И.С. Красильщик

Линейные дифференциальные операторы над коммутативными алгебрами и геометрия пространств джетов

Независимый московский университет
Осенний семестр 2015–2016 гг.

Предуведомление. Здесь — краткое содержание лекций и задачи к ним[1]. Распределение материала по лекциям не всегда полностью соответствует видеоверсии.

Текст обновляется по мере чтения лекций. Вопросы можно посылать на мою почту.

Содержание

[1]Я благодарени Даше Поляковой за внимательное чтение. Без её замечаний этот текст содержал бы значительно больше опечаток и несоответствий.

Лекция 1 (09.09.2015)

Основные функторы дифференциального исчисления

(1) Этот курс посвящён дифференциальному исчислению в категории модулей над коммутативными алгебрами и геометрической реализации этого исчисления — простейшей геометрии расслоений джетов конечного порядка и дифференциальных уравнений как подмногообразий этих многообразий.

(2) Чтобы понимать дальнейшее и решать задачи, необходимы самые элементарные знания, включающие в себя:
- основные понятия теории категорий (категории, функторы, естественные преобразования, представимость);
- основы коммутативной алгебры (алгебры над полями, модули и идеалы);
- начала дифференциальной геометрии (гладкие многообразия и отображения, векторные расслоения, векторные поля, дифференциальные формы);
- алгебры и группы Ли.

(3) Пусть $\Bbbk$ — поле и A — коммутативная, ассоциативная $\Bbbk$-алгебра с единицей. Назовём $\Bbbk$-точкой алгебры A произвольный эпиморфизм $p\colon A \to \Bbbk$ и обозначим множество таких точек через $|A|$. Всякий элемент $a \in A$ можно понимать как функцию $|A| \to \Bbbk$, полагая $a(p) = p(a)$.

(4) Множество $|A|$ превращается в топологическое пространство, если ввести в нём топологию Зарисского: базой замкнутых множеств в $|A|$ являются множества нулей функций, определённых в п. 3.

(5) Важнейшим мотивирующим примером является случай $\Bbbk = \mathbb{R}$ и $A = C^\infty(M)$, где M — гладкое многообразие. Как показавает задача 3, алгебра A в этом случае содержит всю информацию о многообразии M.

(6) Более того: зафиксируем гладкое конечномерное многообразие M и рассмотрим две категории: (а) $\mathscr{PM}od(C^\infty(M))$, объекты которой суть проективные модули конечного типа над $C^\infty(M)$, а морфизмы — их гомоморфизмы и (б) $\mathscr{V}ect(M)$, объектами которой являются конечномерные локально-тривиальные расслоения над многообразием M, а морфизмами — их морфизмы. Эти категории изоморфны (задача 4), и изоморфизм осуществляется функтором $\pi \Rightarrow \Gamma(\pi)$, сопоставляющим расслоению $\pi\colon E \to M$ модуль его сечений $\Gamma(\pi)$.

(7) Идентичность алгебраической (категория $\mathscr{PM}od(C^\infty(M))$) и геометрической (категория $\mathscr{V}ect(M)$) точек зрения ведёт к тому, что многие конструкции, имеющие, на первый взгляд, существенно дифференциально-геометрическую природу, находят точные аналоги в алгебре.

Пример 1 (векторные поля и дифференцирования)**.** Хорошо известно, что касательный вектор в точке x многообразия M можно понимать как дифференцирование из алгебры гладких функций, определённых в окрестности этой точки, в поле констант $\mathbb{R}$. Поэтому векторное поле X на M — это дифференцирование $C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, т.е. $\mathbb{R}$-линейное отображение, удовлетворяющее правилу Лейбница. Верно и обратное (задача 5). Поэтому векторным полем на пространстве $\Bbbk$-точек $\Bbbk$-алгебры A естественно назвать такое $\Bbbk$-линейное отображение $X\colon A \to A$, что $X(ab) = aX(b) + bX(a)$ для любых a, $b \in A$.

Этот пример имеет глубокие обобщения.

(8) Зафиксируем $\Bbbk$-алгебру A и рассмотрим A-модули P и Q. Будучи A-модулями, они также являются и векторными пространствами над полем $\Bbbk$. Гомоморфизм $\Delta \in \hom_\Bbbk(P, Q)$ называется дифференциальным оператором порядка $\le k$, если для любых элементов $a_0, \dots, a_k \in A$ выполнено равенство

$$(\delta_{a_0} \circ \cdots \circ \delta_{a_k})(\Delta) = 0, \tag{1}$$

где $\delta_a \varphi = a \circ \varphi - \varphi \circ a$.

Очевидно, дифференциальные операторы, действующие в пространствах гладких вектор-функций удовлетворяют равенству (1). Из задачи 6 следует и обратное.

(9) Множество всех дифференциальных операторов порядка $\le k$, действующих из P в Q, является A-бимодулем, который обозначается через $\mathrm{Diff}_k^{(+)}(P, Q)$. Первая модульная структура имеет вид $(a\Delta)(b) = a(\Delta b)$, вторая — $(a^+\Delta)(b) = \Delta(ab)$. Если рассматривается только первая структура, то мы пишем $\mathrm{Diff}_k(P, Q)$, если только вторая, то — $\mathrm{Diff}_k^+(P, Q)$. В случае, когда $P = A$, мы используем обозначение $\mathrm{Diff}_k^{(+)}(Q)$.

(10) Очевидные бимодульные вложения $\mathrm{Diff}_k^{(+)}(P, Q) \subset \mathrm{Diff}_{k+1}^{(+)}(P, Q)$ позволяют определить фильтрованный бимодуль

$$\mathrm{Diff}_*^{(+)}(P, Q) = \cup_{k \ge 0} \mathrm{Diff}_k^{(+)}(P, Q);$$

при этом, очевидно, $\mathrm{Diff}_0^{(+)}(P, Q) = \hom_A(P, Q)$.

(11) В силу задачи 9 имеет место отбражение композиции

$$\mathrm{Diff}_*^+(Q, R) \otimes_A \mathrm{Diff}_*(P, Q) \to \mathrm{Diff}_*(P, R),$$

согласованное с фильтрацией.

(12) Рассмотрим в модуле $\mathrm{Diff}_1(P)$ подмодуль

$$D(P) = \{\, X \in \mathrm{Diff}_1(P) \mid X(1) = 0 \,\}.$$

Его элементы называются P-значными дифференцированиями и удовлетворяют правилу Лейбница: $X(ab) = aX(b) + bX(a)$.

(13) Соответствие $P \Rightarrow D(P)$ является функтором и категории $\mathscr{M}od(A)$ в себя, а соответствия $(P,Q) \Rightarrow \operatorname{Diff}_k^{(+)}(P,Q)$ — бифункторами из этой категории в категорию бимодулей над A. Дальше мы увидим, что все эти функторы представимы.

Задачи

Задача 1. Покажите, что соответствие $A \Rightarrow |A|$ является функтором из категории $\Bbbk$-алгебр в категорию топологических пространств.

Задача 2. Если M — компактное многообразие, то любой максимальный идеал алгебры $C^\infty(M)$ имеет вид $\mu_x = \{\, f \in C^\infty(M) \mid f(x) = 0 \,\}$, $x \in M$. В некомпактном случае это не так. Постройте контрпример.

Задача 3. Покажите, что если пространства $C^\infty(M)$ и M, где M — гладкое конечномерное многообразие, гомеомеорфны. Как, зная $C^\infty(M)$, восстановить гладкую структуру многообразия?

Задача 4. Покажите, что категории $\mathscr{PM}od(C^\infty(M))$ и $\mathscr{V}ect(M)$ изоморфны.

Задача 5. Покажите, что всякому дифференцированию алгебры функций $C^\infty(M)$ соответствует векторное поле на многообразии M.

Задача 6. Пусть $A = C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $x^1, \dots, x^n$ — координаты в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим A-модули P и Q гладких вектор-функций $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ соответственно. Докажите, что любое $\mathbb{R}$-линейное отображение из P в Q, удовлетворяющее равенству (1), имеет вид $\Delta = (\Delta_i^j)$, где Δ — $p \times q$-матрица с элементами

$$\Delta_i^j = \sum_{|\sigma| \le k} f_{i,\sigma}^j \frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial x^\sigma},$$

где $f_{i,\sigma}^j \in A$.

Задача 7. Пусть $A = C^0(\mathbb{R}^1)$ — алгебра непрерывных функций на прямой. Опишите $\operatorname{Diff}_*(A)$.

Задача 8. Пусть A — $\Bbbk$-алгебра и P, Q — A-модули. Докажите, что тождественные отображения

$$\mathrm{id}\colon \operatorname{Diff}_k(P,Q) \to \operatorname{Diff}_k^+(P,Q), \quad \mathrm{id}\colon \operatorname{Diff}_k^+(P,Q) \to \operatorname{Diff}_k(P,Q)$$

являются дифференциальными операторами порядка $\le k$.

Задача 9. Пусть $\Delta \in \operatorname{Diff}_k^{(+)}(P,Q)$, $\nabla \in \operatorname{Diff}_l^{(+)}(Q,R)$. Докажите, что композиция этих операторов является дифференциальным оператором порядка $\le k + l$.

Задача 10. Мы привыкли к тому, что любой дифференциальный оператор можно построить из дифференцирований и функций, т.е. алгебра $\operatorname{Diff}_*(C^\infty(\mathbb{R}^n))$ порождается элементами из $\operatorname{Diff}_1(C^\infty(\mathbb{R}^n))$. Для произвольной алгебры это не так. Постройте контрпример.

Более сложный вопрос: какие условия на алгебру A обеспечивают порождаемость всех операторов операторами первого порядка?

Задача 11. Пусть A — $\mathbb{R}$-алгебра линейных дифференциальных операторов $\Delta\colon C^\infty(\mathbb{R}^1) \to C^\infty(\mathbb{R}^1)$ с постоянными коэффициентами.

(1) Опишите $|A|_\mathbb{R}$.
(2) Опишите $\operatorname{Diff}_*(A)$.

Задача 12. Рассмотрим $\mathbb{R}$-алгебру полиномиальных функций на кресте $A = \mathbb{R}[x,y]/(xy)$.

(1) Опишите $|A|_\mathbb{R}$.
(2) Опишите $\operatorname{Diff}_*(A)$.

Задача 13. Пусть m и $n > 1$ — натуральные и $A = \mathbb{Z}_n[x]/(x^m)$.

(1) Опишите $|A|_{\mathbb{Z}_n}$.
(2) Опишите $\operatorname{Diff}_*(A)$.

Задача 14. Рассмотрим идеал $I_{\text{cmp}} \subset C^\infty(\mathbb{R})$, состоящий из функций с компактным носителем. Опишите пространство $|A|_\mathbb{R}$, где $A = C^\infty(\mathbb{R})/I_{\text{cmp}}$.

Лекция 2 (16.09.2015)

Символы

(1) Напомним и зафиксируем обозначения:
- Всюду ниже $\Bbbk$ — поле, A — $\Bbbk$-алгебра,
$$|A|_\Bbbk = \{\, \varphi\colon A \to \Bbbk \mid \varphi \text{ — эпиморфизм} \,\}$$
— пространство $\Bbbk$-точек.
- $\operatorname{Diff}_k^{(+)}(P,Q) = \{\, \Delta \in \hom_\Bbbk(P,Q) \mid (\delta_{a_0} \circ \dots \circ \delta_{a_k})(\Delta) = 0 \,\}$ — бимодуль дифференциальных операторов порядка $\le k$.
- В частности, $\operatorname{Diff}_k^{(+)}(P) = \operatorname{Diff}_k^{(+)}(A,P)$.
- $\operatorname{Diff}_*^{(+)}(P,Q) = \cup_{k\ge 0} \operatorname{Diff}_k^{(+)}(P,Q)$
- $D(P) = \{\, X \in \hom_\Bbbk(A,P) \mid X(ab) = aX(b) + bX(a) \,\} \subset \operatorname{Diff}_1(P)$ — модуль P-значных дифференцирований.

(2) $\operatorname{Diff}_*^{(+)}(P,P)$ — ассоциативная алгебра с фильтрацией относительно композиции дифференциальных операторов, $\operatorname{Diff}_*^{(+)}(P,Q)$ — левый $\operatorname{Diff}_*^{(+)}(P,P)$- и правый $\operatorname{Diff}_*^{(+)}(Q,Q)$-модуль с фильтрацией. При этом $a(\Delta\cdot\nabla) = (a\Delta)\cdot\nabla$, $a^+(\Delta\cdot\nabla) = \Delta\cdot(a^+\nabla)$, $(a^+\Delta)\cdot\nabla = \Delta\cdot(a\nabla)$.

(3) Соответствующий градуированный объект $\operatorname{Smbl}_*(P,Q) = \oplus_{k=0}^\infty \operatorname{Smbl}_k(P,Q)$, где $\operatorname{Smbl}_k(P,Q) = \operatorname{Diff}_k^{(+)}(P,Q)/\operatorname{Diff}_{k-1}^{(+)}(P,Q)$ называется модулем символов. Если $\Delta \in \operatorname{Diff}_k^{(+)}(P,Q)$ то класс смежности $\sigma_k(\Delta) \in \operatorname{Smbl}_k(P,Q)$ называется его символом. Если $s = \sigma_k(\Delta) \in \operatorname{Diff}_k^{(+)}(P,Q)$ и $s' = \sigma_{k'}(\Delta') \in \operatorname{Diff}_{k'}^{(+)}(Q,R)$, то по определению $s'\cdot s = \sigma_{k+k'}(\Delta'\circ\Delta)$

(4) Рассмотрим коммутативную алгебру $S = \mathrm{Smbl}_*(A)$ (задача 16). Пусть $s = \sigma_k(\Delta) \in \mathrm{Smbl}_k(A)$ и $s' = \sigma_{k'}(\Delta') \in \mathrm{Smbl}_{k'}(A)$. Определим скобку Пуассона $\{s, s'\} = \sigma_{s+s'-1}(\Delta \circ \Delta' - \Delta' \circ \Delta)$. Она $\Bbbk$-линейна, кососимметрична и удовлетворяет тождеству Якоби.

(5) Скобка Пуассона определяет отображение $\partial\colon S \to D(S)$, $s \mapsto \{s, \cdot\}$, являющееся $D(S)$-значным дифференцированием. Его ядро $\ker\partial = H^0_P(S)$ называется пуассоновым центром, а элементы ядра — казимирами пуассоновой структуры. Элементы образа $X_s = \{s, \cdot\}$ — это гамильтоновы векторные поля. В силу тождества Якоби $X_{\{s,s'\}} = [X_s, X_{s'}]$.

Дифференцирование $X \in D(S)$ — симметрия пуассоновой структуры, если $X\{s, s'\} = \{X(s), s'\} + \{s, X(s')\}$, и можно определить группу $H^1_P(S) = \{\text{симметрии}\}/\operatorname{im}\partial$

(6) Вот ещё ситуация, в которой возникают пуассоновы структуры: пусть $\mathfrak{g}$ — $\Bbbk$-алгебра Ли и $U(\mathfrak{g})$ — её универсальная обёртывающая. Тогда в присоединённой градуированной алгебре $S(\mathfrak{g})$ определяется естественная пуассонова структура.

В дальнейшем мы построим когомологическую теорию, в которой $H^0_P(S)$ и $H^1_P(S)$ окажутся нулевой и первой группами когосологий.

Задачи

Задача 15. Докажите, что при переходе к символам бимодульная структура в $\mathrm{Diff}^{(+)}_k(P, Q)$ сливается в одну.

Задача 16. Докажите, что алгебра $\mathrm{Smbl}_*(A)$ коммутативна.

Задача 17. Опишите алгебры $\mathrm{Smbl}_*(A)$ и пространства $|\mathrm{Smbl}_*(A)|_\Bbbk$ для алгебр A из задач 11–13.

Задача 18. Докажите, что в случае $A = C^\infty(M)$ алгебра $\mathrm{Smbl}_*(A)$ совпадает с алгеброй гладких функций на T^*M, полиномиальных по слоям.

Задача 19. Докажите, что если $A = C^\infty(M)$, то $H^1_P(S)$ изоморфна первой группе когомологий де Рама многообразия M.

Задача 20. Пусть $X \in D(A) \subset \mathrm{Diff}_1(A)$. Положим $\rho(X) = \sigma_1(X) \in \mathrm{Smbl}_1(A)$. Докажите, что при $A = C^\infty(M)$ эта конструкция даёт каноническую форму $p\,dq$ на T^*M.

Задача 21. Рассмотрим случай $\operatorname{char}\Bbbk = 0$. Пусть $a \in A$, $s = \sigma_k(\Delta) \in \mathrm{Smbl}_k(A)$. Определим $\varphi_a\colon \mathrm{Smbl}_k(A) \to A$, полагая $\varphi_a(s) = \frac{1}{k!}\delta^k_a(\Delta)$. Докажите, что

(1) $\varphi_a(ss') = \varphi_a(s)\varphi_a(s')$.
(2) Если $A = C^\infty(M)$, то $\varphi_a = \psi^*_{da}$, где $\psi_{da}\colon M \to T^*M$ — сечение, соответствующее форме da.

Задача 22. Вычислите $H^1_P(\mathfrak{g})$ (см. п. 6), если

(1) $\mathfrak{g}$ — двумерная разрешимая алгебра Ли.

(2) $\mathfrak{g} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & k_{12} & k_{13} \\ 0 & 0 & k_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right) \mid k_{ij} \in \Bbbk \right\}$ — алгебра Гейзенберга.
(3) $\mathfrak{g}$ полупростая.

Лекция 3 (23.09.2015)

Представляющие объекты

(1) Пусть Q — A-модуль. Определим отображение $\square_k \colon \mathrm{Diff}_k^+(Q) \to Q$, полагая $\square_k(\Delta) = \Delta(1)$.

Предложение 1. *Оператор $\square_k$ является дифференциальным оператором порядка $\leq k$ и обладает следующим универсальным свойством: для любого $\Delta \in \mathrm{Diff}_k(P, Q)$ найдётся такой единственный гомоморфизм ψ_Δ, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[rr, "\Delta"] \arrow[dr, "\psi_\Delta"'] & & Q \\
& \mathrm{Diff}_k^+(Q) \arrow[ur, "\square_k"'] &
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Таким образом, функтор $\mathrm{Diff}_k(\bullet, Q) \colon P \Rightarrow \mathrm{Diff}_k^{(+)}(P, Q)$ представим.

(2) Зафиксируем модуль P и рассмотрим тензорное произведение $A \otimes_\Bbbk P$. Пусть $\delta_a(b \otimes p) = ab \otimes p - b \otimes ap$, a, $b \in A$, $p \in P$; определим модуль k-джетов $\mathscr{J}^k(P) = A \otimes_\Bbbk P / \operatorname{im}(\delta_{a_0} \circ \cdots \circ \delta_{a_k})$ и $j_k(p) = p \bmod \operatorname{im}(\delta_{a_0} \circ \cdots \circ \delta_{a_k}) \in \mathscr{J}^k(P)$.

Предложение 2. *Оператор j_k является дифференциальным оператором порядка $\leq k$ и обладает следующим универсальным свойством: для любого $\Delta \in \mathrm{Diff}_k(P, Q)$ найдётся такой единственный гомоморфизм ψ_k^Δ, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[rr, "\Delta"] \arrow[dr, "j_k"'] & & Q \\
& \mathscr{J}^k(P) \arrow[ur, "\psi_k^\Delta"'] &
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Итак, функтор $\mathrm{Diff}_k(P, \bullet) \colon Q \Rightarrow \mathrm{Diff}_k(P, Q)$ представим. Соответствие соответствие $\mathscr{J}^k_{(+)} \colon P \Rightarrow \mathscr{J}^k_{(+)}(P)$ — функтор из категории A-модулей в категорию A-бимодулей.

(3) Поскольку всякий оператор порядка $\le k$ есть оператор порядка $\le k+l$, имеют место коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd} \mathscr{J}^{k+l}(P) \arrow[rr, "\nu_{k+l,k}=\psi^{j_k}_{k+l}"] & & \mathscr{J}^{k}(P) \\ & P \arrow[ul, "j_{k+l}"] \arrow[ur, "j_k"'] & \end{tikzcd}$$

Поэтому можно определить модуль $\mathscr{J}^{\infty}(P)$ бесконечных джетов как обратный предел и оператор $j_\infty\colon P \to \mathscr{J}^{\infty}(P)$.

(4) Композиция $j_l \circ \Delta\colon P \to \mathscr{J}^{l}(Q)$ называется l-м (джет-) продолжением оператора Δ. Таким образом, есть коммутативная диаграмм

$$\begin{tikzcd} \mathscr{J}^{k+l}(P) \arrow[r, "\psi^{\Delta}_{k+l}"] & \mathscr{J}^{l}(Q) \\ P \arrow[u, "j_{k+l}"] \arrow[r, "\Delta"] & Q, \arrow[u, "j_l"'] \end{tikzcd}$$

где $\psi^{\Delta}_{k+l} = \psi^{j_l\circ\Delta}_{k+l}$. Из задачи 26 следует, что соответствие $\mathscr{J}^{\infty}\colon P \Rightarrow \mathscr{J}^{\infty}(P)$ можно понимать как функтор из категории $\mathscr{Diff}(A)$, объектами которой являются A-модули, а морфизмами — линейные дифференциальные операторы, в категорию $\mathscr{Mod}(\mathrm{Diff}_*(A))$.

(5) Пусть $i\colon A \to \mathscr{J}^{1}(A)$ — гомоморфизм, порождённый отображением $a \mapsto a \times 1 \in A \times_{\Bbbk} A$ и $\Lambda^1(A) = \operatorname{coker} i$ (модуль 1-форм). Определим $d\colon A \to \Lambda^1(A)$ (дифференциал де Рама)как композицию $j_1\colon A \to \mathscr{J}^{1}(A)$ с естественной проекцией $\mathscr{J}^{1}(A) \to \Lambda^1(A)$.

Предложение 3. *Дифференциал де Рама является дифференцированием алгебры A со значениями в модуле $\Lambda^1(A)$, обладающим следующим свойством: для любого A-модуля P и дифференцирования $X \in D(P)$ найдётся единственный гомоморфизм ψ_X, для которого диаграмма*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "X"] \arrow[dr, "d"'] & & P \\ & \Lambda^1(A) \arrow[ur, "\psi_X"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Таким образом, функтор $D\colon P \Rightarrow D(P)$ представим в категории A-модулей и $D(P) = \hom_A(\Lambda^1(A), P)$.

(6) Рассмотрим свободный A-модуль с образующими d_a, $a \in A$, и соотношениями

$$d_{a+b} = d_a + d_b, \quad d_{\alpha a} = \alpha d_a, \quad d_{ab} = a d_b + b d_a, \qquad a, b \in A, \quad \alpha \in \Bbbk.$$

Это эксплицитное описание модуля 1-форм, причём $d(a) = d_a$.

(7) Определим модули i-форм как внешние степени $\Lambda^i(A) = \underbrace{\Lambda^1(A) \wedge \dots \wedge \Lambda^1(A)}_{i \text{ раз}}$, $i \geq 0$, и комплекс де Рама алгебры A

$$A \xrightarrow{d} \Lambda^1(A) \longrightarrow \dots \longrightarrow \Lambda^i(A) \xrightarrow{d} \Lambda^{i+1}(A) \longrightarrow \dots,$$

полагая

$$d(a\,da_1 \wedge \dots \wedge da_i) = da \wedge da_1 \wedge \dots \wedge da_i.$$

Очевидно, $d \circ d = 0$.

(8) Пусть P — A-модуль. Значением P в точке $\theta \in |A|_{\Bbbk}$ называется фактор $P_\theta = P/(\ker\theta \cdot P)$, а значением элемента $p \in P$ — его класс $p(\theta) \in P_\theta$. Элемент называется невидимым, если его значения во всех точках тривиальны. Например, форма $de^x - e^x\,dx$ является невидимым элементом модуля $\Lambda^1(C^\infty(\mathbb{R}^1))$. По этой причине модуль 1-форм алгебры $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ не совпадает с модулем «геометрических» 1-форм на прямой.

Модуль называется геометрическим, если все его невидимые элементы тривиальны. Пусть $\mathscr{GM}od(A)$ — полная подкатегория, состоящая из геометрических A-модулей. Для каждого модуля P положим

$$\mathscr{G}P = P \Big/ \bigcap_{\theta \in |A|_{\Bbbk}} \ker\theta \cdot P\,.$$

Свойства соответствия $P \Rightarrow \mathscr{G}P$ рассмотрены в задаче 31.

Задачи

Задача 23. Докажите предложение 1.

Задача 24. Докажите предложение 2.

Задача 25. В $\mathscr{J}^k(P)$ две модульных структуры, порождаемые умножениями $a(b \otimes p) = (ab) \otimes p$ и $a^+(b \otimes p) = b \otimes (ap)$. Соответствующий бимодуль обозначается $\mathscr{J}^k_{(+)}(P)$. Докажите, что тождественные отображения $\mathrm{id} : \mathscr{J}^k(P) \to \mathscr{J}^k_+(P)$ и $\mathrm{id} : \mathscr{J}^k_+(P) \to \mathscr{J}^k(P)$ суть дифференциальные операторы порядка $\leq k$.

Задача 26. Пусть $\Delta\colon P \to Q$ — дифференциальный оператор порядка $\leq k$. Докажите, что:

(1) Диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{J}^{k+l+1}(P) \arrow[r, "\psi^\Delta_{k+l+1}"] \arrow[d, "\nu_{k+l+1,k+l}"'] & \mathscr{J}^{l+1}(Q) \arrow[d, "\nu_{l+1,l}"] \\
\mathscr{J}^{k+l}(P) \arrow[r, "\psi^\Delta_{k+l}"] & \mathscr{J}^{l}(Q)
\end{tikzcd}$$

коммутативна, т.е. определён гомоморфизм $\psi_*^\Delta\colon \mathscr{J}^\infty(P) \to \mathscr{J}^\infty(Q)$.

(2) Если $\nabla\colon Q \to R$ — ещё один дифференциальный оператор, то $\psi_*^{\nabla\circ\Delta} = \psi_*^\nabla \circ \psi_*^\Delta$.

Задача 27. Докажите предложение 3.

Задача 28. Хотелось бы, чтобы соответствие $A \Rightarrow \Lambda^1(A)$ было функтором. Откуда куда? Представим ли этот функтор?

Задача 29. Докажите утверждение, сформулированное в п. 6.

Задача 30. Опишите невидимые элементы модулей $\Lambda^1(C^\infty(M))$ и $\mathscr{J}^k(C^\infty(M))$.

Задача 31. Пусть A — $\Bbbk$-алгебра и P — A-модуль. Докажите следующие утверждения.

(1) Соответствие $P \Rightarrow \mathscr{G}P$ является функтором из категории $\mathscr{M}od(A)$ в $\mathscr{G}\mathscr{M}od(A)$.

(2) Функторы $D\colon P \Rightarrow D(P)$ и $\mathrm{Diff}_k(P,\cdot)\colon Q \Rightarrow \mathrm{Diff}_k(P,Q)$ представимы в категории геометрических модулей и их представляющими объектами являются модули $\mathscr{G}\Lambda^1(A)$ и $\mathscr{G}\mathscr{J}^k(P)$ соответственно.

(3) Если M — гладкое многообразие, то $\mathscr{G}\Lambda^1(C^\infty(M)) = \Lambda^1(M)$.

Задача 32. Пусть $\omega \in \Lambda^1(A)$ — произвольная 1-форма. Определите гомоморфизм $\varphi_\omega\colon \mathrm{Smbl}_*(A) \to A$, который обобщает гомоморфизм $1f_a$, построенный в задаче 21

Лекция 4 (30.09.2015)

Скобки Схоутена–Нийенхейса и пуассоновы алгебры

(1) Пусть P — A-модуль. Определим модули $D_i(P)$ полидиффренцирований, полагая $D_0(P) = P$, $D_1(P) = D(P)$ и

$$D_i(P) = \{\, X \in D(D_{i-1}(P)) \mid (X(a))(b) + (X(b))(a) = 0,\ a, b \in A \,\},$$

для всех $i > 1$.

Предложение 4. *Соответствие $P \Rightarrow D_i(P)$ является функтором и модуль $\Lambda^i(A)$ — его представляющий объект. Этот функтор представим и в категории геометрических модулей, и представляющим объектом является $\mathscr{G}\Lambda^1(A)$.*

(2) Пусть $X \in D_i(A)$, $Y \in D_j(P)$. Определим элемент $X \wedge Y \in D_{i+j}(P)$, полагая $X \wedge Y = X \cdot Y$, если $i = j = 0$, и по индукции

$$(X \wedge Y)(a) = X \wedge Y(a) + (-1)^j X(a) \wedge Y, \qquad i + j > 0.$$

Таким образом определённое внешнее умножение ассоциативно и кососоммутативно,

$$X \wedge Y = (-1)^{ij} Y \wedge X,$$

если $Y \in D_j(A)$.

(3) Определим операцию внутреннего умножения (подстановки)

$$\mathrm{i}\colon D_j(P) \otimes_A \Lambda^i(A) \to \begin{cases} P \otimes_A \Lambda^{i-j}(A), & j \le i, \\ D_{j-i}(P), & j \ge i, \end{cases}$$

полагая $\mathrm{i}(X \otimes a) = aX$ и далее по индукции

$$\mathrm{i}(X \otimes\, da \wedge \omega) = \mathrm{i}(X(a) \otimes \omega)$$

во всех случаях, когда $\deg X \ge \deg \omega$. Если $\deg X = j < \deg \omega = i$, то определим значение любого $Y \in D_{i-j}(A)$ на $\mathrm{i}(X, \omega)$, полагая

$$\langle Y, \mathrm{i}(X, \omega) \rangle = \mathrm{i}(Y \wedge X, \omega),$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает естественное спаривание между $D_{i-j}(A)$ и $P \otimes \Lambda^{i-j}(A)$. Мы будем использовать обозначения

$$\mathrm{i}_X(\omega) = \begin{cases} \mathrm{i}(X \otimes \omega), & i \ge j, \\ 0, & i < j, \end{cases}, \quad \mathrm{i}_\omega(X) = \begin{cases} \mathrm{i}(X \otimes \omega), & i \le j, \\ 0, & i > j. \end{cases}$$

(4) Пусть $X \in D_j(A)$. Определим производную Ли $\mathrm{L}_X\colon \Lambda^i(A) \to \Lambda^{i-j+1}(A)$ вдоль X, полагая $\mathrm{L}_X = [d, \mathrm{i}_X]$, где $[d, \mathrm{i}_X]$ — суперкоммутатор:

$$[d, \mathrm{i}_X] = \, d \circ \mathrm{i}_X - (-1)^j \mathrm{i}_X \circ\, d.$$

Теорема 1. *Для любых двух элементов $X \in D_i(A)$ и $Y \in D_j(A)$ существует такой элемент $[\![X, Y]\!] \in D_{i+j-1}(A)$, что*

$$[\mathrm{L}_X, \mathrm{L}_Y] = \mathrm{L}_{[\![X,Y]\!]}.$$

Это свойство определяет $[\![X, Y]\!]$ однозначно.

Набросок доказательства. Положим $[\![X, a]\!] = X(a)$, $[\![a, Y]\!] = (-1)^j Y(a)$, $a \in A$, и по индукции

$$[\![X, Y]\!](a) = [\![X, Y(a)]\!] + (-1)^{j-1} [\![X(a), Y]\!], \quad i, j > 0.$$

Далее см. задачу 37. □

Элемент $[\![X, Y]\!]$ называется скобкой Схоутена–Нийенхейса (или просто скобкой Схоутена) дифференцирований X и Y.

Предложение 5. *Пусть $X \in D_i(A)$, $Y \in D_j(A)$, $Z \in D_k(A)$. Тогда*

(a) $[\![X, Y]\!] + (-1)^{(i-1)(j-1)} [\![Y, X]\!] = 0$,
(b) $[\![X, [\![Y, Z]\!]]\!] = [\![[\![X, Y]\!], Z]\!] + (-1)^{(i-1)(j-1)} [\![Y, [\![X, Z]\!]]\!]$,
(c) $[\![X, Y \wedge Z]\!] = [\![X, Y]\!] \wedge Z + (-1)^{(i-1)j} Y \wedge [\![X, Z]\!]$,
(d) $[\![X, Y]\!] = [X, Y,]$, *если* $i = j = 1$,

(e) $\mathrm{i}_{[X,Y]} = (-1)^i[\mathrm{L}_X, \mathrm{i}_Y]$.

(5) С этого момента будем считать, что $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$.

Бидифференцирование $\mathscr{P} \in D_2(A)$ называется пуассоновой структурой, если $[\![\mathscr{P}, \mathscr{P}]\!] = 0$, а пара $(A, \mathscr{P})$ называется пуассоновой алгеброй. Определим скобку Пуассона $\{a, b\}_{\mathscr{P}} = \mathscr{P}(a, b)$, a, $b \in A$, и оператор $\partial_{\mathscr{P}}\colon D_i(A) \to D_{i+1}(A)$, полагая $\partial_{\mathscr{P}}(\Delta) = [\![\mathscr{P}, \Delta]\!]$.

Предложение 6. *Следующие утверждения эквивалентны*:
(a) $\mathscr{P}$ *— пуассонова структура*;
(b) *скобка* $\{\cdot, \cdot\}_{\mathscr{P}}$ *удовлетворяет тождеству Якоби*;
(c) $\partial_{\mathscr{P}}$ *— дифференциал, т.е.* $\partial_{\mathscr{P}} \circ \partial_{\mathscr{P}} = 0$.

Вследствие п. 5c предложения 6 возникает пуассонов комплекс

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow D(A) \longrightarrow \dots \longrightarrow D_i(A) \xrightarrow{\partial_{\mathscr{P}}} D_{i+1}(A) \longrightarrow \dots$$

Его когомологии обозначаются через $H^i(A; \mathscr{P})$ и называются пуассоновыми.

(6) Как и в п. 5 лекции 2, определим пуассонов центр алгебры A, полагая

$$Z_{\mathscr{P}}(A) = \{\, a \in A \mid \{a, b\}_{\mathscr{P}} = 0 \text{ для всех } b \in A \,\},$$

дифференцирования вида $X_a = \mathscr{P}(a)$ будем называть гамильтоновыми, а дифференцирования $X \in D(A)$, обладающими свойством

$$X\{a, b\}_{\mathscr{P}} = \{Xa, b\}_{\mathscr{P}} + \{a, Xb\}_{\mathscr{P}}, \qquad a, b \in A,$$

— инфинитезимальными симметриями пуассоновой структуры (или каноническими дифференцированиями). И те, и другие образуют алгебры Ли относительно коммутатора, которые обозначаются $\operatorname{Ham}(A; \mathscr{P})$ и $\operatorname{Can}(A; \mathscr{P})$ соответственно.

Теорема 2. *Пусть* $(A\mathscr{P})$ *— пуассонова алгебра.*
(a) $H^0(A; \mathscr{P})$ *совпадает с пуассоновым центром;*
(b) $H^1(A; \mathscr{P}) = \operatorname{Can}(A; \mathscr{P}) / \operatorname{Ham}(A; \mathscr{P})$*;*
(c) $H^2(A; \mathscr{P})$ *состоит из классов инфинитезимальных деформаций пуассоновой структуры* $\mathscr{P}$ *по модулю тривиальных;*
(d) $H^4(A; \mathscr{P})$ *содержит препятствия к продолжению инфинитезимальных деформаций до формальных.*

Задачи

Задача 33. Докажите предложение 4.

Задача 34. Докажите, что элемент $X \wedge Y$ действительно лежит в $D_{i+j}(P)$, а внешнее умножение обладает указанными в п. 2 свойствами.

Задача 35. Докажите, что если $Y \in D_j(P)$ и $\omega \in \Lambda^i(A)$ и $j > i$, то
$$\mathrm{i}(\mathrm{i}(X,\omega),\theta) = \langle X, \omega \wedge \theta \rangle$$
для любой формы $\theta \in \Lambda^{j-i}(A)$.

Задача 36. Определите понятие дифференциального оператора в категории модулей над кососкоммутативной алгеброй и докажите, что отображения $\mathrm{i}_\omega \colon D_*(P) \to D_*(P)$ и $\mathrm{i}_X \colon \Lambda^*(A) \to P \otimes_A \Lambda^*(A)$ являются дифференциальными операторами порядков i и j соответственно, где $\Lambda^*(A) = \oplus_{i \geq 0} \Lambda^i(A)$, $D_*(P) = \oplus_{j \geq 0} D_j(P)$, $\omega \in \Lambda^i(A)$, $X \in D_j(P)$.

Задача 37. Докажите теорему 1.

Задача 38. Докажите предложение 5.

Задача 39. Докажите предложение 6

Задача 40. Докажите теорему 2

Задача 41. Пуассонова структура $\mathscr{P}$ называется невырожденной, если определяемый ею гомоморфизм $\varphi_{\mathscr{P}} \colon \Lambda^1(A) \to D_1(A)$, $\varphi_{\mathscr{P}}(\omega) = \mathrm{i}_\omega(\mathscr{P})$, является изоморфизмом. Докажите, что

(1) 2-форма Ω, образом которой является бивектор $\mathscr{P}$, замкнута (т.е. A является симплектической алгеброй);
(2) изоморфизм $\varphi_{\mathscr{P}}$ продолжается до гомоморфизмов $\varphi_{\mathscr{P}}^{(i)} \colon \Lambda^i(A) \to D_i(A)$. Если $\Lambda^1(A)$ — проективный модуль, то их прямая сумма $\varphi_{\mathscr{P}}^{(*)} \colon \Lambda^*(A) \to D_*(A)$ является изоморфизмом внешних алгебр и тогда
(3) пуассоновы когомологии совпадают с когомологиями де Рама алгебры A.

Задача 42. В силу п. 4b предложения 38 пуассоновы когомологии наследуют скобку Схоутена. Докажите, что если структура $\mathscr{P}$ невырождена, то получаемая таким образом скобка тривиальна.

Задача 43. Используя подстановку $\mathrm{i}_{\mathscr{P}} \colon \Lambda^i(A) \to \Lambda^{i-2}(A)$, определите пуассонов дифференциал $d_{\mathscr{P}} \colon \Lambda^i(A) \to \Lambda^{i-1}(A)$. Опишите свойства возникающих таким образом пуассоновых гомологий.

Задача 44. Пусть $(A, \mathscr{P})$ — пуассонова алгебра и $\partial_{\mathscr{P}} \colon D_i(A) \to D_{i+1}(A)$ — её пуассонов дифференциал. Рассмотрим форму $\omega \in \Lambda^j(A)$ и положим $\mathrm{L}_\omega^{\mathscr{P}} = [\partial_{\mathscr{P}}, \mathrm{i}_\omega] \colon D_i(A) \to D_{i-j+1}(A)$. Докажите, что равенство
$$\mathrm{i}_{\{\!\{\omega,\theta\}\!\}_{\mathscr{P}}} = [\mathrm{L}_\omega^{\mathscr{P}}, \mathrm{i}_\theta], \qquad \omega \in \Lambda^j(A), \theta \in \Lambda^k(A),$$
корректно определяет скобку Пуассона $\{\!\{\omega, \theta\}\!\}_{\mathscr{P}} \in \Lambda^{j+k-1}(A)$ на дифференциальных формах, которая обладает следующими свойствами:

(1) $\{\!\{a, db\}\!\}_{\mathscr{P}} = -\{a, b\}_{\mathscr{P}}$,
(2) $\{\!\{ da, db\}\!\}_{\mathscr{P}} = d\{a, b\}_{\mathscr{P}}$,
(3) $\{\!\{\omega, \theta \wedge \rho\}\!\}_{\mathscr{P}} = \{\!\{\omega, \theta\}\!\}_{\mathscr{P}} \wedge \rho + (-1)^{(j-1)k} \theta \wedge \{\!\{\omega, \rho\}\!\}_{\mathscr{P}}$,

(4) $\{\!\{\omega, \{\!\{\theta, \rho\}\!\}_{\mathscr{P}}\}\!\}_{\mathscr{P}} =$
$$= \{\!\{\{\!\{\omega, \theta\}\!\}_{\mathscr{P}}, \rho\}\!\}_{\mathscr{P}} + +(-1)^{(j-1)(k-1)}\{\!\{\theta, \{\!\{\omega, \rho\}\!\}_{\mathscr{P}}\}\!\}_{\mathscr{P}},$$
(5) $\{\!\{\omega, \theta\}\!\}_{\mathscr{P}} + (-1)^{(j-1)(k-1)}\{\!\{\theta, \omega\}\!\}_{\mathscr{P}} = 0$,

(6) $\mathrm{L}^{\mathscr{P}}_{\{\!\{\omega,\theta\}\!\}_{\mathscr{P}}} = [\mathrm{L}^{\mathscr{P}}_{\omega}, \mathrm{L}^{\mathscr{P}}_{\theta}]$.

Всюду выше квадратные скобки обозначают градуированные коммутаторы.

Задача 45. Две пуассоновы структуры называются совместными, если $[\![\mathscr{P}, \mathscr{P}']\!] = 0$ (это, очевидно, эквивалентно тому, что $[\partial_{\mathscr{P}}, \partial_{\mathscr{P}'}] = 0$). Докажите следующий результат:

Теорема 3 (Схема Магри)**.** *Пусть $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}' \in D_2(A)$ — совместные пуассоновы структуры и $H^1(A; \mathscr{P}') = 0$. Предположим, что существуют такие элементы a_1, $a_2 \in A$, что $\partial_{\mathscr{P}}(a_1) = \partial_{\mathscr{P}'}(a_2)$. Тогда*:

(1) *Существуют элементы $a_3, \ldots, a_s, \ldots \in A$, для которых $\partial_{\mathscr{P}}(a_s) = \partial_{\mathscr{P}'}(a_{s+1})$.*

(2) *Эти элементы находятся в инволюции относительно обеих скобок Пуассона, т.е.*
$$\{a_i, a_j\}_{\mathscr{P}} = \{a_i, a_j\}_{\mathscr{P}'} = 0$$
для всех i, $j \geq 1$.

Лекция 5 (07.10.2015)

Скобки Фрёлихера–Нийенхейса и алгебры со связностью

(1) Мы будем рассматривать модули $\Lambda^k(A)$-значных дифференцирований $D(\Lambda^k(A))$. Определим внутреннее произведение $\mathrm{i}_\Omega(\omega) \in \Lambda^{k+j-1}(A)$ элемента $\Omega \in D(\Lambda^k(A))$ и формы $\omega \in \Lambda^j(A)$ как образ элемента $\Omega \otimes \omega$ при композиции
$$D(\Lambda^k(A)) \otimes_A \Lambda^j(A) \xrightarrow{\mathrm{i}} \Lambda^k(A) \otimes \Lambda^{j-1}(A) \xrightarrow{\wedge} \Lambda^{k+j-1}(A),$$
где первое отображение — подстановка, введённая в п. 3 лекции 2. Тогда определена и производная Ли
$$\mathrm{L}_\Omega = [d, \mathrm{i}_\Omega] \colon \Lambda^j(A) \to \Lambda^{k+j}(A).$$

Предложение 7. *Пусть $\Omega \in D(\Lambda^k(A))$, $\omega \in \Lambda^j(A)$. Тогда*

(a) $\mathrm{L}_\Omega(\omega \wedge \theta) = \mathrm{L}_\Omega(\omega) \wedge \theta + (-1)^{kj}\omega \wedge \mathrm{L}_\Omega(\theta)$,

(b) $[\mathrm{L}_\Omega, d] = 0$,

(c) $\mathrm{L}_{\omega\wedge\Omega} = \omega \wedge \mathrm{L}_\Omega + (-1)^{k+j}\, d\omega \wedge \mathrm{i}_\Omega$

для любой формы $\theta \in \Lambda^*(A)$.

(2) Пусть $\Omega \in D(\Lambda^k(A))$, $\Theta \in D(\Lambda^k(A))$. Рассмотрим коммутатор производных Ли $[\mathrm{L}_\Omega, \mathrm{L}_\Theta]$.

Предложение 8. *Равенство*
$$[\mathrm{L}_\Omega, \mathrm{L}_\Theta] = \mathrm{L}_{[\![\Omega,\Theta]\!]}$$
корректно определяет дифференцирование $[\![\Omega, \Theta]\!] \in D(\Lambda^{k+l}(A))$.

Элемент $[\![\Omega,\Theta]\!]$ называется скобкой Фрёлихера–Нийенхейса (или просто скобкой Нийенхейса) дифференцирований Ω и Θ. Основные свойства этой скобки сформулированы в следующем утверждении:

Предложение 9. *Для любых дифференцирований* $\Omega \in D(\Lambda^k(A))$, $\Theta \in D(\Lambda^l(A))$ *и* $\Xi \in D(\Lambda^m(A))$ *имеют место равенства*

(a) $[\![\Omega,\Theta]\!] + (-1)^{kl}[\![\Theta,\Omega]\!] = 0$,

(b) $[\![\Omega,[\![\Theta,\Xi]\!]]\!] = [\![[\![\Omega,\Theta]\!],\Xi]\!] + (-1)^{kl}[\![\Theta,[\![\Omega,\Xi]\!]]\!]$,

(c) $[\![\Omega,\omega\wedge\Theta]\!] = \mathrm{L}_\Omega(\omega)\wedge\Theta + (-1)^{ik}\omega\wedge[\![\Omega,\Theta]\!] - (-1)^{(k+1)(i+k)}\,d\omega\wedge \mathrm{i}_\Theta(\Omega)$,

(d) $[\mathrm{L}_\Omega, \mathrm{i}_\Theta] = (-1)^k \mathrm{L}_{\mathrm{i}_\Theta(\Omega)} + \mathrm{i}_{[\![\Omega,\Theta]\!]}$,

(e) $\mathrm{i}_\Omega[\![\Theta,\Xi]\!] = [\![\mathrm{i}_\Omega(\Theta),\Xi]\!] + (-1)^{(k+1)l}[\![\Theta,\mathrm{i}_\Omega(\Xi)]\!] + (-1)^l \mathrm{i}_{[\![\Omega,\Theta]\!]}(\Xi) - (-1)^{(l+1)m}\mathrm{i}_{[\![\Omega,\Xi]\!]}(\Theta)$,

где $\omega\in\Lambda^i(A)$)

В этом предложении и ниже подстановка $\mathrm{i}_\Omega(\Theta)\in D(\Lambda^{k+l-1})$ определяется равенством

$$(\mathrm{i}_\Omega(\Theta))(a) = \mathrm{i}_\Omega(\Theta(a))$$

для любого элемента $a\in A$.

(3) Элемент $\mathscr{N}\in D(\Lambda^1(A))$ называется интегрируемым, если выполнено равенство $[\![\mathscr{N},\mathscr{N}]\!]=0$ (скобка $[\![\mathscr{N},\mathscr{N}]\!]$ называется тензором Нийенхейса). Очевидно, интегрируемость равносильно тому, что $\partial_{\mathscr{N}}\circ\partial_{\mathscr{N}}=0$, где $\partial_{\mathscr{N}}(\Omega)=[\![\mathscr{N},\Omega]\!]$. Таким образом, для интегрируемых $\mathscr{N}$ определён комплекс

$$0 \longrightarrow D(A) \longrightarrow D(\Lambda^1(A)) \longrightarrow \dots \longrightarrow$$

$$\longrightarrow D(\Lambda^k(A)) \xrightarrow{\partial_{\mathscr{N}}} D(\Lambda^{k+1}(A)) \longrightarrow \dots$$

Его когомологии обозначаются через $H^k(A;\mathscr{N})$.

В интегрируемом случае производная Ли $d_{\mathscr{N}} = \mathrm{L}_{\mathscr{N}}\colon \Lambda^i(A)\to\Lambda^{i+1}(A)$ также является дифференциалом, причём $[d_{\mathscr{N}},d]=0$. Таким образом, пара $(d_{\mathscr{N}},\bar d_{\mathscr{N}})$, где $\bar d_{\mathscr{N}} = d - d_{\mathscr{N}}$ есть бикомплекс на $\Lambda^*(A)$, спектральная последовательность которого сходится к когомологиям де Рама алгебры A. В геометрической теории дифференциальных уравнений это называется вариационным бикомплексом.

(4) Рассмотрим $\Bbbk$-алгебры A и B и гомоморфизм $\varphi\colon A \to B$. Тогда B — A-алгебра, и можно рассмотреть B-модуль $D(A,B)$ B-значных дифференцирований $A \to B$. Если $X \in D(B)$, то операция ограничения $X|_A(a) = X(\varphi(a))$ определяет дифференцирование $X|_A \in D(A,B)$ и точную последовательность

$$0 \longrightarrow D^v(B) \longrightarrow D(B) \longrightarrow D(A,B),$$

где

$$D^v(B) = \{\, X \in D(B) \mid X|_A = 0 \,\}$$

— модуль φ-вертикальных дифференцирований.

Связностью в A-алгебре B называется B-гомоморфизм $\nabla\colon D(A,B) \to D(B)$, расщепляющий эту последовательность, т.е. такой, что $\nabla(X|_A) = X$ для любого $X \in D(B)$. Формой связности называется элемент $U_\nabla \in D(\Lambda^1(B))$, определяемый равенством

$$\mathrm{i}_X(U_\nabla) = X - \nabla(X|_A), \qquad X \in D(B).$$

Пусть X, $Y \in D(A,B)$. Положим

$$R_\nabla(X,Y) = [\nabla(X), \nabla(Y)] - \nabla\left(\nabla(X) \circ Y - \nabla(Y) \circ X\right).$$

Элемент называется кривизной связности ∇.

Предложение 10. *Если ∇ — связность, то*

$$\mathrm{i}_X(\mathrm{i}_Y[\![U_\nabla, U_\nabla]\!]) = 2R_\nabla(X|_A, Y|_A)$$

для для любых X, $Y \in D(B)$.

(5) Связность называется плоской, если $R_\nabla = 0$. В силу предложения 10 элемент U_∇ является интегрируемым в этом случае и определён дифференциал $\partial_\nabla = \partial_{U_\nabla}$. Рассмотрим комплекс

$$0 \longrightarrow D^v(B) \longrightarrow D^v(\Lambda^1(B)) \longrightarrow \dots$$

$$\dots \longrightarrow D(\Lambda^i(B)) \xrightarrow{\partial_\nabla} D^v(\Lambda^{i+1}(B)) \longrightarrow \dots$$

(см. задачу 56) и обозначим его когомологии через $H^i(B,\nabla)$.

Теорема 4. *Пусть $\nabla\colon D(A,B) \to D(B)$ — плоская связность. Тогда:*

(a) *Группы когомологий $H^i(B,\nabla)$ наследуют операцию внутреннего умножения*

$$\mathrm{i}\colon H^i(B,\nabla) \times H^j(B,\nabla) \to H^{i+j-1}(B,\nabla).$$

В частности, группа $H^1(B,\nabla)$ является ассоциативной алгеброй

$$\mathrm{i}\colon H^1(B,\nabla) \times H^1(B,\nabla) \to H^1(B,\nabla),$$

а подстановка

$$\mathrm{i}\colon H^1(B,\nabla)\times H^0(B,\nabla)\to H^0(B,\nabla)$$

определяет её представление в эндоморфизмах группы $H^0(B,\nabla)$.

(b) *Группы когомологий* $H^i(B,\nabla)$ *наследуют скобку Нийенхейса*

$$[\![\cdot,\cdot]\!]\colon H^i(B,\nabla)\times H^j(B,\nabla)\to H^{i+j}(B,\nabla).$$

В частности, $H^0(B,\nabla)$ *является алгеброй Ли относительно этой скобки.*

(6) Другая интерпретация групп $H^i(B,\nabla)$, которая будет важна в последующем изложении, состоит в следующем.
  (a) Дифференцирования $X\in H^0(B,\nabla)$ можно понимать как симметрии связности ∇.
  (b) Элементы группы $H^1(B,\nabla)$ — это классы инфинитезимальных деформаций связности по модулю тривиальных.
  (c) Наконец, группа $H^2(B,\nabla)$ содержит препятствия к продолжению инфинитезимальных деформаций до формальных.

(7) С другой стороны, в силу п. 5а теоремы 4 элементы группы $H^1(B,\nabla)$ «размножают» симметрии связности (как мы увидим ниже, в теории интегрируемых систем они называются операторами рекурсии). С точки зрения приложений к дифференциальным уравнениям важна ситуация, когда получаемые симметрии коммутируют. Рассмотрим симметрию $X\in H^0(B,\nabla)$ и элемент $R\in H^1(B,\nabla)$. Введём обозначения $R(X)=\mathrm{i}_X(R)$ и $X_n=R^n(X)$.

Теорема 5. *Пусть* $H^2(B,\nabla)=0$. *Тогда для любых* X, $Y\in H^0(B,\nabla)$, $R\in H^1(B,\nabla)$ *и* m, $n=1,2,\dots$ *имеют соотношения*

$$[X_m,Y_n]=[X,Y]_{m+n}+\sum_{i=0}^{n-1}([\![X,R]\!]^n(Y_i))_{m+n-i-1}-\sum_{j=0}^{m-1}([\![Y,R]\!]^m(X_j))_{m+n-j-1}.$$

В частности, если $[X,Y]=0$ *и* $[\![X,R]\!]=[\![Y,R]\!]=0$, *то* $[X_m,Y_n]=0$ *для всех* m *и* n.

(8) В заключение, рассмотрим важный пример. Для произвольной $\Bbbk$-алгебры A и A-модуля P построим алгебру B следующим образом. Пусть $S^*(Q)$ обозначает симметрическую алгебру модуля Q. Положим $B_k=S^*(\mathrm{Diff}_k(P,A))$. Тогда $B_k\subset B_{k+1}$ и мы определяем B как $\cup_k B_k$. Пусть $X\in D(A)$ и $\Delta\in\mathrm{Diff}_k(P,A)$. Положим $\nabla(X)(\Delta)=X\circ\Delta$ и распространим действие $\nabla(X)$ на B по правилу Лейбница. Таким образом мы получаем отображение $\nabla\colon D(A)\to D(B)$. Из задачи 58 следует, что оно достраивается до плоской связности. Это — алгебраическая модель связности Картана, играющей ключевую роль в геометрии джетов.

Задачи

Задача 46. Докажите предложение 7.

Задача 47. Докажите предложение 8.

Задача 48. Докажите предложение 9.

Задача 49. Модуль $\Lambda^i(A)\otimes_A D(A)$ можно вложить в $D(\Lambda^i(A))$, полагая $(\omega\otimes X)(a) = X(a)\omega$. Элементы, принадлежащие образу этого вложения, назовём разложимыми. Докажите, что на разложимых элементах скобка Нийенхейса имеет вид

$$[\![\omega\otimes X, \theta\otimes Y]\!] = \omega\wedge\theta\otimes[X,Y] + \omega\wedge \mathrm{L}_X(\theta)\otimes Y - \mathrm{L}_Y(\omega)\wedge\theta\otimes X + \\ + (-1)^i\, d\omega\wedge \mathrm{i}_X(\theta)\otimes Y + (-1)^i \mathrm{i}_Y(\omega)\wedge\, d\theta\otimes X,$$

где $\omega\in\Lambda^i(A)$, $\theta\in\Lambda^j(A)$, X, $Y\in D(A)$.

Задача 50. Покажите, что модуль $D(\Lambda^1(A))$ является ассоциативной алгеброй относительно операции $\Omega\cdot\Theta = \mathrm{i}_\Omega(\Theta)$.

Задача 51. Какие алгебраические структуры (внутреннее умножение, внешнее умножение на формы, скобка Нийенхейса) «выживают» при переходе от модулей $D(\Lambda^k(A))$ к группам когомологий $H^k(A;\mathscr{N})$?

Задача 52. Рассмотрим гладкое многообразие M и автоморфизм кокасательного расслоения J. Он является элементом $C^\infty(M)$-модуля $\hom_{C^\infty(M)}(D(M), D(M)) = \Lambda^1(M)\otimes_{C^\infty(M)} D(M) = D(\Lambda^1(M))$. Почти комплексные структуры на M — это такие J, для которых $J^2 = -\,\mathrm{id}$. Теорема Ньюлендера–Ниренберга утверждает, что J — комплексная структура, если $[\![J,J]\!] = 0$.

(1) Вычислите когомологии $H^k(C^\infty(M);J)$ для комплексных структур.
(2) Вычислите также когомологии дифференциалов d_J и $\bar{d}_J$.

Задача 53. Исследуйте свойства следующих скобок:

(1) Пусть $\Omega\in D(\Lambda^i(A))$, $\Theta\in D(\Lambda^j(A))$. Определим скобку $[\![\Omega,\Theta]\!]\in D(\Lambda^{i+j-1}(A))$ равенством
$$\mathrm{i}_{[\![\Omega,\Theta]\!]} = [\mathrm{i}_\Omega, \mathrm{i}_\Theta]$$
(это так называемая скобка Ричардсона–Нийенхейса).

(2) Пусть $\mathscr{N}\in D(\Lambda^1(A))$ и $\Omega\in D(\Lambda^i(A))$. Положим
$$\mathrm{L}^{\mathscr{N}}_\Omega = [\partial_{\mathscr{N}}, \mathrm{i}_\Omega]\colon D(\Lambda^j(A))\to D(\Lambda^{i+j}(A))$$
и определим скобку $[\![\Omega,\Theta]\!]^{\mathscr{N}}\in D(\Lambda^{i+j}(A))$, полагая
$$\mathrm{L}^{\mathscr{N}}_{[\![\Omega,\Theta]\!]^{\mathscr{N}}} = [\mathrm{L}^{\mathscr{N}}_\Omega, \mathrm{L}^{\mathscr{N}}_\Theta],$$
где $\Theta\in D(\Lambda^j(A))$.

(3) Предположим теперь, что $\Lambda^1(A)$ — проективный модуль конечного типа. Тогда $D_i(P) = D_i(A) \otimes_A P$ для любого A-модуля P. Рассмотрим подстановку $\mathrm{i}\colon D_k(\Lambda^1(A)) \otimes_A D_l(A) \to D_{k+l-1}(A)$, полагая

$$\mathrm{i}(X \otimes \omega \otimes Y) = X \wedge \mathrm{i}_\omega(Y).$$

Пусть $\mathscr{P} \in D_2(A)$ и $\Omega \in D_k(\Lambda^1(A))$. Положим

$$\mathrm{L}_\Omega^{\mathscr{P}} = [\partial_{\mathscr{P}}, \mathrm{i}_\Omega]\colon D_l(A) \to D_{k+l}(A).$$

Если $\Theta \in D_l(\Lambda^1(A))$, определим скобку $[\![\Omega, \Theta]\!]^{\mathscr{P}} \in D_{k+l}(\Lambda^1(A))$, полагая

$$\mathrm{L}^{\mathscr{P}}_{[\![\Omega,\Theta]\!]^{\mathscr{P}}} = [\mathrm{L}_\Omega^{\mathscr{P}}, \mathrm{L}_\Theta^{\mathscr{P}}].$$

Есть ли ещё идеи?

Задача 54. Постройте пример пары алгебр (A, B) и гомоморфизма $\varphi\colon A \to B$, в котором операция ограничения $D(B) \to D(A, B)$ не является эпиморфизмом. Какие условия гарантирую эпиморфность?

Задача 55. Докажите предложение 10.

Задача 56. Докажите, что если $\Omega \in D^v(\Lambda^i(B))$ — вертикальное дифференцирование, то $\partial_\nabla(\Omega)$ также является вертикальным.

Задача 57. Докажите теорему 4.

Задача 58. Докажите теорему 5.

Задача 59. Покажите, что отображение ∇, описанное в п. 8, достраивается до плоской связности.

Лекция 6 (14.10.2015)

Джеты и нелинейные дифференциальные операторы

(1) Пусть M — гладкое многообразие, $\dim M = n$, и $\pi\colon E \to M$ — гладкое векторное расслоение размерности m. Обозначим через $\Gamma(\pi)$ $C^\infty(M)$-модуль сечений расслоения π. Пусть $x \in M$ и $s \in \Gamma(\pi)$. Положим

$$[s]_x^k = \{\, s' \in \Gamma(\pi) \mid \text{график } s' \text{ касается графика } s \text{ с порядком } k \,\}$$

и $J_x^k(\pi) = \{\, [s]_x^k \mid s \in \Gamma(\pi) \,\}$. Множество $J_x^k(\pi)$ превращается в векторное пространство, если положить

$$[s]_x^k + [s']_x^k = [s + s']_x^k, \quad \alpha[s]_x^k = [\alpha s]_x^k, \qquad s, s' \in \Gamma(\pi), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Пусть $J^k(\pi) = \cup_{x \in M} J_x^k(\pi)$. Сопоставим каждому $s \in \Gamma(\pi)$ отображение $j_k(s)\colon M \to J^k(\pi)$, полагая

$$j_k(s)(x) = [s]_x^k,$$

и введём в $J^k(\pi)$ минимальную топологию, при которой все отображения $j_k(s)$ непрерывны. Обозначим через $\pi_k\colon J^k(\pi) \to M$, $[s]_x^k \mapsto x$, естественную проекцию.

(2) Пусть $\mathscr{U} \subset M$ — такая карта с координатами $x^1, \dots, x^n$, что расслоение π тривиализуется над $\mathscr{U}$, и $u^1, \dots, u^m$ — послойные координаты в этой тривиализации. Определим в $\pi_k^{-1}(\mathscr{U}) \subset J^k(\pi)$ адаптированные координаты u_σ^j, полагая

$$u_\sigma^j([s]_x^k) = \left.\frac{\partial^{|\sigma|} s^j}{\partial x^\sigma}\right|_x,$$

если сечение s локально задано как $u^j = s^j(x)$, $j = 1, \dots, m$. Полученное многообразие (см. задачу 61) называется многообразием k-джетов сечений расслоения π, а $\pi_k \colon J^k(\pi) \to M$ — расслоением k-джетов. При этом $J^0(\pi) = M$, а естественные проекции $\pi \colon J^k(\pi) \to J^l(\pi)$, $k \geq l$, суть гладкие отображения.

Если $s \in \Gamma(\pi)$, то сечение $j_k(s) \in \Gamma(\pi_k)$ называется k-джетом сечения s.

(3) Пусть $\pi' \colon E' \to M$ — также векторное расслоение, $\dim \pi' = m'$. Обозначим через $\mathscr{F}_k(\pi, \pi')$ модуль сечений индуцированного расслоения $\pi^*(\pi')$. В частном случае, когда π' — тривиальное одномерное расслоение, мы будем использовать обозначение $\mathscr{F}_k(\pi)$. Нелинейный дифференциальный дифференциальный оператор порядка k, действующий из $\Gamma(\pi)$ в $\Gamma(\pi')$, — это элемент $\varphi \in \mathscr{F}_k(\pi, \pi')$, причём соответствующее действие определяется равенством

$$\Delta_\varphi(s) = (j_k(s))^*(\varphi), \qquad s \in \Gamma(\pi).$$

Операторы порядка k находятся во взаимно-однозначном соответствии с морфизмами расслоений

$$\begin{tikzcd} J^k(\pi) \arrow[rr, "\Phi_\Delta"] \arrow[dr, "\pi_k"'] & & E' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & M, & \end{tikzcd}$$

$\Phi_\Delta([s]_x^k) = \Delta(s)|_x$. Тогда действие оператора на сечения можно записать в виде $\Delta(s) = \Phi_\Delta \circ j_k(s)$. Если Φ_Δ — морфизм векторных расслоений, то оператор Δ — линейный.

(4) Пусть $\varphi \in \mathscr{F}_k(\pi, \pi')$ — оператор порядка k. Построим морфизм $\Phi_\Delta^{(l)} \colon J^{k+l}(\pi) \to J^l(\pi')$, полагая $\Phi_\Delta^{(l)}([s]_x^{k+l}) = [\Delta(s)]_x^l$. Оператор $\Delta^{(l)} \colon \Gamma(\pi) \to \Gamma(\pi_l)$ называется l-м продолжением оператора Δ; его порядок равен $k + l$. Очевидно, что диаграммы

$$\begin{tikzcd} J^{k+l+1}(\pi) \arrow[r, "\Phi_\Delta^{(l+1)}"] \arrow[d, "\pi_{k+l+1,k+l}"'] & J^{l+1}(\pi') \arrow[d, "\pi'_{l+1,l}"] \\ J^{k+l}(\pi) \arrow[r, "\Phi_\Delta^{(l)}"] & J^l(\pi') \end{tikzcd}$$

коммутативны при всех l.

(5) Рассмотрим операторы $\Delta\colon \Gamma(\pi) \to \Gamma(\pi')$ и $\Delta'\colon \Gamma(\pi') \to \Gamma(\pi'')$ порядков k и k' соответственно и композицию морфизмов расслоений

$$J^{k+k'}(\pi) \xrightarrow{\Phi_\Delta^{(k')}} J^{k'}(\pi') \xrightarrow{\Phi_{\Delta'}} E'' = J^0(\pi'').$$

Соответствующий оператор называется композицией операторов Δ и Δ' и, как следует из задачи 66, действительно ею является.

(6) Рассмотрим точку $\theta \in J^k(\pi)$ и определим пространство

$$\mathscr{C}_\theta^k = \mathop{\mathscr{L}}_{[s]_x^k=\theta} T_\theta(j_k(s)(M)) \subset T_\theta J^k(\pi),$$

где $\mathscr{L}$ обозначает линейную оболочку. Пространство $\mathscr{C}_\theta = \mathscr{C}_\theta^k$ называется плоскостью Картана в точке θ, а соответствие $\mathscr{C} = \mathscr{C}^k\colon \theta \mapsto \mathscr{C}_\theta$ — распределением Картана. Это распределение — главная геометрическая структура на пространстве джетов.

(7) Выберем координатную окрестность $\mathscr{U} \subset M$ с локальными координатами $x^1, \dots, x^n$ и адаптированные координаты u_σ^j в $\pi_k^{-1}(\mathscr{U}) \subset J^k(\pi)$.

Предложение 11. *Пусть $k > 0$. Тогда*

(a) *Распределение Картана локально натянуто на векторные поля*

$$\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^m \sum_{|\tau| \le k-1} u_{\tau i}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_\tau^\alpha}, \qquad \frac{\partial}{\partial u_\sigma^j}, \tag{2}$$

где $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, $|\sigma| = k$, или, эквивалентно,

(b) *Поле X лежит в распределении Картана тогда и только тогда, когда оно аннулирует систему форм*

$$\omega_\sigma^j = du_\sigma^j - \sum_{i=1}^n u_{\sigma i}^j\, dx^i, \tag{3}$$

где $j = 1, \dots, m$, $|\sigma| \le k - 1$.

Формы ω_σ^j называются формами Картана, или высшими контактными формами.

(8) Пусть $\theta \in J^{k+1}(\pi)$ и $\bar\theta = \pi_{k+1,k}(\theta) \in J^k(\pi)$. Тогда для любого сечения $s \in \Gamma(\pi)$, обладающего свойством $[s]_x^{k+1} = \theta$, графики джетов $j_k(s)$ проходят через точку $\bar\theta$ и имеют общую касательную плоскость L_θ. Таким образом, точки пространства $J^{k+1}(\pi)$ можно отождествить с парами $(\bar\theta, L_\theta)$. Это полезное отождествление позволяет, в частности, дать альтернативное описание распределение Картана, сформулированное в задаче 69.

Задачи

Задача 60. Докажите, что $\dim J^k_x(\pi) = m\binom{n+k}{k}$.

Задача 61. Докажите, что введённые в п. 2 локальные координаты определяют в $J^k(\pi)$ структуру гладкого многообразия, а в $\pi_k\colon J^k(\pi) \to M$ — структуру гладкого векторного расслоения.

Задача 62. Пусть $P = \Gamma(\pi)$. Докажите, что модуль $\mathscr{J}^k(P)$, построенный как представляющий объект функтора $\mathrm{Diff}_k(P, \cdot)$ в категории геометрических модулей над $C^\infty(M)$ совпадает с модулем сечений $\Gamma(\pi_k)$.

Задача 63. Докажите, что $\pi_{k+1,k}\colon J^{k+1}(\pi) \to J^k\pi)$ — аффинные расслоения, причём векторным пространством, ассоциированным со слоем над точкой $\theta = [s]^k_x$ является $S^{k+1}T^*_x M \otimes E_x$.

Задача 64. Докажите, что определение морфизма $\Phi^{(l)}_\Delta$ из п. 4 корректно, т.е. не зависит от выбора сечения s.

Задача 65. Пусть $\Delta\colon \Gamma(\pi) \to \Gamma(\pi')$ — оператор порядка k и l, l' — натуральные числа. Какова связь между операторами $\Delta^{(l+l')}\colon \Gamma(\pi) \to \Gamma(\pi_{l+l'})$ и $\left(\Delta^{(l)}\right)^{(l')}\colon \Gamma(\pi) \to \Gamma((\pi_l)_{l'})$?

Задача 66. Покажите, что оператор, который соответствует морфизму, построенному в п. 5, действует на сечение $s \in \Gamma(\pi)$ как $\Delta'(\Delta(s))$.

Задача 67. Вычислите размерность распределения Картана.

Задача 68. Докажите предложение 11.

Задача 69. Докажите, что если $\theta \in J^{k+1}(\pi)$ и $\theta = (\bar\theta, L_\theta)$, то $\mathscr{C}^{k+1}_\theta = (\pi_{k+1,k})^{-1}_*(L_\theta)$.

Задача 70. Из рассуждений п. 8 следует, что имеет место естественное вложение $J^{k+1}(\pi) \subset J^1(J^k(\pi))$. Опишите его в координатах. Каков его алгебраический аналог?

Задача 71 (структура максимальных интегральных многообразий распределения Картана)**.** Пусть $N \subset J^{k-1}(\pi)$ — интегральное подмногообразие распределения Картана, без вырождения проектирующееся на M, $1 \le \dim M \le n$ (такие многообразия легко описать). Рассмотрим множество

$$L(N) = \Big\{\, (\theta, L_\theta) \in J^k(\pi) \mid \theta \in N, L_\theta \supset T_\theta N \,\Big\}.$$

(1) Докажите, что $L(N)$ — максимальное интегральное многообразие распределения Картана на $J^k(\pi)$ и что все максимальные интегральные многообразия имеют такой вид.
(2) Вычислите $\dim L(N)$.

Лекция 7 (28.10.2015)

Симметрии распределения Картана и теорема Ли–Беклунда

(1) Пусть N — гладкое многообразие, $\dim N = n$, и $D \subset TN$ — распределение на нём, $\operatorname{rank} D = d$. Обозначим через $\mathscr{D} = \mathscr{D}_D \subset D(M)$ модуль векторных полей, лежащих в D, а через $\Lambda^1_D \subset \Lambda^1(M)$ — подмодуль 1-форм, аннулируемых элементами из $\mathscr{D}$. Таким образом, локально D задаётся базисом $X_1, \dots, X_d$ модуля $\mathscr{D}$ или базисом $\omega_1, \dots, \omega_{n-d}$ модуля Λ^1_D.

(2) Диффеоморфизм $f \colon N \to N$ называется (конечной) симметрией распределения D, если $f_*(D_x) = D_{f(x)}$ для любой точки $x \in N$. Поле $X \in D(N)$ называется инфинитезимальной симметрией, если соответствующая ему однопараметрическая группа преобразований состоит из конечных симметрий. Инфинитезимальная симметрия называется характеристической, если она принадлежит модулю $\mathscr{D}$.

(3) Если $X_1, \dots, X_d$ и $\omega_1, \dots, \omega_{n-d}$ — базисы из п. 1, то условие того, что f — конечная симметрия локально задаётся эквивалентными системами

$$f_*(X_i) = \sum_\alpha \lambda_i^\alpha X_\alpha \quad \Leftrightarrow \quad f^*(\omega_j) = \sum_\beta \mu_j^\beta \omega_\beta.$$

Аналогично, X — инфинитезимальная симметрия тогда и только тогда, когда

$$[X, X_i] = \sum_\alpha \lambda_i^\alpha X_\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{L}_X(\omega_j) = \sum_\beta \mu_j^\beta \omega_\beta.$$

(4) Подмногообразие $\Upsilon \subset N$ называется интегральным многообразием распределения D, если $T_x\Upsilon \subset D_x$ для любой точки $x \in \Upsilon$. Распределение называется интегрируемым, если через любую точку $x \in N$ проходит локальное интегральное d-мерное многообразие. Критерием интегрируемости является теорема Фробениуса:

Теорема 6. *Следующие утверждения эквивалентны*:

(a) *Распределение D интегрируемо.*

(b) *Модуль $\mathscr{D}$ является алгеброй Ли относительно коммутатора векторных полей.*

(c) *Идеал внешней алгебры $\Lambda^*(N)$, порождённый модулем Λ^1_D, дифференциально замкнут.*

Таким образом, локально интегрируемость задаётся условиями

$$[X_i, X_k] = \sum_\alpha a_{ij} X_\alpha, \qquad \alpha, i, k = 1, \dots, d,$$

или

$$d\omega_j = \sum_\beta \rho_j^\beta \wedge \omega_\beta, \qquad \beta, j = 1, \dots, n-d.$$

(5) Степень неинтегрируемости распределения можно «померить» с помощью следующей конструкции. Рассмотрим модуль $\mathscr{D}^{(1)}$, являющийся линейной оболочкой всех полей вида X, $[Y, Z]$, $X, Y, Z \in \mathscr{D}$. Соответствующее распределение называется производной распределения D. Положим $\mathscr{D}^{(2)} = \left(\mathscr{D}^{(1)}\right)^{(1)}$ и т.д. Тогда

$$\mathscr{D} = \mathscr{D}^{(0)} \subset \mathscr{D}^{(1)} \subset \ldots \subset \mathscr{D}^{(i)} \subset \ldots$$

— производный ряд распределения $\mathscr{D}$. Если распределение интегрируемо, то у этого ряда минимальная длина: $\mathscr{D}^{(0)} = \mathscr{D}^{(1)}$; чем длинней производный ряд, тем менее интегрируемо распределение.

(6) Перейдём к описанию симметрий распределения Картана на $J^k(\pi)$. Прежде чем формулировать общее утверждение, сделаем простой вычислительный эксперимент. Пусть $M = \mathbb{R}^n$ и $\pi\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — тривиальное расслоение. Выберем координаты $x^1, \ldots, x^n$ в базе, $u^1, \ldots, u^m$ в слое, и пусть u_i^j — соответствующие адаптированные координаты в $J^1(\pi)$. Распределение Картана задаётся формами

$$\omega^j = du^j - \sum_i u_i^j \, dx^i, \qquad i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m,$$

и поле

$$X = \sum_i a^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_j b^j \frac{\partial}{\partial u^j} + \sum_{i,j} c_i^j \frac{\partial}{\partial u_i^j}$$

является инфинитезимальной симметрией тогда и только тогда, когда

$$db^j - \sum_i \left(c_i^j \, dx^i - u_i^j \, da_i\right) = \sum_\beta \lambda_\beta^j \left(du^\beta - \sum_i u_i^\beta \, dx^i\right),$$

или

$$\begin{aligned}
\frac{\partial b^j}{\partial x^i} - c_i^j - \sum_\alpha u_\alpha^j \frac{\partial a^\alpha}{\partial x^i} &= -\sum_\beta \lambda_\beta^j u_i^\beta, \\
\frac{\partial c^j}{\partial u^k} - \sum_\alpha u_\alpha^j \frac{\partial a^\alpha}{\partial u^k} &= \lambda_k^j, \\
\frac{\partial c^j}{\partial u_i^k} - \sum_\alpha u_\alpha^j \frac{\partial a^\alpha}{\partial u_i^k} &= 0,
\end{aligned}$$

где λ_β^j — некоторые функции на $J^1(\pi)$.

(7) Из задачи 78 следует, что при $m > 1$ коэффициенты c_i^j однозначно восстанавливаются по произвольным коэффициентам a_i и b^i с

помощью формул

$$c_i^j = \frac{\partial b^j}{\partial x^i} - \sum_\alpha u_\alpha^j \frac{\partial a^\alpha}{\partial x^i} + \sum_\beta \frac{\partial c^j}{\partial u^\beta} - \sum_{\alpha,\beta} u_\alpha^j \frac{\partial a^\alpha}{\partial u^\beta} u_{i\beta},$$

т.е. симметрий распределения Картана столько же, сколько полей на $J^0(\pi)$. В случае $m = 1$ сопоставим всякой симметрии функцию (производящую функцию контактного поля) $\varphi = b - \sum_i u_i a^i$. Тогда

$$a^i = -\frac{\partial \varphi}{\partial u_i}, \quad b = \varphi - \sum_i u_i \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}, \quad c_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} + u_i \frac{\partial \varphi}{\partial u},$$

и всякое поле с такими коэффициентами является симметрией.

(8) Симметрии распределения Картана на $J^k(\pi)$ называются преобразованиями Ли, а инфинитезимальные симметрии — полями Ли. Сейчас мы дадим полное описание преобразований и полей Ли, обобщающее результаты вычислений пп. 6 – 7. Заметим во-первых, что преобразования Ли многообразия $J^0(\pi)$ — это все его диффеоморфизмы. Во-вторых, распределение Картана на $J^1(\pi)$ для одномерных расслоений π — это контактная структура и преобразования Ли в этом случае суть контактные диффеоморфизмы. Наконец, в-третьих, рассмотрим следующую конструкцию. Пусть $g\colon J^k(\pi) \to J^k(\pi)$ — преобразование Ли. Рассмотрим отображение $g^{(1)}\colon J^{k+1}(\pi) \to J^{k+1}(\pi)$, определённое правилом

$$g^{(1)}(\theta) = (g(\bar{\theta}),\, dg(L_\theta)),$$

где точка $\theta \in J^{k+1}(\pi)$ представлена в виде пары $(\bar{\theta}, L_\theta)$ (см. п. 8). Отображение $g^{(1)}$ называется поднятием преобразования Ли g. Из задачи 79 следует, что поднятие также является преобразованием Ли, определённым почти всюду.

Поднятия полей Ли определяются очевидным образом.

(9) Пусть $g\colon J^k(\pi) \to J^k(\pi)$ — преобразование Ли. Определим преобразования Ли $g^{(l)}\colon J^{k+l}(\pi) \to J^{k+l}(\pi)$, полагая $g^{(i+1)} = \big(g^{(i)}\big)^{(1)}$.

Теорема Ли–Беклунда. *Всякое преобразование Ли пространства $J^k(\pi)$ имеет вид:*

(a) $g^{(k)}$, *где* $g\colon J^0(\pi) \to J^0(\pi)$ *— произвольный диффеоморфизм, если* $\dim \pi > 1$;

(b) $g^{(k-1)}$, *где* $g\colon J^1(\pi) \to J^1(\pi)$ *— контактный диффеоморфизм, если* $\dim \pi = 1$

Инфинитезимальный аналог этой теоремы очевиден.

(10) Доказательство теоремы Ли–Беклунда основывается на следующих утверждениях:

Лемма 1. *Пусть есть коммутативная диаграмма*

$$
\begin{tikzcd}
J^{k+1}(\pi) \arrow[r, "\bar{g}"] \arrow[d, "\pi_{k+1,k}"'] & J^{k+1}(\pi) \arrow[d, "\pi_{k+1,k}"] \\
J^k(\pi) \arrow[r, "g"] & J^k(\pi),
\end{tikzcd}
$$

где g и $\bar{g}$ — преобразования Ли. Тогда $\bar{g} = g^{(1)}$.

Лемма 2. *Любое преобразование Ли $g\colon J^k(\pi) \to J^k(\pi)$ сохраняет слои проекции $\pi_{k,k-1}$, если $k \geq 2$ при $\dim\pi = 1$ и $k \geq 1$ при $\dim\pi > 1$.*

Доказательство. Рассмотрим пространство $\mathscr{C}^{(1)}$ над $J^k(\pi)$ (см. п. 5) и модуль

$$V^k(\mathscr{C}) = \left\{ X \in \mathscr{C} \mid [X, \mathscr{C}^{(1)}] \subset \mathscr{C}^{(1)} \right\}.$$

При $k \geq 2$ утверждение леммы следует из задачи 81. Если $\dim\pi > 1$ и $k = 1$, то оно следствие вычислений п. 7. $\square$

Задачи

Задача 72. Докажите, что f — конечная симметрия тогда и только тогда, когда $f_*(\mathscr{D}) \subset \mathscr{D}$, или $f^*(\Lambda^1_D) \subset \Lambda^1_D$.

Задача 73. Докажите, что X — инфинитезимальная симметрия тогда и только тогда, когда $[X, \mathscr{D}] \subset \mathscr{D}$, или $\mathrm{L}_X(\Lambda^1_D) \subset \Lambda^1_D$.

Задача 74. Докажите, что инфинитезимальные симметрии образуют алгебру Ли относительно коммутатора, а характеристические симметрии — её идеал. Элементы факторалгебры по этому идеалу называются нетривиальными симметриями.

Задача 75. Докажите, что характеристические симметрии распределения Картана на $J^k(\pi)$ тривиальны.

Задача 76. Докажите, что образ интегрального многообразия при действии конечной симметрии является интегральным многообразием. Докажите, что симметрия является характеристической тогда и только тогда, когда соответствующие ей диффеоморфизмы переводят каждое интегральное многообразие в себя.

Задача 77. Докажите, что распределение Картана на $J^k(\pi)$ максимально неинтегируемо: $\cup_i \mathscr{C}^{(i)} = D(J^k(\pi))$.

Задача 78. Докажите, что коэффициенты c_i^j из п. 6 не зависят от переменных u_α^β, если $m > 1$.

Задача 79. Докажите, что:

(1) Поднятие преобразования Ли — снова преобразование Ли.

(2) Поднятие преобразования Ли определено всюду, кроме множества точек положительной коразмерности.
(3) Если поднятие $g^{(1)}$ определено в некоторой точке $\theta \in J^{k+1}(\pi)$, то поднятие $\big(g^{(1)}\big)^{(1)}$ определено во всех точках $g' \in \pi^{-1}_{k+2,k+1}(\theta) \subset J^{k+2}(\pi)$.
(4) Поднятия полей Ли определены во всех точках.

Задача 80. Докажите лемму 1.

Задача 81. Докажите, что модуль $V^k(\mathscr{C})$, построенный при доказательстве леммы 2, по крайней мере локально, состоит из $\pi_{k,k-1}$-вертикальных векторных полей, если $k \geq 2$.

Задача 82. Докажите, что преобразования Ли сохраняют аффинную структуру слоёв (задача 63).

Задача 83. Производящая функция контактного поля, определённая в п. 7, на самом деле является не функцией, а сечением линейного расслоения $\bar{\pi}\colon TJ^1(\pi)/\mathscr{C} \to J^1(\pi)$. Выведите формулы преобразования производящих функций при контактных заменах координат.

Задача 84 (поднятия полей Ли в координатах)**.** Пусть поле Ли на $J^k(\pi)$ имеет вид

$$X = \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\sigma| \leq k} c^j_\sigma \frac{\partial}{\partial u^j_\sigma}$$

Покажите, коэффициенты его поднятия $X^{(1)}$ при $\partial/\partial u^j_{\sigma l}$ вычисляются по формуле

$$c^j_{\sigma l} = D_l(c^j_\sigma) - \sum_{i=1}^{n} u^j_{\sigma i} D_l(a^i),$$

где

$$D_l = \frac{\partial}{\partial x^l} + \sum_{\sigma,j} u^j_{\sigma l} \frac{\partial}{\partial u^j_\sigma}$$

— операторы полных производных.

Лекция 8 (18.11.2015)

Уравнения и симметрии

(1) Дифференциальным уравнением порядка k называется подмногообразие $\mathscr{E} \subset J^k(\pi)$, $\dim M = n$, $\operatorname{rank} \pi = m$. Распределением Картана на $\mathscr{E}$ называется соответствие $\mathscr{C}^{\mathscr{E}}\colon \theta \in \mathscr{E} \mapsto T_\theta\mathscr{E} \cap \mathscr{C}_\theta$. Вообще говоря, $\mathscr{C}^{\mathscr{E}}$ не является распределением, поскольку размерности соответствующих плоскостей могут меняться от точки к точке. Точки, в которых коразмерность плоскостей $\mathscr{C}^{\mathscr{E}}_\theta$ максимальна, называются регулярными; остальные точки — особые. Решением уравнения $\mathscr{E}$ называется максимальное интегральное

многообразие $s \subset \mathscr{E}$ распределения Картана размерности n. Если s — график k-джета некоторого сечения расслоения π, то решение называется классическим, в противном случае — обобщённым. Два уравнения $\mathscr{E}$ и $\mathscr{E}'$ называются эквивалентными, если существует такое преобразование Ли $g\colon J^k(\pi) \to J^k(\pi)$, что $F(\mathscr{E}) = \mathscr{E}'$. Уравнение называется линейным, если $\mathscr{E}$ — векторное подрасслоение в $\pi_k\colon J^k(\pi) \to M$.

(2) Рассмотрим примеры.

Пример 2. Пусть $\pi\colon \Lambda^i T^* M \to M$ — i-я внешняя степень кокасательного расслоения. Тогда

$$\mathscr{E} = \left\{\, [\omega]_x^1 \mid d\omega = 0,\ \omega \in \Lambda^i_{\mathrm{loc}}(M),\ x \in M \,\right\}$$

— линейное уравнение первого порядка в этом расслоении. Его решения — замкнутые i-формы.

Пример 3. Пусть $\pi\colon \Lambda^2 TM \to M$ — внешний квадрат касательного расслоения. Тогда

$$\mathscr{E} = \left\{\, [Z]_x^1 \mid [\![Z, Z]\!] = 0,\ Z \in D_2^{\mathrm{loc}}(M),\ x \in M \,\right\},$$

где $[\![Z, Z]\!]$ — скобка Схоутена, — нелинейное уравнение первого порядка в расслоении бивекторов. Его решения — пуассоновы структуры на M.

Пример 4. Рассмотрим некоторое одномерное расслоение $\pi\colon E \to M$ над двумерным многообразием M и дифференциальную 2-форму $\omega \in \Lambda^2 J^1(\pi)$. Уравнение

$$\mathscr{E}_\omega = \left\{\, [s]_x^2 \mid j_1(s)^*(\omega) = 0,\ s \in \Gamma_{\mathrm{loc}}(\pi),\ x \in M \,\right\}$$

называется уравнением Монжа–Ампера, ассоциированным с формой ω.

Пример 5. Пусть $\pi\colon \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — одномерное тривиальное расслоение с координатами x, t в базе и u — в слое. Уравнение

$$\mathscr{E} = \{u_t = uu_x + \nu u_{xx}\} \subset J^2(\pi), \qquad \nu = \mathrm{const},$$

называется уравнением Бюргерса, если $\nu \neq 0$, и уравнением Хопфа, если $\nu = 0$. Уравнение Бюргерса описывает волновые процессы в акустике и гидродинамике; параметр ν соответствует вязкости среды.

Пример 6. Пусть π такое же, что и в примере 5. Уравнение

$$\mathscr{E} = \{u_t = uu_x + u_{xxx}\} \subset J^3(\pi)$$

называется уравнением Кортевега–де Фриза (КдФ). Уравнение КдФ описывает одномерные нелинейные волн в средах с дисперсией без диссипации.

Пример 7. Уравнение

$$\mathscr{E} = \{u_{xy} = \sin u\},$$

где x, y — координаты в базе, — это уравнение синус Гордона. Оно описывает поверхности постоянной гауссовой кривизны $K = -1$ в $\mathbb{R}^3$.

(3) Пусть $\mathscr{E} \subset J^k(\pi)$ — уравнение порядка k. Его (конечной) симметрией называется такое преобразование Ли g пространства $J^k(\pi)$, что $g(\mathscr{E}) = \mathscr{E}$. Если g поднято с $J^1(\pi)$ (см. теорему Ли–Беклунда), то симметрия называется контактной; симметрии, поднятые с $J^0(\pi)$ называются точечными. Очевидно, симметрии образуют группу (псевдогруппу Ли). Если s — решение уравнения $\mathscr{E}$, то его образ при действии конечной симметрии — также (обобщённое) решение.

(4) Вычислить конечные симметрии конкретного уравнения практически никогда невозможно. На помощь приходит инфинитезимальная точка зрения. Скажем, что поле Ли X на $J^k(\pi)$ является инфинитезимальной симметрией, если в каждой точке $\theta \in \mathscr{E}$ вектор X_θ касается $\mathscr{E}$. Очевидно, сдвиги вдоль траекторий инфинитезимальных симметрий являются конечными симметриями.

Пример 8. Пусть π — тривиальное одномерное расслоение над M и $\mathscr{E}$ — скалярное уравнение первого порядка, заданное нулями функции $F \in \mathscr{F}(\pi)$. Рассмотрим контактное X_F поле с производящей функцией F (см. п. 7 предыдущей лекции). Тогда X_F — инфинитезимальная симметрия уравнения; она называется характеристической.

(5) Проиллюстрируем, как инфинитезимальные симметрии вычисляются на практике. Для этого, воспользовавшись задачей 84, выпишем явный вид полей Ли на $J^2(\pi)$ в случае одномерного расслоения π и двумерной базы M. Пусть x^1, x^2, u — координаты в $J^0(\pi)$ и u_1, u_2, u_{11}, u_{12}, u_{22} — адаптированные координаты в $J^2(\pi)$. Всякое поле Ли на $J^2(\pi)$ является поднятием контактного поля

$$X_\varphi = -f_{u_1}\frac{\partial}{\partial x^1} - f_{u_2}\frac{\partial}{\partial x^2} + (\varphi - u_1\varphi_{u_1} - u_2\varphi_{u_2})\frac{\partial}{\partial u} + \\ + (\varphi_{x^1} + u_1\varphi_u)\frac{\partial}{\partial u_1} + (\varphi_{x^2} + u_2\varphi_u)\frac{\partial}{\partial u_2},$$

а коэффициенты X_{ij} при $\partial/\partial u_{ij}$ имеют вид

$$X_{11} = \varphi_{x^1x^1} + 2u_1\varphi_{x^1u} + u_1^2\varphi_{uu} + u_{11}(\varphi_u + 2\varphi_{x^1u_1} + 2u_1\varphi_{uu_1}) + \\ + 2u_{12}(\varphi_{x^1u_2} + u_1\varphi_{uu_2}) + u_{11}^2\varphi_{u_1u_1} + 2u_{11}u_{12}\varphi_{u_1u_2} + u_{12}^2\varphi_{u_2u_2},$$

$$X_{12} = \varphi_{x^1x^2} + u_1\varphi_{x^2u} + u_2\varphi_{x^1u} + u_1u_2\varphi_{uu} + u_{11}(\varphi_{x^2u_1} + u_2\varphi_{uu_1}) + \\ + u_{12}(\varphi_u + \varphi_{x^1u_1} + \varphi_{x^2u_2} + u_1\varphi_{uu_1} + u_2\varphi_{uu_2}) + u_{22}(\varphi_{x^1u_2} + u_1\varphi_{uu_2}) +$$

$$+ u_{11}u_{12}\varphi_{u_1u_1} + (u_{11}u_{22} + u_{12}^2)\varphi_{u_1u_2} + u_{12}u_{22}\varphi_{u_2u_2},$$

$$X_{22} = \varphi_{x^2x^2} + 2u_2\varphi_{x^2u} + u_2^2\varphi_{uu} + 2u_{12}(\varphi_{x^2u_1} + u_2\varphi_{uu_1})+$$
$$+ u_{22}(\varphi_u + 2\varphi_{x^2u_2} + 2u_2\varphi_{uu_2}) + u_{12}^2\varphi_{u_1u_1} + 2u_{12}u_{22}\varphi_{u_1u_2} + u_{22}^2\varphi_{u_2u_2},$$

и, если уравнение $\mathscr{E}$ задано условием

$$F(x^1, x^2, u, u_1, u_2, u_{11}, u_{12}, u_{22}) = 0,$$

то $X_\varphi^{(1)}$ — симметрия, если выполняется определяющее уравнение

$$X_\varphi^{(1)}(F)\Big|_{F=0} = 0.$$

Рассмотрим пример.

Пример 9. Вычислим инфинитезимальные симметрии уравнения Бюргерса $u_t = uu_x + u_{xx}$. В силу сказанного выше, производящая функция $\varphi = \varphi(x, t, u, u_x, u_t)$ такой симметрии должна удовлетворять условию

$$\varphi_t + u_t\varphi_u = (\varphi - u_t\varphi_{u_t} - u_x\varphi_{u_x})u_x + u(\varphi_x + u_x\varphi_u)+$$
$$+ \varphi_{xx} + 2u_x\varphi_{xu} + u_x^2\varphi_{uu} + u_{xx}(\varphi_u + 2\varphi_{xu_x} + 2u_x\varphi_{uu_x})+$$
$$+ 2u_{xt}(\varphi_{xu_t} + u_x\varphi_{uu_t}) + u_{xx}^2\varphi_{u_xu_x} + 2u_{xx}u_{xt}\varphi_{u_xu_t} + u_{xt}^2\varphi_{u_tu_t},$$

на $\mathscr{E}$, или

$$\varphi = (\varphi - u_t\varphi_{u_t} - u_x\varphi_{u_x})u_x + u(\varphi_x + u_x\varphi_u)+$$
$$+ \varphi_{xx} + 2u_x\varphi_{xu} + u_x^2\varphi_{uu} + (u_t - uu_x)(\varphi_u + 2\varphi_{xu_x} + 2u_x\varphi_{uu_x})+$$
$$+ 2u_{xt}(\varphi_{xu_t} + u_x\varphi_{uu_t}) + (u_t - uu_x)^2\varphi_{u_xu_x} + 2(u_t - uu_x)u_{xt}\varphi_{u_xu_t} + u_{xt}^2\varphi_{u_tu_t}.$$

Последнее уравнение квадратично по u_{xt}, откуда следует, что функция φ линейна по u_t. Используя этот факт, нетрудно убедиться, что

$$\varphi = Au_x + Bu_t + C,$$

где функции A, B и C зависят только от x, t и u и удовлетворяют уравнениям

$$A_u = 0, \qquad B_t - 2A_x = 0,$$
$$u_xA_t + uu_xA_x + C_t - uC_x - u_xC - A_{xx} - C_{xx} - 2u_xC_{xu} - u_x^2C_{uu} = 0.$$

Последнее из этих уравнений квадратично по u_x, что позволяет расщепить его в систему из трёх уравнений, и т.д. В итоге мы получим окончательный вид функции φ:

$$\varphi = ((\alpha t + \beta)x + \gamma t + \delta)u_x + (\alpha t^2 + 2\beta t + \varepsilon)u_t + (\alpha t + \beta)u + \beta x + \gamma,$$

где α, β, γ, δ, $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Таким образом, алгебра симметрий уравнения Бюргерса порождена векторными полями

$$\frac{\partial}{\partial x} \qquad \text{— трансляция по } x,$$

$\dfrac{\partial}{\partial t}$ — трансляция по t,

$x\dfrac{\partial}{\partial x} + 2t\dfrac{\partial}{\partial t} - u\dfrac{\partial}{\partial u}$ — масштабная симметрия,

$t\dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{\partial}{\partial u}$ — преобразование Галилея,

а также

$$tx\frac{\partial}{\partial x} + t^2\frac{\partial}{\partial t} - (tu + x)\frac{\partial}{\partial u},$$

не имеющая названия.

(6) Несколько слов о применениях симметрий.

Групповая классификация. Пусть $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}' \subset J^k(\pi)$ — уравнения. Очевидно, необходимым условием их эквивалентности является изоморфность соответствующих алгебр симметрий. В частности, если уравнение $\mathscr{E}$ содержит параметр (возможно, функциональный), то от этого параметра зависит, вообще говоря, и алгебра его симметрий. Опыт показывает, что «максимальная симметричность», как правило, соответствует физически (или геометрически) интересным случаям. Как практически работает групповая классификация, иллюстрируют задачи 95–97.

Размножение решений. Пусть f — решение уравнения $\mathscr{E} \subset J^k(\pi)$, т.е. такое сечение расслоения π, что график $[f]^k$ его k-джета лежит в $\mathscr{E}$. Если $g\colon J^k(\pi) \to J^k(\pi)$ — симметрия уравнения, то образ $g([f]^k)$ — также решение (возможно, обобщённое). Если X — инфинитезимальная симметрия и A_τ — соответствующая однопараметрическая группа преобразований, то семейство подмногообразий $A_\tau[f]^k \subset \mathscr{E}$ состоит из обобщённых решений (а при малых τ — из классических). Как следует из задач 99 и 100, для того, чтобы найти действие A_τ на f, нужно решить эволюционное уравнение

$$\frac{\partial f_\tau}{\partial \tau} = \varphi\left(x^1, \dots, x^n, f_\tau, \frac{\partial f_\tau}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f_\tau}{\partial x^n}\right)$$

с начальными данными $f_\tau|_{\tau=0} = f$ (или систему аналогичных уравнений, если $\dim \pi > 1$).

Пример 10. Пусть X — галилеева симметрия уравнения Бюргерса (пример 9) и $u = f(x,t)$ — некоторое решение этого уравнения. Тогда сдвиги по траекториям векторного поля X преобразуют это решение в семейство решений $u_\tau = f(t\tau + x, t) + \tau$.

Редукции. Пусть снова g — симметрия уравнения $\mathscr{E}$. Решение f называется инвариантным (стационарным) относительно этой симметрии, если $g([f]^k) = [f]^k$, т.е. график его k-джета переходит в себя. На инфинитезимальном уровне, в силу задач 99 и 100, инвариантные относительно симметрии $Y = X_\varphi$ решения должны удовлетворять уравнениям

$$\varphi\left(x^1, \dots, x^n, f, \frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}\right) = 0.$$

Система, состоящая из уравнения $\mathscr{E}$ и условий инвариантности, называется редукцией уравнения $\mathscr{E}$ относительно симметрии X_φ и содержит $n-1$ независимую переменную. В частности, редукции уравнений с двумя независимыми переменными являются обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Пример 11. Если уравнение допускает две трансляции (скажем, по x и t; это означает, что оно не зависит явно от этих переменных), то решения, инвариантные относительно симметрии $vu_x + u_t$, $v = \mathrm{const}$, называются бегущими волнами. Такие решения важны, например, во многих задачах гидродинамики. Опишем бегущие волны, удовлетворяющие уравнению Бюргерса. Всякое такое решение подчиняется уравнению

$$vu_x + u_t = 0,$$

т.е. его первые интегралы находятся из условий

$$\frac{dx}{v} = \frac{dt}{1} = \frac{du}{0}.$$

Значит, $u = u(\xi)$, где $\xi = x - vt$. Подставляя в уравнение Бюргерса, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$-vu' = uu' + u'',$$

где $u' = du/d\xi$. Следовательно,

$$2\frac{du}{d\xi} + u^2 + 2vu + a = 0, \qquad a = \mathrm{const},$$

и мы получаем три класса решений

$$u = \begin{cases} -\alpha \operatorname{tg}\left(\alpha\frac{\xi-\beta}{2}\right) - v, & \text{если } a - v^2 > 0, \\ \frac{2}{\xi-\beta} - v, & \text{если } a - v^2 = 0, \\ -\alpha \operatorname{cth}\left(\alpha\frac{\xi-\beta}{2}\right) - v, & \text{если } a - v^2 < 0, \end{cases}$$

где $\alpha = \sqrt{|v^2 - a|}$, $\beta = \mathrm{const}$.

Пример 12. Рассмотрим решения уравнения Бюргерса, инвариантные относительно галилеевой симметрии $\varphi = tu_x + 1$. Они должны удовлетворять характеристической системе

$$\frac{dx}{t} = \frac{dt}{0} = -\frac{du}{1},$$

полный интеграл которой имеет вид

$$\Psi(x + tu, t) = \mathrm{const}.$$

Значит,
$$u = \psi(t) - \frac{x}{t}.$$
Подставляя в уравнение Бюргерса, получаем $t\psi' + \psi = 0$, т.е. $u = (k - x)/t$, $k = \mathrm{const}$.

Задачи

Задача 85. Рассмотрим пример 4.

(1) Покажите, что $\mathscr{E}_\omega$ — дифференциальное уравнение второго порядка.
(2) Выпишите это уравнение в локальных координатах.
(3) Сформулируйте условия на формы ω и ω', при которых уравнения $\mathscr{E}_\omega$ и $\mathscr{E}_{\omega'}$ одинаковы.
(4) Каким условиям должна удовлетворять форма ω, чтобы (а) уравнение $\mathscr{E}_\omega$ было квазилинейным? (б) линейным?

Задача 86. Докажите, что все уравнения Бюргерса попарно эквивалентны.

Задача 87. Постройте пример уравнения, все симметрии которого тривиальны.

Задача 88. Данное выше определение симметрии использует вложение $\mathscr{E} \subset J^k(\pi)$. Но, очевидно, одно и то же уравнение можно по-разному вкладывать в пространства джетов (приведите примеры). Возможна, однако, альтернативная точка зрения, не апеллирующая к этому вложению. Именно, скажем, что диффеоморфизм многообразия $\mathscr{E}$ является внутренней симметрией уравнения, если он сохраняет распределение $\mathscr{C}^{\mathscr{E}}$. Очевидно, что всякая симметрия в смысле п. 3 определяет внутреннюю симметрию, но обратное, вообще говоря, не верно. Приведите примеры.

Задача 89 (метод характеристик)**.** Покажите, что решение задачи Коши для скалярных уравнений первого порядка сводится к интегрированию характеристического векторного поля (пример 8). Дайте попутно геометрическое определение данных Коши.

Задача 90. Опишите симметрии уравнения Монжа–Ампера $\mathscr{E}_\omega$ в терминах формы ω.

Задача 91. Восстановите детали вычислений, приведённых в примере 9.

Задача 92. Опишите алгебру Ли симметрий уравнения теплопроводности $u_t = u_{xx}$.

Задача 93. Опишите алгебру Ли симметрий уравнения Кортевега–де Фриза.

Задача 94. Опишите алгебру Ли симметрий уравнения синус Гордона.

Задача 95. Дайте групповую классификацию класса уравнений вида $u_t = f(u, u_x) + u_{xx}$.

Задача 96. Дайте групповую классификацию класса уравнений вида $u_t = f(u, u_x) + u_{xxx}$.

Задача 97. Дайте групповую классификацию класса уравнений вида $u_{xy} = f(u)$.

Задача 98. Приведите пример, в котором симметрия переводит классическое решение уравнения в обобщённое.

Задача 99. Пусть $\mathscr{E} \subset J^k(\pi)$, $\dim\pi = 1$ и $X = X_\varphi$ — инфинитезимальная симметрия, $\varphi = \varphi(x^1, \dots, x^n, u, u_1, \dots, u_n)$. Докажите, что решения f_τ, полученные из решения $u = f(x^1, \dots, x^n)$ преобразованиями соответствующей однопараметрической группы сдвигов A_τ удовлетворяют следующей граничной задаче

$$\frac{\partial f_\tau}{\partial\tau} = \varphi\left(x^1, \dots, x^n, f_\tau, \frac{\partial f_\tau}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f_\tau}{\partial x^n}\right), \qquad f_\tau|_{\tau=0} = f.$$

Задача 100. Пусть $\dim\pi > 1$ и $Y = X^{(k)}$ — симметрия уравнения $\mathscr{E}$, полученная поднятием векторного поля $X \in D(J^0(\pi))$ (теорема Ли–Беклунда). Рассмотрим вектор-функцию $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^m)$, где

$$\varphi^j = \mathrm{i}_{X^{(1)}}\bigl(du^j - \sum_i u_i^j\, dx^i\bigr)$$

и назовём её производящим сечением поля Ли Y.

(1) При каких условиях вектор-функция $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^m)$ на $J^1(\pi)$ является производящим сечением поля Ли?
(2) Сформулируйте и докажите аналог утверждения из задачи 99 для многомерных расслоений π.

Задача 101. Опишите редукции уравнения Бюргерса по масштабной симметрии и симметрии, квадратичной по t (пример 9)

Задача 102. Бегущие волны уравнения Кортевега–де Фриза называются солитонами. Опишите их.

Задача 103. Бегущие волны уравнения синус Гордона называются кинками (и антикинками). Опишите их.

Лекция 9 (25.11.2015)

Теорема Бьянки–Ли

Теорема Бьянки–Ли связывает симметрийные свойства обыкновенных дифференциальных уравнений с интегрируемостью этих уравнений в квадратурах.

(1) Пусть D — распределение на многообразии N. Функция $f \in C^\infty(N)$ называется первым интегралом этого распределения, если $X(f) = 0$ для любого X, лежащего в модуле векторных полей $\mathscr{D}$.

(2) Пусть D интегрируемое распределение и f — его первый интеграл. Тогда, в силу определения, любое поле $X \in \mathscr{D}$ касается гиперповерхностей уровня

$$N_c = \{\, x \in N \mid f(x) = c \,\}, \qquad c = \text{const}.$$

Поэтому распределение D индуцирует на каждой гиперповерхности уровня интегрируемые распределения той же размерности, но при этом размерность самого многообразия падает на единицу. Заметим, что такая редукция требует решения только функциональных уравнений.

(3) Если известны r первых интегралов $f_1, \ldots, f_r$ и они независимы (т.е. дифференциальные формы $df_1, \ldots, df_r$ линейно независимы в каждой точке $x \in N$), решая только функциональные уравнения, мы редуцируем задачу на совместные гиперповерхности уровня

$$N_{c_1,\ldots,c_r} = \{\, x \in N \mid f_i(x) = c_i,\ i = 1, \ldots, r \,\}, \qquad c_i = \text{const}.$$

В частности, если количество известных интегралов совпадает с коразмерностью распределения, то полученные гиперповерхности в точности совпадают с максимальными интегральными многообразиями.

(4) Подпространство $\mathscr{Y}$ алгебры Ли симметрий интегрируемого распределения D называется невырожденным, если для любого векторного поля $Y \in \mathscr{Y}$ из равенства $Y_x = 0$ для некоторой точки $x \in N$ следует, что $Y = 0$.

(5) Пусть $\mathscr{Y}$ — невырожденное подпространство максимальной размерности (см. задачу 107). Предположим, что $\dim M = n$ и $\operatorname{rank} D = p$. Рассмотрим образующие $\rho^1, \ldots, \rho^{n-p}$ модуля Λ_D. Пусть $X_1, \ldots, X_{n-p}$ — базис пространства $\mathscr{Y}$. Тогда матрица

$$A = \left(\mathrm{i}_{X_i}\rho^j\right), \qquad i, j = 1, \ldots, n-p,$$

обратима в силу невырожденности подпространства $\mathscr{Y}$. Перейдём в модуле Λ_D к новой системе образующих, полагая

$$\rho \mapsto A^{-1}\rho, \qquad \rho = (\rho^1, \ldots, \rho^{n-p})^t. \tag{4}$$

Тогда в новом базисе выполнены равенства

$$\mathrm{i}_{X_i}\rho^j = \delta_i^j, \qquad i, j = 1, \ldots, n-p. \tag{5}$$

(6) Для доказательства теоремы Бьянки–Ли нам понадобится следующее

Предложение 12. *Пусть D — интегрируемое распределение на многообразии M, $\operatorname{rank} D = p$, $\dim M = n$, определённое системой 1-форм $\rho^1, \dots, \rho^{n-p}$. Пусть $X_1, \dots, X_{n-p}$ — базис невырожденной алгебры симметрий $\mathscr{Y}$ с коммутационными соотношениями*

$$[X_i, X_j] = \sum_{s=1}^{n-p} c_{ij}^s X_s, \qquad i, j = 1, \dots, n-p.$$

Тогда, если формы ρ^i и поля X_j выбраны так, что выполняются равенства (5), *то*

$$d\rho^i = -\frac{1}{2} \sum_{j,s} c_{js}^i \rho^j \wedge \rho^s. \tag{6}$$

Равенства (6) называются уравнениями Маурера–Картана.

Доказательство. Поскольку распределение D интегрируемо, по теореме Фробениуса имеем

$$d\rho^j = \sum_s \omega_s^j \wedge \rho^s, \qquad \omega_s^j \in \Lambda^1(N). \tag{7}$$

Рассмотрим поле X_i. Поскольку оно симметрия, его действие должно сохранять модуль Λ_D:

$$\mathrm{L}_{X_i}(\rho^j) = \mathrm{i}_{X_i}(\,d\rho^j) + \,d(\mathrm{i}_{X_i}(\rho^j)) = \mathrm{i}_{X_i}(\,d\rho^j) + \,d(\delta_i^j) = \\ = \mathrm{i}_{X_i}(\,d\rho^j) \in \Lambda_D.$$

С другой стороны, подставляя X_i в равенство (7), получаем

$$\mathrm{i}_{X_i}(d\rho^j) = \mathrm{i}_{X_i}\Big(\sum_s \omega_s^j \wedge \rho^s\Big) = \sum_s \Big(\mathrm{i}_{X_i}(\omega_s^j)\rho^j - \mathrm{i}_{X_i}(\rho^s)\omega_s^j\Big) = \\ = \sum_s \Big(\mathrm{i}_{X_i}(\omega_s^j)\rho^s - \delta_i^s \omega_s^j\Big) = \sum_s \mathrm{i}_{X_i}(\omega_s^j)\rho^s - \omega_i^j \in \Lambda_D.$$

Следовательно, формы ω_i^j лежат в модуле Λ_D и, значит, имеют вид $\omega_i^j = \sum_s a_{is}^j \rho^s$. Поэтому

$$d\rho^j = \sum_{i<s} a_{is}^j \rho^j \wedge \rho^s,$$

откуда следует, что

$$d\rho^j(X_i, X_s) = a_{is}^j.$$

Но

$$d\rho^j(X_i, X_s) = \mathrm{L}_{X_i}(\mathrm{i}_{X_s}(\rho^j)) - \mathrm{L}_{X_s}(\mathrm{i}_{X_i}(\rho^j)) - \mathrm{i}_{[X_i, X_s]}(\rho^j) = \\ = X_i(\delta_s^j) - X_s(\delta_i^j) - \rho^j\Big(\sum_k c_{is}^k X_k\Big) = -\sum_k c_{is}^k \delta_k^j = -c_{is}^j.$$

т.е. $a^j_{is} = -c^j_{is}$. Иными словами

$$d\rho^j = -\sum_{i<s} c^j_{is}\rho^i \wedge \rho^s = -\frac{1}{2}\sum_{i,s} c^j_{is}\rho^i \wedge \rho^s,$$

что и требовалось доказать. □

(7) Простым и важным следствием предложения 12 является

Предложение 13. *Пусть выполнены условия предложения 12 и алгебра Ли $\mathscr{Y}$ абелева. Тогда все формы ρ^j, порождающие модуль Λ_D, замкнуты.*

(8) Допустим, что нам известна невырожденная абелева алгебра симметрий максимальной размерности (равной $n-p$). Тогда построение замкнутых форм $\rho^1, \ldots, \rho^{n-p} \in \Lambda_D$ осуществляется средствами линейной алгебры (см. преобразование (4)). Предположим, что эти формы известны. Тогда локально (или глобально, если N — односвязное многообразие) они имеют вид

$$\rho^j = df_j, \qquad f^j \in C^\infty(M).$$

В силу задачи 105 функции f^j являются первыми интегралами распределения D, и они имеют вид

$$f_j(x) = \int_\gamma \rho^j,$$

где γ — произвольный путь, соединяющий точку $x \in M$ с некоторой фиксированной точкой x_0. Найдя все функции $f_1, \ldots, f_{n-p}$, мы проинтегрируем распределение D.

(9) Пусть, как и выше, $\mathscr{Y}$ — невырожденная алгебра Ли симметрий максимальной размерности. Рассмотрим её коммутант

$$\mathscr{Y}^{(1)} = \left\{ \sum_i [Y_i, Z_i] \mid Y_i, Z_i \in \mathscr{Y} \right\}$$

и предположим, что $\mathscr{Y}^{(1)} \neq \mathscr{Y}$. Выберем базис пространства $\mathscr{Y}$ таким образом, что

$$X_1, \ldots, X_r \notin \mathscr{Y}^{(1)}, \qquad X_{r+1}, \ldots, X_{n-p}\mathscr{Y}^{(1)}.$$

Тогда $c^k_{ij} = 0$ для всех $k = 1, \ldots, r$ и, значит, в условиях предложения 12 выполняются равенства

$$d\rho^1 = \cdots = d\rho^r = 0.$$

Рассмотрим соответствующие первые интегралы и редуцируем распределение D на их общие гиперповерхности уровня $N_{c_1,\ldots,c_r}$. Это понижает размерность задачи до $n-r$.

(10) Рассмотрим производный ряд

$$\mathscr{Y} \supset \mathscr{Y}^{(1)} \supset \dots \supset \mathscr{Y}^{(i)} \supset \dots$$

алгебры Ли $\mathscr{Y}$, где $\mathscr{Y}^{(i)} = \big(\mathscr{Y}^{(i-1)}\big)^{(1)}$, и предположим, что она разрешима, т.е. $\mathscr{Y}^{(i)} = 0$ для некоторого $i \geq 1$. Выполняя последовательно редукции, описанные в п. 9, мы получаем следующий результат:

Предложение 14. *Если у интегрируемого распределения коразмерности k известна невырожденная k-мерная разрешимая алгебра Ли симметрий, то его можно проинтегрировать в квадратурах, т.е. полный набор его первых интегралов можно найти путём интегрирования 1-форм и решения функциональных уравнений.*

(11) Вернёмся к дифференциальным уравнениям и рассмотрим обыкновенное скалярное уравнение порядка k, т.е. подмногообразие $\mathscr{E} \subset J^k(\pi)$, $\dim M = 1$, $\operatorname{rank} \pi = 1$. Будем считать что все точки $\theta \in \mathscr{E}$ регулярны (см. п. 1 лекции 8). Поскольку распределение Картана на $\mathscr{E}$ интегрируемо (задача 108) и его коразмерность равна k, непосредственным следствием предложения 14 является классическая

Теорема Бьянки–Ли. *Если у обыкновенного дифференциального уравнения порядка k известна k-мерная невырожденная разрешимая алгебра Ли симметрий, то оно интегрируемо в квадратурах.*

(12) Из теоремы Бьянки–Ли тривиальным образом следует, что если мы знаем одну симметрию уравнения первого порядка, то его можно проинтегрировать в квадратурах.

Пример 13 (уравнения с разделяющимися переменными)**.** Рассмотрим уравнение

$$\frac{du}{dx} = f(u)g(x).$$

Векторное поле $X = f\partial/\partial u$ на поверхности $\mathscr{E} = \{u_1 = fg\}$ является его симметрией:

$$\omega_{\mathscr{E}} = \omega_0|_{\mathscr{E}} = du - fg\,dx, \qquad \mathrm{L}_X(\omega_{\mathscr{E}}) = \frac{df}{du}\omega_{\mathscr{E}}.$$

Поскольку $\mathrm{i}_X(\omega_{\mathscr{E}}) = f$, форма $\omega_{\mathscr{E}}/f$ должна быть точной. Так оно и есть:

$$\frac{\omega_{\mathscr{E}}}{f} = \frac{du}{f(u)} - g(x)\,dx = d\left(\int \frac{du}{f(u)} - \int g(x)\,dx\right).$$

Значит,

$$\int \frac{du}{f(u)} - \int g(x)\,dx = \mathrm{const}$$

— общее решение.

(13) Рассмотрим ещё один пример из учебников.

Пример 14 (линейные неоднородные уравнения)**.** Пусть

$$a_0 u + a_1 \frac{du}{dx} + \dots + a_k \frac{d^k u}{dx^k} = a$$

— линейное неоднородное уравнение порядка k. Если φ — решение соответствующего однородного уравнения, то векторное поле

$$\Phi = \varphi \frac{\partial}{\partial u} + \varphi' \frac{\partial}{\partial u_1} + \dots + \varphi^{(k)} \frac{\partial}{\partial u_k}$$

— симметрия, и все такие симметрии попарно коммутируют. Если $\varphi_0, \dots, \varphi_{k-1}$ — фундаментальная система решений, то симметрии $\Phi_0, \dots, \Phi_{k-1}$ образуют невырожденную абелеву алгебру Ли размерности k. Очевидно, $\mathrm{i}_{\Phi_i}(\omega_j) = \varphi_i^{(j)}$, где $\omega_j = du_j - u_{j+1}\,dx$, и поэтому переход к соответствующей системе точных форм даётся преобразованием

$$\begin{pmatrix} \omega_0 \\ \omega_1 \\ \dots \\ \omega_{k-1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_0 & \varphi_0' & \dots & \varphi_0^{(k-1)} \\ \varphi_1 & \varphi_1' & \dots & \varphi_1^{(k-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{k-1} & \varphi_{k-1}' & \dots & \varphi_{k-1}^{(k-1)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \omega_0 \\ \omega_1 \\ \dots \\ \omega_{k-1} \end{pmatrix}$$

т.е. «подкруткой» на вронскиан, что полностью согласуется с классическим методом решения этих уравнений.

(14) Пусть

$$\mathscr{E} = \{u_k = f(x, u, \dots, u_{k-1})\}$$

обыкновенное уравнение порядка k, разрешённое относительно старшей производной. Тогда распределение Картана на $\mathscr{E}$ порождено векторным полем

$$D_x = D_x^{\mathscr{E}} = \frac{\partial}{\partial x} + u_1 \frac{\partial}{\partial u_0} + \dots u_{k-1} \frac{\partial}{\partial u_{k-2}} + f \frac{\partial}{\partial u_{k-1}}. \tag{8}$$

Траектории этого поля суть решения, и, собственно, поэтому решение обыкновенных уравнений сводится к интегрированию векторных полей.

(15) Поскольку распределение $\mathscr{C}$ на $\mathscr{E}$ интегрируемо, поле D_x порождает идеал характеристических симметрий (см. задачу 74). Фактор алгебры Ли всех симметрий распределения $\mathscr{C}^{\mathscr{E}}$ по этому идеалу обозначается через $\mathrm{sym}(\mathscr{E})$, и его элементы суть нетривиальные симметрии уравнения.

(16) В каждой точке $\theta \in \mathscr{E}$ имеет место разложение

$$T_\theta \mathscr{E} = \mathscr{C}_\theta \oplus T_\theta^v \mathscr{E},$$

где $T^v_\theta\mathscr{E}$ — касательное пространство к слою расслоения $\mathscr{E} \to M$. Это приводит к разложению модуля векторных полей на уравнении в прямую сумму

$$D(\mathscr{E}) = \mathscr{C} \oplus D^v(\mathscr{E}),$$

где $D^v(\mathscr{E})$ — подмодуль вертикальных полей, т.е. таких, что $X(x) = 0$. Для каждого векторного поля это разложение даётся формулой

$$Y = Y(x)D_x + \big(Y - Y(x)D_x\big).$$

(17) Из сказанного выше вытекает

Предложение 15. *Существует взаимно-однозначное соответствие между элементами алгебры Ли* $\mathrm{sym}(\mathscr{E})$ *и такими вертикальными полями* $Y \in D^v(\mathscr{E})$*, что* $[Y, D_x] = 0$.

Всякое вертикальное поле имеет вид

$$Y = \varphi\frac{\partial}{\partial u} + \varphi_1\frac{\partial}{\partial u_1} + \dots + \varphi_{k-1}\frac{\partial}{\partial u_{k-1}}. \tag{9}$$

Предложение 16. *Поле* (9) *является симметрией уравнения* $\mathscr{E}$ *тогда и только тогда, когда* $\varphi_i = D_x^i(\varphi)$ *и функция* φ *удовлетворяет линейному уравнению*

$$\ell_{\mathscr{E}}(\varphi) \equiv D_x^k(\varphi) - \frac{\partial f}{\partial u}\varphi - \dots - \frac{\partial f}{\partial u_{k-1}}D_x^{k-1}(\varphi). \tag{10}$$

Функция φ называется производящей функцией симметрии Y; при этом мы пишем $Y = X_\varphi$. Оператор $\ell_{\mathscr{E}}$ из (10) называется линеаризацией уравнения $\mathscr{E}$.

Задачи

Задача 104. Докажите, что у распределения Картана на $J^k(\pi)$ нет нетривиальных первых интегралов.

Задача 105. Докажите, что f — первый интеграл тогда и только тогда, когда $df \in \Lambda_D$.

Задача 106. Докажите, что для невырожденного подпространства $\mathscr{Y}$ выполнено неравенство $\dim\mathscr{Y} \le \operatorname{codim} D$.

Задача 107. Докажите предложение 14.

Задача 108. Докажите, что распределение Картана на обыкновенных дифференциальных уравнениях вполне интегрируемо.

Задача 109. Сформулируйте и докажите теорему Бьянки–Ли для определённых систем обыкновенных уравнений, т.е. подмногообразий $\mathscr{E} \subset J^k(\pi)$, $\dim M = 1$, $\operatorname{codim}\mathscr{E} = \operatorname{rank}\pi$.

Задача 110. Рассуждая так же, как в примере 13, проинтегрируйте однородные уравнения первого порядка.

Задача 111. Какие симметрии отвечают за понижение порядка в уравнениях

(1) $f(x, u', u'') = 0$,
(2) $f(u, u', u'') = 0$?

Задача 112. Докажите предложение 15.

Задача 113. Докажите предложение 16.

Задача 114. Сформулируйте и докажите аналог предложения 16 для систем обыкновенных уравнений.

Задача 115. Какова связь между производящими функциями (сечениями) полей Ли, рассмотренными в лекции 7, и производящей функцией φ из предложения 16?

Задача 116. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{du}{dx} + f(u).$$

У всех таких уравнений уравнений есть симметрия $\partial/\partial x$ (трансляция по x). Опишите все функции f, при которых это уравнение допускает дополнительную симметрию вида X_φ, где $\varphi = a(x)u_x + b(x)$ и, пользуясь теоремой Бьянки–Ли, проинтегрируйте его.

Список литературы

[1] Джет Неструев, *Гладкие многообразия и наблюдаемые*, М.: МЦНМО, 2000, 300с, `http://diffiety.ac.ru/books/texts/nestruev.pdf`

[2] Joseph Krasil′shchik, Barbara Prinari, *Lectures on Linear Differential Operators over Commutative Algebras*, `http://diffiety.ac.ru/preprint/99/01_99.pdf`

[3] М. Атья, И. Макдональд, *Введение в коммутативную алгебру*, Факториал Пресс, Серия: XX век. Математика и механика, 2003 г., 144 с.

[4] С. Маклейн, *Категории для работающего математика*, Москва: Физматлит, 2004, 349 с.

[5] Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В. *Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений.* М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 336 с.

[6] Виноградов А.М., Красильщик И.С. (Ред.) *Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики.* Серия: XX век. Математика и механика, Факториал, 2005, Вып. 9, Изд. 2. 380 с.

[7] I. S. Krasil'shchik and A. M. Verbovetsky, *Homological methods in equations of mathematical physics,* Open Education & Sciences, Opava, 1998, `arXiv:math/9808130`