{E}$ (симметрии вида $\mathbf{E}_\varphi^{\mathrm{o}}$, см. п. 20), а на самом деле совпадает с ещё

одним экземпляром пространства теней. Это пространство наделено структурой алгебры Ли: если S_1 и S_2 — тени, то мы полагаем

$$[S_1, S_2] = [\tilde{S}_1, \tilde{S}_2]\Big|_{\mathscr{F}(\mathscr{E})}. \tag{43}$$

Обозначим полученную алгебру через $\operatorname{shad}\mathscr{E}$. Очевидо, $\operatorname{sym}\mathscr{E} \subset \operatorname{shad}\mathscr{E}$.

(13) Докажем сформулированное в предыдущем пункте утверждение о структуре алгебры симметрий кокасательного накрытия.

Предложение 16. *Алгебра Ли* $\operatorname{sym}(\mathscr{T}\mathscr{E})$ *является полупрямым произведением двух экземпляров алгебры* $\operatorname{shad}\mathscr{E}$*.*

Доказательство. Действительно, заметим, во-первых, что модуль $\varkappa(\mathscr{T}\mathscr{E})$ является прямой суммой двух копий модуля $\bar{\varkappa}(\mathscr{E})$ — модуля сечений расслоения π, поднятого на $\mathscr{T}\mathscr{E}$. Таким образом, производящее сечение симметрии — это пара $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1)$. Пусть уравнение $\mathscr{E}$ задано нулями сечения $F = F(u) \in P$. Тогда $\mathscr{T}\mathscr{E}$ задаётся парой $(F(u), G(u, q))$, где $G = \ell_F$ — дифференциальный оператор, нелинейный по первому и линейный по второму аргументу. Поэтому оператор линеаризации касательного накрытия имеет вид

$$\begin{pmatrix} \ell_F & 0 \\ \ell_G^u & \ell_G^q \end{pmatrix},$$

где верхний индекс во второй строчке указывает, по какому аргументу линеаризуется функция. Значит, симметрии являются решениями системы

$$\begin{aligned} &\tilde{\ell}_{\mathscr{E}}(\varphi_0) = 0, \\ &\ell_G^u\big|_{\mathscr{T}\mathscr{E}}(\varphi_0) + \tilde{\ell}_{\mathscr{E}}(\varphi_1) = 0. \end{aligned}$$

Решениями первого уравнения являются тени, и предложение 15 утверждает, что для каждого такого решения существует такой канонически определённый элемент φ_1, что выполняется второе уравнение. Если симметрия невидима, то $\varphi_0 = 0$ и, значит, компонента φ_1 — тень. □

(14) Пусть теперь S_1 и S_2 — градуированные тени. Аналогично равенству (43) положим

$$[\![S_1, S_2]\!] = [\tilde{S}_1, \tilde{S}_2]\Big|_{\mathscr{F}(\mathscr{E})},$$

где в правой части стоит градуированный коммутатор. Полученный элемент называется вариационной скобкой Нийенхейса теней S_1 и S_2. Основные свойства этой скобки следующие:

Предложение 17. *Для любых градуированных теней* $\Omega\colon \mathscr{F}(\mathscr{E}) \to \Lambda_v^k(\mathscr{E}))$, $\Theta\colon \mathscr{F}(\mathscr{E}) \to \Lambda_v^l(\mathscr{E}))$ *и* $\Xi\colon \mathscr{F}(\mathscr{E}) \to \Lambda_v^m(\mathscr{E}))$ *имеют место равенства*

(a) $[\![\Omega,\Theta]\!]+(-1)^{kl}[\![\Theta,\Omega]\!]=0$,
(b) $[\![\Omega,[\![\Theta,\Xi]\!]]\!]=[\![[\![\Omega,\Theta]\!],\Xi]\!]+(-1)^{kl}[\![\Theta,[\![\Omega,\Xi]\!]]\!]$,
(c) $[\![\Omega,\omega\wedge\Theta]\!]=\mathrm{L}^{\mathscr{C}}_{\Omega}(\omega)\wedge\Theta+(-1)^{ik}\omega\wedge[\![\Omega,\Theta]\!]-$
$-(-1)^{(k+1)(i+k)}\,d_{\mathscr{C}}\omega\wedge\mathrm{i}_{\Theta}(\Omega)$,
(d) $[\mathrm{L}^{\mathscr{C}}_{\Omega},\mathrm{i}_{\Theta}]=(-1)^{k}\mathrm{L}^{\mathscr{C}}_{\mathrm{i}_{\Theta}(\Omega)}+\mathrm{i}_{[\![\Omega,\Theta]\!]}$,
(e) $\mathrm{i}_{\Omega}[\![\Theta,\Xi]\!]=[\![\mathrm{i}_{\Omega}(\Theta),\Xi]\!]+(-1)^{(k+1)l}[\![\Theta,\mathrm{i}_{\Omega}(\Xi)]\!]+(-1)^{l}\mathrm{i}_{[\![\Omega,\Theta]\!]}(\Xi)-$
$-(-1)^{(l+1)m}\mathrm{i}_{[\![\Omega,\Xi]\!]}(\Theta)$,

где $\omega\in\Lambda^{i}_{v}(\mathscr{E})$.

Кроме того,

$$[\![\omega\otimes X,\theta\otimes Y]\!]=\omega\wedge\theta\otimes[X,Y]+\omega\wedge\mathrm{L}^{\mathscr{C}}_{X}(\theta)\otimes Y-\mathrm{L}^{\mathscr{C}}_{Y}(\omega)\wedge\theta\otimes X+ \\ +(-1)^{i}\,d_{\mathscr{C}}\omega\wedge\mathrm{i}_{X}(\theta)\otimes Y+(-1)^{i}\mathrm{i}_{Y}(\omega)\wedge\,d_{\mathscr{C}}\theta\otimes X, \quad (44)$$

где $\omega\in\Lambda^{i}_{v}(\mathscr{E})$, $\theta\in\Lambda^{j}_{v}(\mathscr{E})$ — картановские формы, а X, $Y\in D^{v}(\mathscr{E})$ — вертикальные дифференцирования.

(15) Поскольку всякая градуированная тень имеет вид

$$\mathbf{E}_{\varphi}=\sum D_{\sigma}(\varphi^{j})\frac{\partial}{\partial u^{j}_{\sigma}},$$

где $\varphi=(\varphi^{1},\dots,\varphi^{m})\in\Lambda^{*}_{v}(\mathscr{E})\otimes\varkappa(\mathscr{E})$ — элемент, удовлетворяющий уравнению

$$\tilde{\ell}_{\mathscr{E}}(\varphi)=0, \quad (45)$$

а суммирование производится по всем внутренним координатам на $\mathscr{E}$, равенство

$$[\mathbf{E}_{\varphi},\mathbf{E}_{\psi}]=\mathbf{E}_{\{\varphi,\psi\}}$$

определяет на пространстве теней градуированную скобку Якоби, которая в в покомпонентном представлении имеет вид

$$\{\varphi,\psi\}^{j}=\mathrm{L}^{\mathscr{C}}_{\mathbf{E}_{\varphi}}(\psi^{j})-(-1)^{|\varphi|\cdot|\psi|}\mathrm{L}^{\mathscr{C}}_{\mathbf{E}_{\psi}}(\varphi^{j}). \quad (46)$$

(16) Рассмотрим оператор рекурсии $\mathscr{R}\in\mathscr{R}ec(\mathscr{E})$ уравнения $\mathscr{E}$, т.е. тень градуировки 1 (см. предложение 13). Элемент $N_{\mathscr{R}}=[\![\mathscr{R},\mathscr{R}]\!]\in\Lambda^{2}_{v}\otimes\varkappa(\mathscr{E})$ называется тензором Нийенхейса. Оператор называется[2] наследственным (hereditary), если $N_{\mathscr{R}}=0$.

Предложение 18. *Пусть* $\mathscr{R}\in\mathscr{R}ec(\mathscr{E})$ *— наследственный оператор рекурсии, инвариантный относительно симметрии* $\varphi\in\mathrm{sym}(\mathscr{E})$, *т.е. удовлетворяющий равенству* $[\![\mathbf{E}_{\varphi},\mathscr{R}]\!]=0$. *Тогда все симметрии* $\varphi_{n}=\mathscr{R}^{n}(\varphi)$, $\varphi_{0}=\varphi$, *порождённые этим оператором, попарно коммутируют.*

[2]По непонятным мне причинам.

Доказательство. Этот результат следует из задачи 117 тождества

$$[X_m, Y_n] = [X, Y]_{m+n} + \sum_{i=0}^{n-1} ([\![X, \mathscr{R}]\!]^n(Y_i))_{m+n-i-1} - \\ - \sum_{j=0}^{m-1} ([\![Y, \mathscr{R}]\!]^m(X_j))_{m+n-j-1}, \qquad (47)$$

верного для любых симметрий X и Y. $\square$

(17) Наша последняя задача — распространить развитый выше формализм на нелокальные операторы рекурсии. С этой целью перепишем сначала формулу (46) в более удобном для дальнейшего виде. Пусть

$$\varphi = \sum_{\alpha,\sigma} \varphi_\sigma^\alpha \frac{\partial}{\partial u_\sigma^\alpha}, \qquad \psi = \sum_{\beta,\rho} \psi_\rho^\beta \frac{\partial}{\partial u_\rho^\beta},$$

где суммирование производится по внутренним координатам уравнения и φ, ψ — элементы градуировки 1. Тогда, в силу равенства (44) получаем

$$[\![\varphi, \psi]\!] = \sum_{\alpha,\beta,\sigma,\rho} \varphi_\sigma^\alpha \wedge \psi_\rho^\beta \otimes \left[\frac{\partial}{\partial u_\sigma^\alpha}, \frac{\partial}{\partial u_\rho^\beta}\right] + \sum_{\alpha,\beta,\sigma,\rho} \varphi_\sigma^\alpha \wedge \mathrm{L}_{\partial/\partial u_\sigma^\alpha}(\psi_\rho^\beta) \otimes \frac{\partial}{\partial u_\rho^\beta} - \\ - \sum_{\alpha,\beta,\sigma,\rho} \mathrm{L}_{\partial/\partial u_\rho^\beta}(\varphi_\sigma^\alpha) \wedge \psi_\rho^\beta \otimes \frac{\partial}{\partial u_\sigma^\alpha} - \sum_{\alpha,\beta,\sigma,\rho} d_{\mathscr{C}}(\varphi_\sigma^\alpha) \wedge \mathrm{i}_{\partial/\partial u_\sigma^\alpha}(\psi_\rho^\beta) \otimes \frac{\partial}{\partial u_\rho^\beta} - \\ - \sum_{\alpha,\beta,\sigma,\rho} \mathrm{i}_{\partial/\partial u_\rho^\beta}(\varphi_\sigma^\alpha) \wedge d_{\mathscr{C}}(\psi_\rho^\beta) \otimes \frac{\partial}{\partial u_\sigma^\alpha}.$$

Но дифференцирования φ и ψ — эволюционные, т.е.

$$\varphi_\sigma^\alpha = D_\sigma(\varphi^\alpha), \qquad \psi_\rho^\beta = D_\rho(\psi^\beta);$$

поэтому $[\![\varphi, \psi]\!] = \mathbf{E}_{\{\varphi,\psi\}}$, где, как это следует из только что проделанных вычислений

$$\{\varphi, \psi\}^\alpha = \sum_{\beta,\sigma} \left(\varphi_\sigma^\beta \wedge \mathrm{L}_{\partial/\partial u_\sigma^\beta}(\psi^\alpha) + \psi_\sigma^\beta \wedge \mathrm{L}_{\partial/\partial u_\sigma^\beta}(\varphi^\alpha)\right) - \\ - \sum_{\beta,\sigma} \left(\mathrm{i}_{\partial/\partial u_\sigma^\beta}(\psi^\alpha) \cdot d_{\mathscr{C}}(\varphi_\sigma^\beta) + \mathrm{i}_{\partial/\partial u_\sigma^\beta}(\varphi^\alpha) \cdot d_{\mathscr{C}}(\psi_\sigma^\beta)\right).$$

Пусть

$$\varphi^\alpha = \sum_{j,\rho} a_{i,\rho}^\alpha q_\rho^j, \qquad \psi^\beta = \sum_{j,\rho} b_{j,\rho}^\beta q_\rho^j,$$

где q_ρ^j — послойные координаты касательного накрытия. Тогда

$$\mathrm{i}_{\partial/\partial u^\beta_\sigma}(\psi^\alpha)\cdot d_{\mathscr{C}}(\varphi^\beta_\sigma) = \mathrm{i}_{\partial/\partial u^\beta_\sigma}\left(\sum_{j,\rho} b^\alpha_{j,\rho} q^j_\rho\right)\cdot D_\sigma(d_{\mathscr{C}}\varphi^\beta) =$$

$$= b^\alpha_{\beta,\sigma}\cdot D_\sigma(d_{\mathscr{C}}\varphi^\beta) = \frac{\partial\psi^\alpha}{\partial q^\beta_\sigma} D_\sigma(d_{\mathscr{C}}\varphi^\beta) = \ell^{q^\beta}_{\psi^\alpha}(d_{\mathscr{C}}\varphi^\beta),$$

где $\ell^{q^\beta}_{\psi^\alpha}$ — линеаризация элемента ψ^α относительно переменной q^β. С другой стороны,

$$\mathrm{L}_{\partial/\partial u^\beta_\sigma}(\psi^\alpha) = \mathrm{i}_{\partial/\partial u^\beta_\sigma}(d_{\mathscr{C}}\psi^\alpha) + d_{\mathscr{C}}(\mathrm{i}_{\partial/\partial u^\beta_\sigma}\psi^\alpha) = \mathrm{i}_{\partial/\partial u^\beta_\sigma}\left(d_{\mathscr{C}}\sum_{j,\rho} b^\alpha_{j,\rho} q^j_\rho\right) +$$

$$+ d_{\mathscr{C}}\left(\mathrm{i}_{\partial/\partial u^\beta_\sigma}\sum_{j,\rho} b^\alpha_{j,\rho} q^j_\rho\right) = \sum_{j,\rho}\mathrm{i}_{\partial/\partial u^\beta_\sigma}\left(d_{\mathscr{C}} b^\alpha_{j,\rho}\right) q^j_\rho - d_{\mathscr{C}}(b^\alpha_{\beta,\sigma}) + d_{\mathscr{C}}(b^\alpha_{\beta,\sigma}) =$$

$$= \sum_{j,\rho}\mathrm{i}_{\partial/\partial u^\beta_\sigma}\left(d_{\mathscr{C}} b^\alpha_{j,\rho}\right) q^j_\rho.$$

Поскольку

$$d_{\mathscr{C}} b^\alpha_{j,\rho} = \sum_{\gamma,\tau}\frac{\partial b^\alpha_{j,\rho}}{\partial u^\gamma_\tau} q^\gamma_\tau,$$

в итоге получаем

$$\varphi^\beta_\sigma \wedge \mathrm{L}_{\partial/\partial u^\beta_\sigma}(\psi^\alpha) = D_\sigma(\varphi^\beta)\wedge\sum_{j,\rho}\mathrm{i}_{\partial/\partial u^\beta_\sigma}\left(d_{\mathscr{C}} b^\alpha_{j,\rho}\right) q^j_\rho =$$

$$= D_\sigma(\varphi^\beta)\wedge\sum_{j,\rho}\mathrm{i}_{\partial/\partial u^\beta_\sigma}\left(\sum_{\gamma,\tau}\frac{\partial b^\alpha_{j,\rho}}{\partial u^\gamma_\tau} q^\gamma_\tau\right) q^j_\rho = D_\sigma(\varphi^\beta)\wedge\sum_{j,\rho}\frac{\partial b^\alpha_{j,\rho}}{\partial u^\beta_\sigma} q^j_\rho = -\ell^{u^\beta}_{\psi^\alpha}(\varphi^\beta),$$

где $\ell^{u^\beta}_{\psi^\alpha}$ — линеаризация элемента ψ^α относительно переменной u^β. Таким образом,

$$\{\varphi,\psi\}^\alpha = -\sum_\beta\left(\ell^{q^\beta}_{\psi^\alpha}(d_{\mathscr{C}}\varphi^\beta) + \ell^{q^\beta}_{\varphi^\alpha}(d_{\mathscr{C}}\psi^\beta)\right) - \sum_\beta\left(\ell^{u^\beta}_{\psi^\alpha}(\varphi^\beta) + \ell^{u^\beta}_{\varphi^\alpha}(\psi^\beta)\right).$$

В частности,

$$\{\varphi,\varphi\}^\alpha = -2\sum_\beta\left(\ell^{q^\beta}_{\varphi^\alpha}(d_{\mathscr{C}}\varphi^\beta) + \ell^{u^\beta}_{\varphi^\alpha}(\varphi^\beta)\right). \tag{48}$$

(18) Применим равенство (48) для вычисления тензора Нийенхейса нелокальных операторов рекурсии. Для простоты ограничимся случаем $\dim M = 2$, т.е. уравнениями, в которых неизвестные — это функции от двух независимых переменных. Пусть $\tau\colon \widetilde{\mathscr{T}\mathscr{E}} \to \mathscr{T}\mathscr{E}$ — неприводимое накрытие на касательным уравнением вида

$$w_x = \sum_{\alpha,\sigma} X_{\alpha,\sigma} q^\alpha_\sigma, \qquad w_y = \sum_{\alpha,\sigma} X_{\alpha,\sigma} q^\alpha_\sigma, \tag{49}$$

где, как и выше, q^α_σ — координаты в слое касательного накрытия, а $X_{\alpha,\sigma}$, $Y_{\alpha,\sigma}$ — функции на $\mathscr{E}$. Таким образом, рассматриваемое накрытие является абелевым, а нелокальная переменная w имеет градуировку 1. Пусть $\tilde{\ell}_{\mathscr{E}}$ — поднятие оператора линеаризации в накрытие τ. Рассмотрим на пространстве $\widetilde{\mathscr{T}\mathscr{E}}$ вектор-функцию $\Phi = (\varphi^1, \dots, \varphi^m)$, где

$$\varphi^j = \sum_{\alpha,\sigma} a^j_{\alpha,\sigma} q^\alpha_\sigma + b^j w, \qquad a^j_{\alpha,\sigma},\ b^j \in \mathscr{F}(\mathscr{E}). \tag{50}$$

Рассмотрим косимметрию $\psi = \psi_\tau$, ассоциированную с накрытием τ (см. задачу 119) и предположим, что она является производящим сечением некоторого закона сохранения ω уравнения $\mathscr{E}$. Пусть τ_ω — соответствующее накрытие над $\mathscr{E}$. Тогда справедливо следующее

Предложение 19. *Пусть Φ вида (50) удовлетворяет уравнению $\tilde{\ell}_{\mathscr{E}}(\Phi) = 0$ и $S = (S^1, \dots, S^m)$ — симметрия уравнения $\mathscr{E}$. Предположим, что элемент W удовлетворяет уравнениям*

$$D_x(W) = \sum_{\alpha,\sigma} X_{\alpha,\sigma} D_\sigma(S^\alpha), \qquad D_y(W) = \sum_{\alpha,\sigma} Y_{\alpha,\sigma} D_\sigma(S^\alpha). \tag{51}$$

(ср. с (49)). Тогда $\tilde{S} = (\tilde{S}^1, \dots, \tilde{S}^m)$, где

$$\tilde{S}^j = \sum_{\alpha,\sigma} a^j_{\alpha,\sigma} D_\sigma(S^\alpha) + b^j W$$

— тень симметрии в накрытии τ_ω.

(19) Связь между тенями S и $\tilde{S}$ принято представлять в виде

$$\tilde{S}^j = \sum_{\alpha,\sigma} a^j_{\alpha,\sigma} D_\sigma(S^\alpha) + b^j D_x^{-1}\left(\sum_{\alpha,\sigma} X_{\alpha,\sigma} D_\sigma(S^\alpha)\right).$$

Эта запись не вполне корректна, но часто бывает удобной.

(20) Элемент W, удовлетворяющий системе уравнений (51), является линеаризацией нелокальной переменной, определяемой системой (49): $W = \ell_w(S)$. Поэтому для вектор-функций вида (50) равенство (48) превращается в

$$\{\Phi, \Phi\} = -2 \sum_\beta \left(\ell^w_{\varphi^\alpha}(d_{\mathscr{C}}\varphi^\beta) + \ell^{q^\beta_\sigma}_{\varphi^\alpha}(d_{\mathscr{C}}\varphi^\beta) + \ell^{u^\beta_\sigma}_{\varphi^\alpha}(\varphi^\beta)\right), \tag{52}$$

где $\ell^w_{\varphi^\alpha} = b^\alpha \ell_w$.

Предложение 20. *Пусть нелокальный оператор рекурсии $\mathscr{R}$ определяется вектор-функцией вида (50), удовлетворяющей равенству (52). Тогда, если $S_0 \in \operatorname{sym}\mathscr{E}$, $[S_0, \mathscr{R} = 0$ и $S_k = \mathscr{R}^k(S_0)$ — локальные симметрии, то все S_k попарно коммутируют.*

(21) В качестве простейшего примера рассмотрим уравнение Бюргерса.

Пример 14. Касательное накрытие уравнения Бюргерса задаётся соотношениями

$$u_t = uu_x + u_{xx}, \qquad q_t = u_x q + uq_x + q_{xx}. \tag{53}$$

Поскольку $\ell_{\mathscr{E}} = D_t - u_x - uD_x - D_x^2$, сопряжённый оператор имеет вид

$$\ell_{\mathscr{E}}^* = -D_t + uD_x - D_x^2,$$

и функция $\psi = 1$ является косимметрией (и, более того, производящей функцией закона сохранения $\omega = u\,dx + \left(\frac{1}{2}u^2 + u_x\right)\,dt$). Этой косимметрии соответствует накрытие

$$w_x = q, \qquad w_t = uq + q_x \tag{54}$$

над касательным уравнением.

Рассмотрим уравнение

$$\tilde{\ell}_{\mathscr{E}}(\Phi) \equiv \tilde{D}_t(\Phi) - u_x\Phi - u\tilde{D}_x(\Phi) - \tilde{D}_x^2(\Phi) = 0$$

где

$$\Phi = a_1 q_x + a_0 q + bw, \qquad a_0, a_1, b \in \mathscr{F}(\mathscr{E}).$$

В силу соотношений (53) и (54) это уравнение сводится к системе

$$\begin{array}{lcl} D_t(b) & = & u_x b + uD_x(b) + D_x^2(b), \\ D_t(a_0) & = & uD_x(a_0) + D_x^2(a_0) + 2D_x(b) - u_{xx}a_1, \\ D_t(a_1) & = & -u_x a_1 + uD_x(a_1) + D_x^2(a_1) + 2D_x(a_0), \\ D_x(a_1) & = & 0. \end{array} \tag{55}$$

Заметим, что первое уравнение означает, что b — симметрия.

Решив задачу 122, мы найдём два оператора рекурсии — тождественный и[3] и

$$\mathscr{R} = D_x + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u_x D_x^{-1}.$$

Покажем, что оператор $\mathscr{R}$ — наследственный.

Вычислим тензор Нийенхейса этого оператора. Поскольку $d_{\mathscr{C}}u_i = q_i$ и $d_{\mathscr{C}}q_i = 0$, имеем

$$d_{\mathscr{C}}(\Phi) = d_{\mathscr{C}}\left(q_x + \frac{1}{2}uq + \frac{1}{2}u_x w\right) = \frac{1}{2}q_x w + \frac{1}{2}u_x\,d_{\mathscr{C}}(w),$$

т.к. $q \cdot q = 0$ в силу нечётности переменной q. Применяя оператор $d_{\mathscr{C}}$ к первому из уравнений системы (54), получаем

$$d_{\mathscr{C}}(w_x) = d_{\mathscr{C}}D_x(w) = D_x(d_{\mathscr{C}}w)d_{\mathscr{C}}(q) = 0.$$

Из задачи 123 следует, что $d_{\mathscr{C}}(w) = 0$, и, значит,

$$d_{\mathscr{C}}(\Phi) = \frac{1}{2}q_x w.$$

Поэтому

[3] Ещё раз подчеркнём, что запись D_x^{-1} — всего лишь удобное обозначение.

$$\{\Phi, \Phi\} = -\left(D_x + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u_x D_x^{-1}\right)(q_x w) -$$
$$- (q + wD_x)\left(q_x + \frac{1}{2}uq + \frac{1}{2}u_x w\right).$$

Но

$$(qw)_x = q_x w + q w_x = q_x w + qq = q_x w,$$

т.е.

$$D_x^{-1}(q_x w) = qw,$$

так что

$$\{\Phi, \Phi\} = -\left(q_{xx} w + q_x q + q q_x + w q_{xx} + \frac{1}{2} qq\right) -$$
$$- \frac{1}{2}u\,(q_x w + w q_x) - \frac{1}{2}u_x\,(qw + qw + wq + wq) - \frac{1}{2}u_{xx} ww,$$

что что равно нулю в силу нечётности перемнных q_i и w.

(22) Заметим, что ключевым моментом проделанных выкладок является возможность однозначного вычисления значения картановского диффереціала $d_{\mathscr{C}}$ на нелокальной переменной w. Эта возможность зависит от некоторых когомологических инвариантов рассматриваемого уравнения, которые будут рассмотрены в следующем семестре.

(23) Сделаем ещё одно, последнее, замечание. Уравнение $\widetilde{\mathscr{T}\mathscr{E}}$, заданное системой (54), является накрытием τ касательного уравнения. Рассмотрим второй экземпляр касательного накрытия с нечётной переменной q'. Тогда равенство

$$q' = q_x + \frac{1}{2}uq + \frac{1}{2}u_x w$$

определяет другое накрытие $\tau' \colon \widetilde{\mathscr{T}\mathscr{E}} \to \mathscr{T}\mathscr{E}$. Таким образом, оператор рекурсии — это диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & \widetilde{\mathscr{T}\mathscr{E}} \arrow[dl, "\tau'"'] \arrow[dr, "\tau"] & \\
\mathscr{T}\mathscr{E} & & \mathscr{T}\mathscr{E}\,,
\end{tikzcd}$$

т.е. авто-преобразование Беклунда касательного накрытия. По-видимому, это самое общее определение операторов рекурсии для симметрий.

Задачи

Задача 104. Докажите, что касательное накрытие регулярного уравнения является h-регулярным.

Задача 105. Докажите, что алгебра $\mathscr{Rec}(\mathscr{E})$ для уравнения теплопроводности порождена операторами $\mathscr{R}_1^0$ и $\mathscr{R}_1^1$ из примера 13 и изоморфна универсальной обёртывающей трёхмерной алгебры Гейзенберга.

Задача 106. Вычислите алгебру $\mathscr{Rec}(\mathscr{E})$ для двумерного волнового уравнения $u_{xy} = 0$.

Задача 107. Вычислите алгебру $\mathscr{Rec}(\mathscr{E})$ для двумерного уравнения Лапласа $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Задача 108. Докажите, что любое Δ-накрытие линейно. В частности, линейным является касательное накрытие.

Задача 109. Докажите, что накрытие линейно тогда и только тогда, когда в локальных координатах хвосты $Y_i = \sum_\alpha Y_i^\alpha \partial/\partial w^\alpha$ таковы, что коэффициенты Y_i^α линейны по переменным w^j.

Задача 110. Докажите предложение 14.

Задача 111. Докажите, что равенство (42) определяет градуированную симметрию касательного накрытия.

Задача 112. Опишите коммутатор теней в алгебре $\operatorname{shad}\mathscr{E}$ в координатах.

Задача 113. Пусть $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1)$ и $\psi = (\psi_0, \psi_1)$ — производящие сечения симметрий касательного накрытия (см. доказательство предложения 16). Опишите в координатах их скобку Якоби.

Задача 114. Докажите предложение 17.

Задача 115. Докажите равенство (44).

Задача 116. Рассмотрим систему эволюционных уравнений

$$u_t^j = f(x, u^1, \dots, u^j, \dots, u_k^1, \dots, u_k^j), \qquad j = 1, \dots, m, \quad k > 1.$$

Докажите, что если определитель матрицы $\left(\dfrac{\partial f^\alpha}{\partial u_k^\beta}\right)$ не равен нулю, т.е. символ правой части невырожден, то все решения уравнений $\tilde{\ell}_{\mathscr{E}}(\varphi) = 0$, $\varphi \in \Lambda_v^j(\mathscr{E})$, тривиальны при $j > 1$. Таким образом, все локальные операторы рекурсии у рассматриваемых уравнений являются наследственными.

Задача 117. Пусть Φ — тень градуировки 1 и $\mathscr{R}_\Phi$ — соответствующий оператор рекурсии. Докажите, что

$$\mathrm{i}_{\mathbf{E}_\varphi}(\Phi) = \mathbf{E}_{\mathscr{R}_\Phi(\varphi)},$$

т.е. действие операторов рекурсии на симметрии фактически сводится к операции подстановки в соответствующую форму.

Задача 118. Пользуясь свойствами вариационной скобки Нийенхейса (предложение 17), докажите тождество (47).

Задача 119. Докажите, что любое накрытие τ вида ассоциировано с некоторой косимметрией ψ_τ уравнения $\mathscr{E}$ в силу предложения 7.

Задача 120. Докажите предложение 19.

Задача 121. Докажите предложение 20.

Задача 122. Покажите, что базисом решений системы (55) являются функции

$$b = 0, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 0$$

и

$$b = \frac{1}{2}u_x, \quad a_0 = \frac{1}{2}u, \quad a_1 = 1.$$

Задача 123. Докажите, что что оператор D_x, ограниченный на пространство линейных по q_i функций, имеет нулевое ядро.

Задача 124. Докажите, что оператор

$$\mathscr{R} = uD_x + u^2u_{xx}D_x^{-1} \circ u^{-2}$$

является оператором рекурсии для уравнения диффузии

$$u_t = u^2u_{xx}$$

и вычислите его тензор Нийенхейса.

Задача 125. Вычислите тензор Нийенхейса оператора Ленарда (п. 13 лекции 4), являющегося оператором рекурсии для симметрий уравнения КдФ.

Задача 126. Докажите, что оператор

$$\mathscr{R} = D_x^2 + \frac{2}{3}u_x^2 - \frac{2}{3}u_xD_x^{-1} \circ u_{xx}$$

является оператором рекурсии для потенциального модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза

$$u_t = u_{xxx} + \frac{1}{3}u_x^3.$$

Вычислите его тензор Нийенхейса.

Задача 127. Докажите, что оператор

$$\mathscr{R} = D_x^3 + u_x^2 - u_xD_x^{-1}u_{xx}$$

является оператором рекурсии для уравнения синус Гордона

$$u_{xy} = \sin u$$

и вычислите тензор Нийенхейса этого оператора.

Задача 128. Обобщением уравнения диффузии (задача 124) является система

$$\begin{cases} u_t &= u_{xx} + v^2, \\ v_t &= v_{xx}. \end{cases}$$

Докажите, что оператор

$$\mathscr{R} = \begin{pmatrix} D_x & vD_x^{-1} \\ 0 & D_x \end{pmatrix}$$

является оператором рекурсии для симметрий этой системы и вычислите его тензор Нийенхейса.

Список литературы

[1] Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В. *Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений.* М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 336 с.

[2] Виноградов А.М., Красильщик И.С. (Ред.) *Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики.* Серия: XX век. Математика и механика, Факториал, 2005, Вып. 9, Изд. 2. 380 с.

[3] I.S. Krasil'shchik and A.M. Verbovetsky, *Homological methods in equations of mathematical physics,* Open Education & Sciences, Opava, 1998, `arXiv:math/9808130`

[4] Красильщик И.С. *Линейные дифференциальные операторы над коммутативными алгебрами и геометрия пространств джетов.* Независимый московский университет. Осенний семестр 2015–2016 гг. `http://gdeq.org/files/IUM-lectures-2015.pdf`