

И.С. Красильщик

**Линейные дифференциальные операторы над
коммутативными алгебрами и геометрия пространств джетов**

**Независимый московский университет
Осенний семестр 2015–2016 гг.**

Предупреждение. Здесь — краткое содержание лекций и задачи к ним. Распределение материала по лекциям не всегда полностью соответствует видеоверсии.

Текст обновляется по мере чтения лекций. Вопросы можно посылать на мою почту.

СОДЕРЖАНИЕ

Лекция 1 (09.09.2015)	2
Лекция 2 (16.09.2015)	3
Лекция 3 (23.09.2015)	4
Лекция 4 (30.09.2015)	8
Лекция 5 (07.10.2015)	11
Лекция 6 (14.10.2015)	17
Лекция 7 (28.10.2015)	20
Лекция 8 (18.11.2015)	25
Список литературы	32

Лекция 1 (09.09.2015)

Основные функторы дифференциального исчисления

- (1) $\mathbb{R}$ -точки алгебры $C^\infty(M)$, гомеоморфность M и $|C^\infty(M)|_{\mathbb{R}}$, где $|A|_{\mathbb{K}}$ обозначает множество $\mathbb{K}$ -точек $\mathbb{K}$ -алгебры A
- (2) Кольца, поля, алгебры, модули, категория $\mathcal{M}od(A)$, $\text{hom}_A(P, Q)$, $\text{hom}_{\mathbb{K}}(P, Q)$, тензорное произведение, свободные и проективные модули
- (3) Категории, функторы, естественные преобразования. Изоморфность $\mathcal{P}\mathcal{M}od(C^\infty(M))$ и $\mathcal{V}ect(M)$
- (4) Векторные поля и дифференцирования
- (5) Линейные дифференциальные операторы $P \rightarrow Q$. Случай $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Простейшие свойства

Задача 1. Если M — компактное многообразие, то любой максимальный идеал алгебры $C^\infty(M)$ имеет вид $\mu_x = \{f \in C^\infty(M) \mid f(x) = 0\}$, $x \in M$. В некомпактном случае это не так. Постройте контрпример.

Задача 2. Пусть $A = C^0(\mathbb{R}^1)$ — алгебра непрерывных функций на прямой. Опишите $\text{Diff}_*(A)$.

Задача 3. Пусть A — $\mathbb{K}$ -алгебра и P, Q — A -модули. Докажите, что тождественные отображения

$$\text{id}: \text{Diff}_k(P, Q) \rightarrow \text{Diff}_k^+(P, Q), \quad \text{id}: \text{Diff}_k^+(P, Q) \rightarrow \text{Diff}_k(P, Q)$$

являются дифференциальными операторами порядка $\leq k$.

Задача 4. Мы привыкли к тому, что любой дифференциальный оператор можно построить из дифференцирований и функций, т.е. алгебра $\text{Diff}_*(C^\infty(\mathbb{R}^n))$ порождается элементами из $\text{Diff}_1(C^\infty(\mathbb{R}^n))$. Для произвольной алгебры это не так. Постройте контрпример.

Более сложный вопрос: какие условия на алгебру A обеспечивают порождаемость всех операторов операторами первого порядка?

Задача 5. Пусть A — $\mathbb{R}$ -алгебра линейных дифференциальных операторов $\Delta: C^\infty(\mathbb{R}^1) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^1)$ с постоянными коэффициентами.

- (1) Опишите $|A|_{\mathbb{R}}$.
- (2) Опишите $\text{Diff}_*(A)$.

Задача 6. Рассмотрим $\mathbb{R}$ -алгебру полиномиальных функций на кресте $A = \mathbb{R}[x, y]/(xy)$.

- (1) Опишите $|A|_{\mathbb{R}}$.
- (2) Опишите $\text{Diff}_*(A)$.

Задача 7. Пусть m и $n > 1$ — натуральные и $A = \mathbb{Z}_n[x]/(x^m)$.

- (1) Опишите $|A|_{\mathbb{Z}_n}$.
- (2) Опишите $\text{Diff}_*(A)$.

Лекция 2 (16.09.2015)

Символы

(1) Зафиксируем обозначения:

- $\mathbb{k}$ — поле, A — $\mathbb{k}$ -алгебра, $|A|_{\mathbb{k}} = \{ \varphi: A \rightarrow \mathbb{k} \mid \varphi \text{ — эпи} \}$ — пространство $\mathbb{k}$ -точек
- $\text{Diff}_k^{(+)}(P, Q) = \{ \Delta \in \text{hom}_{\mathbb{k}}(P, Q) \mid (\delta_{a_0} \circ \dots \circ \delta_{a_k})(\Delta) = 0 \}$ — бимодуль дифференциальных операторов порядка $\leq k$
- В частности, $\text{Diff}_k^{(+)}(P) = \text{Diff}_k^{(+)}(A, P)$
- $\text{Diff}_*^{(+)}(P, Q) = \cup_{k \geq 0} \text{Diff}_k^{(+)}(P, Q)$
- $D(P) = \{ X \in \text{hom}_{\mathbb{k}}(A, P) \mid X(ab) = aX(b) + bX(a) \} \subset \text{Diff}_1^{(+)}(P)$ — модуль P -значных дифференцирований

(2) $\text{Diff}_*^{(+)}(P, P)$ — ассоциативная алгебра с фильтрацией, $\text{Diff}_*^{(+)}(P, Q)$ — левый $\text{Diff}_*^{(+)}(P, P)$ - и правый $\text{Diff}_*^{(+)}(Q, Q)$ -модуль с фильтрацией. При этом $a(\Delta \cdot \nabla) = (a\Delta) \cdot \nabla$, $a^+(\Delta \cdot \nabla) = \Delta \cdot (a^+ \nabla)$, $(a^+ \Delta) \cdot \nabla = \Delta \cdot (a \nabla)$.

(3) Соответствующий градуированный объект $\text{Smb}_*(P, Q) = \oplus_{k=0}^{\infty} \text{Smb}_k(P, Q)$, где $\text{Smb}_k(P, Q) = \text{Diff}_k^{(+)}(P, Q) / \text{Diff}_{k-1}^{(+)}(P, Q)$ называется модулем символов. Если $\Delta \in \text{Diff}_k^{(+)}(P, Q)$ то класс смежности $\sigma_k(\Delta) \in \text{Smb}_k(P, Q)$ называется его символом. Если $s = \sigma_k(\Delta) \in \text{Diff}_k^{(+)}(P, Q)$ и $s' = \sigma_{k'}(\Delta') \in \text{Diff}_{k'}^{(+)}(Q, R)$, то по определению $s' \cdot s = \sigma_{k+k'}(\Delta' \circ \Delta)$

(4) Рассмотрим коммутативную алгебру $S = \text{Smb}_*(A)$ (задача 9). Пусть $s = \sigma_k(\Delta) \in \text{Smb}_k(A)$ и $s' = \sigma_{k'}(\Delta') \in \text{Smb}_{k'}(A)$. Определим скобку Пуассона $\{s, s'\} = \sigma_{s+s'-1}(\Delta \circ \Delta' - \Delta' \circ \Delta)$. Она $\mathbb{k}$ -линейна, кососимметрична и удовлетворяет тождеству Якоби.

(5) Скобка Пуассона определяет отображение $\partial: S \rightarrow D(S)$, $s \mapsto \{s, \cdot\}$, являющееся $D(S)$ -значным дифференцированием. Его ядро $\ker \partial = H_P^0(S)$ называется пуассоновым центром, а элементы ядра — казимирами пуассоновой структуры. Элементы образа $X_s = \{s, \cdot\}$ — это гамильтоновы векторные поля. В силу тождества Якоби $X_{\{s, s'\}} = [X_s, X_{s'}]$.

Дифференцирование $X \in D(S)$ — симметрия пуассоновой структуры, если $X\{s, s'\} = \{X(s), s'\} + \{s, X(s')\}$, и можно определить группу $H_P^1(S) = \{\text{симметрии}\} / \text{im } \partial$

(6) Вот ещё ситуация, в которой возникают пуассоновы структуры: пусть $\mathfrak{g}$ — $\mathbb{k}$ -алгебра Ли и $U(\mathfrak{g})$ — её универсальная обёртывающая. Тогда в присоединённой градуированной алгебре $S(\mathfrak{g})$ определяется естественная пуассонова структура.

Как определить $H_P^i(S)$ при $i > 1$?

Задача 8. Докажите, что при переходе к символам бимодульная структура в $\text{Diff}_k^{(+)}(P, Q)$ сливается в одну.

Задача 9. Докажите, что алгебра $\text{Smb}_*(A)$ коммутативна.

Задача 10. Опишите алгебры $\text{Smb}_*(A)$ и пространства $|\text{Smb}_*(A)|_{\mathbb{k}}$ для алгебр A из задач 5–7.

Задача 11. Докажите, что в случае $A = C^\infty(M)$ алгебра $\text{Smb}_*(A)$ совпадает с алгеброй гладких функций на T^*M , полиномиальных по слоям.

Задача 12. Докажите, что если $A = C^\infty(M)$, то $H_P^1(S)$ изоморфна первой группе когомологий де Рама многообразия M .

Задача 13. Пусть $X \in D(A) \subset \text{Diff}_1(A)$. Положим $\rho(X) = \sigma_1(X) \in \text{Smb}_1(A)$. Докажите, что при $A = C^\infty(M)$ эта конструкция даёт каноническую форму $p dq$ на T^*M .

Задача 14. Рассмотрим случай $\text{char } \mathbb{k} = 0$. Пусть $a \in A$, $s = \sigma_k(\Delta) \in \text{Smb}_k(A)$. Определим $\varphi_a: \text{Smb}_k(A) \rightarrow A$, полагая $\varphi_a(s) = \frac{1}{k!} \delta_a^k(\Delta)$. Докажите, что

- (1) $\varphi_a(ss') = \varphi_a(s)\varphi_a(s')$.
- (2) Если $A = C^\infty(M)$, то $\varphi_a = \psi_{da}^*$, где $\psi_{da}: M \rightarrow T^*M$ — сечение, соответствующее форме da .

Задача 15. Вычислите $H_P^1(\mathfrak{g})$ (см. п. 6), если

- (1) $\mathfrak{g}$ — двумерная разрешимая алгебра Ли.
- (2) $\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & k_{12} & k_{13} \\ 0 & 0 & k_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid k_{ij} \in \mathbb{k} \right\}$ — алгебра Гейзенберга.
- (3) $\mathfrak{g}$ полупростая.

ЛЕКЦИЯ 3 (23.09.2015)

Представляющие объекты

- (1) Пусть Q — A -модуль. Определим отображение $\square_k: \text{Diff}_k^+(Q) \rightarrow Q$, полагая $\square_k(\Delta) = \Delta(1)$.

Предложение 1. Оператор $\square_k$ является дифференциальным оператором порядка $\leq k$ и обладает следующим универсальным свойством: для любого $\Delta \in \text{Diff}_k(P, Q)$ найдётся такой единственный гомоморфизм ψ_Δ , что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\Delta} & Q \\ & \searrow \psi_\Delta & \nearrow \square_k \\ & \text{Diff}_k^+(Q) & \end{array}$$

коммутативна.

Таким образом, функтор $\text{Diff}_k(\bullet, Q): P \Rightarrow \text{Diff}_k^{(+)}(P, Q)$ представим.

- (2) Зафиксируем модуль P и рассмотрим тензорное произведение $A \otimes_{\mathbb{K}} P$. Пусть $\delta_a(b \otimes p) = ab \otimes p - b \otimes ap$, $a, b \in A$, $p \in P$; определим модуль k -джетов $\mathcal{J}^k(P) = A \otimes_{\mathbb{K}} P / \text{im}(\delta_{a_0} \circ \dots \circ \delta_{a_k})$ и $j_k(p) = p \bmod \text{im}(\delta_{a_0} \circ \dots \circ \delta_{a_k}) \in \mathcal{J}^k(P)$.

Предложение 2. Оператор j_k является дифференциальным оператором порядка $\leq k$ и обладает следующим универсальным свойством: для любого $\Delta \in \text{Diff}_k(P, Q)$ найдётся такой единственный гомоморфизм ψ_k^Δ , что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\Delta} & Q \\ & \searrow j_k & \nearrow \psi_k^\Delta \\ & \mathcal{J}^k(P) & \end{array}$$

коммутативна.

Итак, функтор $\text{Diff}_k(P, \bullet): Q \Rightarrow \text{Diff}_k(P, Q)$ представим. Соответствие $\mathcal{J}_{(+)}^k: P \Rightarrow \mathcal{J}_{(+)}^k(P)$ — функтор из категории A -модулей в категорию A -бимодулей.

- (3) Поскольку всякий оператор порядка $\leq k$ есть оператор порядка $\leq k+l$, имеют место коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{J}^{k+l}(P) & \xrightarrow{\nu_{k+l,k} = \psi_{k+l}^{j_k}} & \mathcal{J}^k(P) \\ & \nwarrow j_{k+l} \quad \nearrow j_k & \\ & P & \end{array}$$

Поэтому можно определить модуль $\mathcal{J}^\infty(P)$ бесконечных джетов как обратный предел и оператор $j_\infty: P \rightarrow \mathcal{J}^\infty(P)$.

- (4) Композиция $j_l \circ \Delta: P \rightarrow \mathcal{J}^l(Q)$ называется l -м (джет-) продолжением оператора Δ . Таким образом, есть коммутативная диаграмм

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{J}^{k+l}(P) & \xrightarrow{\psi_{k+l}^\Delta} & \mathcal{J}^l(Q) \\ \uparrow j_{k+l} & & \uparrow j_l \\ P & \xrightarrow{\Delta} & Q, \end{array}$$

где $\psi_{k+l}^\Delta = \psi_{k+l}^{j_l \circ \Delta}$. Из задачи 19 следует, что соответствие $\mathcal{J}^\infty: P \Rightarrow \mathcal{J}^\infty(P)$ можно понимать как функтор из категории $\mathcal{D}iff(A)$, объектами которой являются A -модули, а морфизмами — линейные дифференциальные операторы, в категорию $\mathcal{M}od(\text{Diff}_*(A))$.

- (5) Пусть $i: A \rightarrow \mathcal{J}^1(A)$ — гомоморфизм, порождённый отображением $a \mapsto a \times 1 \in A \times_{\mathbb{K}} A$ и $\Lambda^1(A) = \text{so ker } i$ (модуль 1-форм).

Определим $d: A \rightarrow \Lambda^1(A)$ (дифференциал де Рама) как композицию $j_1: A \rightarrow \mathcal{J}^1(A)$ с естественной проекцией $\mathcal{J}^1(A) \rightarrow \Lambda^1(A)$.

Предложение 3. Дифференциал де Рама является дифференцированием алгебры A со значениями в модуле $\Lambda^1(A)$, обладающим следующим свойством: для любого A -модуля P и дифференцирования $X \in D(P)$ найдётся единственный гомоморфизм ψ_X , для которого диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{X} & P \\ & \searrow d & \nearrow \psi_X \\ & \Lambda^1(A) & \end{array}$$

коммутативна.

Таким образом, функтор $D: P \Rightarrow D(P)$ представим в категории A -модулей и $D(P) = \text{hom}_A(\Lambda^1(A), P)$.

- (6) Рассмотрим свободный A -модуль с образующими d_a , $a \in A$, и соотношениями

$$d_{a+b} = d_a + d_b, \quad d_{\alpha a} = \alpha d_a, \quad d_{ab} = ad_b + bd_a, \quad a, b \in A, \quad \alpha \in \mathbb{k}.$$

Это эксплицитное описание модуля 1-форм, причём $d(a) = d_a$.

- (7) Определим модули i -форм как внешние степени $\Lambda^i(A) = \underbrace{\Lambda^1(A) \wedge \dots \wedge \Lambda^1(A)}_{i \text{ раз}}$, $i \geq 0$, и комплекс де Рама алгебры A

$$A \xrightarrow{d} \Lambda^1(A) \longrightarrow \dots \longrightarrow \Lambda^i(A) \xrightarrow{d} \Lambda^{i+1}(A) \longrightarrow \dots,$$

полагая

$$d(a da_1 \wedge \dots \wedge da_i) = da \wedge da_1 \wedge \dots \wedge da_i.$$

Очевидно, $d \circ d = 0$.

- (8) Пусть P — A -модуль. Значением P в точке $\theta \in |A|_{\mathbb{k}}$ называется фактор $P_\theta = P/(\ker \theta \cdot P)$, а значением элемента $p \in P$ — его класс $p(\theta) \in P_\theta$. Элемент называется невидимым, если его значения во всех точках тривиальны. Например, форма $de^x - e^x dx$ является невидимым элементом модуля $\Lambda^1(C^\infty(\mathbb{R}^1))$. По этой причине модуль 1-форм алгебры $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ не совпадает с модулем «геометрических» 1-форм на прямой.

Модуль называется геометрическим, если все его невидимые элементы тривиальны. Пусть $\mathcal{G}Mod(A)$ — полная подкатегория, состоящая из геометрических A -модулей. Для каждого модуля P положим

$$\mathcal{G}P = P \bigg/ \bigcap_{\theta \in |A|_{\mathbb{k}}} \ker \theta \cdot P.$$

Свойства соответствия $P \Rightarrow \mathcal{G}P$ рассмотрены в задаче 24.

Задача 16. Докажите предложение 1.

Задача 17. Докажите предложение 2.

Задача 18. В $\mathcal{J}^k(P)$ две модульных структуры, порождаемые умножениями $a(b \otimes p) = (ab) \otimes p$ и $a^+(b \otimes p) = b \otimes (ap)$. Соответствующий бимодуль обозначается $\mathcal{J}_{(+)}^k(P)$. Докажите, что тождественные отображения $\text{id} : \mathcal{J}^k(P) \rightarrow \mathcal{J}_{(+)}^k(P)$ и $\text{id} : \mathcal{J}_{(+)}^k(P) \rightarrow \mathcal{J}^k(P)$ суть дифференциальные операторы порядка $\leq k$.

Задача 19. Пусть $\Delta : P \rightarrow Q$ — дифференциальный оператор порядка $\leq k$. Докажите, что:

(1) Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{J}^{k+l+1}(P) & \xrightarrow{\psi_{k+l+1}^\Delta} & \mathcal{J}^{l+1}(Q) \\ \nu_{k+l+1, k+l} \downarrow & & \downarrow \nu_{l+1, l} \\ \mathcal{J}^{k+l}(P) & \xrightarrow{\psi_{k+l}^\Delta} & \mathcal{J}^l(Q) \end{array}$$

коммутативна, т.е. определён гомоморфизм $\psi_*^\Delta : \mathcal{J}^\infty(P) \rightarrow \mathcal{J}^\infty(Q)$.

(2) Если $\nabla : Q \rightarrow R$ — ещё один дифференциальный оператор, то $\psi_*^{\nabla \circ \Delta} = \psi_*^\nabla \circ \psi_*^\Delta$.

Задача 20. Докажите предложение 3.

Задача 21. Хотелось бы, чтобы соответствие $A \Rightarrow \Lambda^1(A)$ было функтором. Откуда куда?

Задача 22. Докажите утверждение, сформулированное в п. 6.

Задача 23. Опишите невидимые элементы модулей $\Lambda^1(C^\infty(M))$ и $\mathcal{J}^k(C^\infty(M))$.

Задача 24. Пусть A — $\mathbb{k}$ -алгебра и P — A -модуль. Докажите следующие утверждения.

- (1) Соответствие $P \Rightarrow \mathcal{G}P$ является функтором из категории $\mathcal{M}od(A)$ в $\mathcal{G}Mod(A)$.
- (2) Функторы $D : P \Rightarrow D(P)$ и $\text{Diff}_k(P, \cdot) : Q \Rightarrow \text{Diff}_k(P, Q)$ представимы в категории геометрических модулей и их представляющими объектами являются модули $\mathcal{G}\Lambda^1(A)$ и $\mathcal{G}\mathcal{J}^k(P)$ соответственно.
- (3) Если M — гладкое многообразие, то $\mathcal{G}\Lambda^1(C^\infty(M)) = \Lambda^1(M)$.

Задача 25. Пусть $\omega \in \Lambda^1(A)$ — произвольная 1-форма. Определите гомоморфизм $\varphi_\omega : \text{Smb}l_*(A) \rightarrow A$, который обобщает гомоморфизм $1f_a$, построенный в задаче 14

Лекция 4 (30.09.2015)

Скобки Схоутена–Нийенхейса и пуассоновы алгебры

- (1) Пусть P — A -модуль. Определим модули $D_i(P)$ полидифференцирований, полагая $D_0(P) = P$, $D_1(P) = D(P)$ и

$$D_i(P) = \{ X \in D(D_{i-1}(P)) \mid (X(a))(b) + (X(b))(a) = 0, \ a, b \in A \},$$

для всех $i > 1$.

Предложение 4. *Соответствие $P \Rightarrow D_i(P)$ является функтором и модуль $\Lambda^i(A)$ — его представляющий объект. Этот функтор представим и в категории геометрических модулей, и представляющим объектом является $\mathcal{G}\Lambda^1(A)$.*

- (2) Пусть $X \in D_i(A)$, $Y \in D_j(P)$. Определим элемент $X \wedge Y \in D_{i+j}(P)$, полагая $X \wedge Y = X \cdot Y$, если $i = j = 0$, и по индукции

$$(X \wedge Y)(a) = X \wedge Y(a) + (-1)^j X(a) \wedge Y, \quad i + j > 0.$$

Таким образом определённое внешнее умножение ассоциативно и косокоммутативно,

$$X \wedge Y = (-1)^{ij} Y \wedge X,$$

если $Y \in D_j(A)$.

- (3) Определим операцию внутреннего умножения (подстановки)

$$i: D_j(P) \otimes_A \Lambda^i(A) \rightarrow \begin{cases} P \otimes_A \Lambda^{i-j}(A), & j \leq i, \\ D_{j-i}(P), & j \geq i, \end{cases}$$

полагая $i(X \otimes a) = aX$ и далее по индукции

$$i(X \otimes da \wedge \omega) = i(X(a) \otimes \omega)$$

во всех случаях, когда $\deg X \geq \deg \omega$. Если $\deg X = j < \deg \omega = i$, то определим значение любого $Y \in D_{i-j}(A)$ на $i(X, \omega)$, полагая

$$\langle Y, i(X, \omega) \rangle = i(Y \wedge X, \omega),$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает естественное спаривание между $D_{i-j}(A)$ и $P \otimes \Lambda^{i-j}(A)$. Мы будем использовать обозначения

$$i_X(\omega) = \begin{cases} i(X \otimes \omega), & i \geq j, \\ 0, & i < j, \end{cases}, \quad i_\omega(X) = \begin{cases} i(X \otimes \omega), & i \leq j, \\ 0, & i > j. \end{cases}$$

- (4) Пусть $X \in D_j(A)$. Определим производную Ли $L_X: \Lambda^i(A) \rightarrow \Lambda^{i-j+1}(A)$ вдоль X , полагая $L_X = [d, i_X]$, где $[d, i_X]$ — суперкоммутатор:

$$[d, i_X] = d \circ i_X - (-1)^j i_X \circ d.$$

Теорема 1. Для любых двух элементов $X \in D_i(A)$ и $Y \in D_j(A)$ существует такой элемент $[X, Y] \in D_{i+j-1}(A)$, что

$$[L_X, L_Y] = L_{[X, Y]}.$$

Это свойство определяет $[X, Y]$ однозначно.

Набросок доказательства. Положим $[X, a] = X(a)$, $[a, Y] = (-1)^j Y(a)$, $a \in A$, и по индукции

$$[X, Y](a) = [X, Y(a)] + (-1)^{j-1} [X(a), Y], \quad i, j > 0.$$

Далее см. задачу 30. $\square$

Элемент $[X, Y]$ называется скобкой Схоутена–Нийенхейса (или просто скобкой Схоутена) дифференцирований X и Y .

Предложение 5. Пусть $X \in D_i(A)$, $Y \in D_j(A)$, $Z \in D_k(A)$. Тогда

- (a) $[X, Y] + (-1)^{(i-1)(j-1)} [Y, X] = 0$,
- (b) $[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + (-1)^{(i-1)(j-1)} [Y, [X, Z]]$,
- (c) $[X, Y \wedge Z] = [X, Y] \wedge Z + (-1)^{(i-1)j} Y \wedge [X, Z]$,
- (d) $[X, Y] = [X, Y]$, если $i = j = 1$,
- (e) $i_{[X, Y]} = (-1)^i [L_X, i_Y]$.

(5) С этого момента будем считать, что $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$.

Бидифференцирование $\mathcal{P} \in D_2(A)$ называется пуассоновой структурой, если $[\mathcal{P}, \mathcal{P}] = 0$, а пара $(A, \mathcal{P})$ называется пуассоновой алгеброй. Определим скобку Пуассона $\{a, b\}_{\mathcal{P}} = \mathcal{P}(a, b)$, $a, b \in A$, и оператор $\partial_{\mathcal{P}}: D_i(A) \rightarrow D_{i+1}(A)$, полагая $\partial_{\mathcal{P}}(\Delta) = [\mathcal{P}, \Delta]$.

Предложение 6. Следующие утверждения эквивалентны:

- (a) $\mathcal{P}$ — пуассонова структура;
- (b) скобка $\{\cdot, \cdot\}_{\mathcal{P}}$ удовлетворяет тождеству Якоби;
- (c) $\partial_{\mathcal{P}}$ — дифференциал, т.е. $\partial_{\mathcal{P}} \circ \partial_{\mathcal{P}} = 0$.

Вследствие п. 5с предложения 6 возникает пуассонов комплекс

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow D(A) \longrightarrow \dots \longrightarrow D_i(A) \xrightarrow{\partial_{\mathcal{P}}} D_{i+1}(A) \longrightarrow \dots$$

Его кохомологии обозначаются через $H^i(A; \mathcal{P})$ и называются пуассоновыми.

(6) Как и в п. 5 лекции 2, определим пуассонов центр алгебры A , полагая

$$Z_{\mathcal{P}}(A) = \{a \in A \mid \{a, b\}_{\mathcal{P}} = 0 \text{ для всех } b \in A\},$$

дифференцирования вида $X_a = \mathcal{P}(a)$ будем называть гамильтоновыми, а дифференцирования $X \in D(A)$, обладающими свойством

$$X\{a, b\}_{\mathcal{P}} = \{Xa, b\}_{\mathcal{P}} + \{a, Xb\}_{\mathcal{P}}, \quad a, b \in A,$$

— инфинитезимальными симметриями пуассоновой структуры (или каноническими дифференцированиями). И те, и другие образуют алгебры Ли относительно коммутатора, которые обозначаются $\text{Ham}(A; \mathcal{P})$ и $\text{Can}(A; \mathcal{P})$ соответственно.

Теорема 2. Пусть $(A, \mathcal{P})$ — пуассонова алгебра.

- (a) $H^0(A; \mathcal{P})$ совпадает с пуассоновым центром;
- (b) $H^1(A; \mathcal{P}) = \text{Can}(A; \mathcal{P}) / \text{Ham}(A; \mathcal{P})$;
- (c) $H^2(A; \mathcal{P})$ состоит из классов инфинитезимальных деформаций пуассоновой структуры $\mathcal{P}$ по модулю тривиальных;
- (d) $H^4(A; \mathcal{P})$ содержит препятствия к продолжению инфинитезимальных деформаций до формальных.

Задача 26. Докажите предложение 4.

Задача 27. Докажите, что элемент $X \wedge Y$ действительно лежит в $D_{i+j}(P)$, а внешнее умножение обладает указанными в п. 2 свойствами.

Задача 28. Докажите, что если $Y \in D_j(P)$ и $\omega \in \Lambda^i(A)$ и $j > i$, то

$$i(i(X, \omega), \theta) = \langle X, \omega \wedge \theta \rangle$$

для любой формы $\theta \in \Lambda^{j-i}(A)$.

Задача 29. Определите понятие дифференциального оператора в категории модулей над косокоммутативной алгеброй и докажите, что отображения $i_\omega: D_*(P) \rightarrow D_*(P)$ и $i_X: \Lambda^*(A) \rightarrow P \otimes_A \Lambda^*(A)$ являются дифференциальными операторами порядков i и j соответственно, где $\Lambda^*(A) = \bigoplus_{i \geq 0} \Lambda^i(A)$, $D_*(P) = \bigoplus_{j \geq 0} D_j(P)$, $\omega \in \Lambda^i(A)$, $X \in D_j(P)$.

Задача 30. Докажите теорему 1.

Задача 31. Докажите предложение 5.

Задача 32. Докажите предложение 6

Задача 33. Докажите теорему 2

Задача 34. Пуассонова структура $\mathcal{P}$ называется невырожденной, если определяемый ею гомоморфизм $\varphi_{\mathcal{P}}: \Lambda^1(A) \rightarrow D_1(A)$, $\varphi_{\mathcal{P}}(\omega) = i_\omega(\mathcal{P})$, является изоморфизмом. Докажите, что

- (1) 2-форма Ω , образом которой является бивектор $\mathcal{P}$, замкнута (т.е. A является симплектической алгеброй);
- (2) изоморфизм $\varphi_{\mathcal{P}}$ продолжается до гомоморфизмов $\varphi_{\mathcal{P}}^{(i)}: \Lambda^i(A) \rightarrow D_i(A)$. Если $\Lambda^1(A)$ — проективный модуль, то их прямая сумма $\varphi_{\mathcal{P}}^{(*)}: \Lambda^*(A) \rightarrow D_*(A)$ является изоморфизмом внешних алгебр и тогда
- (3) пуассоновы когомологии совпадают с когомологиями де Рама алгебры A .

Задача 35. В силу п. 4b предложения 31 пуассоновы когомологии наследуют скобку Схоутена. Докажите, что если структура $\mathcal{P}$ невырождена, то получаемая таким образом скобка тривиальна.

Задача 36. Используя подстановку $i_{\mathcal{P}}: \Lambda^i(A) \rightarrow \Lambda^{i-2}(A)$, определите пуассонов дифференциал $d_{\mathcal{P}}: \Lambda^i(A) \rightarrow \Lambda^{i-1}(A)$. Опишите свойства возникающих таким образом пуассоновых гомологий.

Задача 37. Пусть $(A, \mathcal{P})$ — пуассонова алгебра и $\partial_{\mathcal{P}}: D_i(A) \rightarrow D_{i+1}(A)$ — её пуассонов дифференциал. Рассмотрим форму $\omega \in \Lambda^j(A)$ и положим $L_{\omega}^{\mathcal{P}} = [\partial_{\mathcal{P}}, i_{\omega}]: D_i(A) \rightarrow D_{i-j+1}(A)$. Докажите, что равенство

$$i_{\{\omega, \theta\}_{\mathcal{P}}} = [L_{\omega}^{\mathcal{P}}, i_{\theta}], \quad \omega \in \Lambda^j(A), \theta \in \Lambda^k(A),$$

корректно определяет скобку Пуассона $\{\omega, \theta\}_{\mathcal{P}} \in \Lambda^{j+k-1}(A)$ на дифференциальных формах, которая обладает следующими свойствами:

- (1) $\{a, db\}_{\mathcal{P}} = -\{a, b\}_{\mathcal{P}},$
- (2) $\{da, db\}_{\mathcal{P}} = d\{a, b\}_{\mathcal{P}},$
- (3) $\{\omega, \theta \wedge \rho\}_{\mathcal{P}} = \{\omega, \theta\}_{\mathcal{P}} \wedge \rho + (-1)^{(j-1)k} \theta \wedge \{\omega, \rho\}_{\mathcal{P}},$
- (4) $\{\omega, \{\theta, \rho\}_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}} =$
 $= \{\{\omega, \theta\}_{\mathcal{P}}, \rho\}_{\mathcal{P}} + (-1)^{(j-1)(k-1)} \{\theta, \{\omega, \rho\}_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}},$
- (5) $\{\omega, \theta\}_{\mathcal{P}} + (-1)^{(j-1)(k-1)} \{\theta, \omega\}_{\mathcal{P}} = 0,$
- (6) $L_{\{\omega, \theta\}_{\mathcal{P}}}^{\mathcal{P}} = [L_{\omega}^{\mathcal{P}}, L_{\theta}^{\mathcal{P}}].$

Всюду выше квадратные скобки обозначают градуированные коммутаторы.

Задача 38. Две пуассоновы структуры называются совместными, если $[\mathcal{P}, \mathcal{P}'] = 0$ (это, очевидно, эквивалентно тому, что $[\partial_{\mathcal{P}}, \partial_{\mathcal{P}'}] = 0$). Докажите следующий результат:

Теорема 3 (Схема Магри). Пусть $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \in D_2(A)$ — совместные пуассоновы структуры и $H^1(A; \mathcal{P}') = 0$. Предположим, что существуют такие элементы $a_1, a_2 \in A$, что $\partial_{\mathcal{P}}(a_1) = \partial_{\mathcal{P}'}(a_2)$. Тогда:

- (1) Существуют элементы $a_3, \dots, a_s, \dots \in A$, для которых $\partial_{\mathcal{P}}(a_s) = \partial_{\mathcal{P}'}(a_{s+1})$.
- (2) Эти элементы находятся в инволюции относительно обеих скобок Пуассона, т.е.

$$\{a_i, a_j\}_{\mathcal{P}} = \{a_i, a_j\}_{\mathcal{P}'} = 0$$

для всех $i, j \geq 1$.

Лекция 5 (07.10.2015)

Скобки Фрёлихера–Нийенхейса и алгебры со связностью

- (1) Мы будем рассматривать модули $\Lambda^k(A)$ -значных дифференцирований $D(\Lambda^k(A))$. Определим внутреннее произведение $i_{\Omega}(\omega) \in$

$\Lambda^{k+j-1}(A)$ элемента $\Omega \in D(\Lambda^k(A))$ и формы $\omega \in \Lambda^j(A)$ как образ элемента $\Omega \otimes \omega$ при композиции

$$D(\Lambda^k(A)) \otimes_A \Lambda^j(A) \xrightarrow{i} \Lambda^k(A) \otimes \Lambda^{j-1}(A) \xrightarrow{\wedge} \Lambda^{k+j-1}(A),$$

где первое отображение — подстановка, введённая в п. 3 лекции 2. Тогда определена и производная Ли

$$L_\Omega = [d, i_\Omega]: \Lambda^j(A) \rightarrow \Lambda^{k+j}(A).$$

Предложение 7. Пусть $\Omega \in D(\Lambda^k(A))$, $\omega \in \Lambda^j(A)$. Тогда

$$(a) \quad L_\Omega(\omega \wedge \theta) = L_\Omega(\omega) \wedge \theta + (-1)^{kj} \omega \wedge L_\Omega(\theta),$$

$$(b) \quad [L_\Omega, d] = 0,$$

$$(c) \quad L_{\omega \wedge \Omega} = \omega \wedge L_\Omega + (-1)^{k+j} d\omega \wedge i_\Omega$$

для любой формы $\theta \in \Lambda^*(A)$.

- (2) Пусть $\Omega \in D(\Lambda^k(A))$, $\Theta \in D(\Lambda^l(A))$. Рассмотрим коммутатор производных Ли $[L_\Omega, L_\Theta]$.

Предложение 8. Равенство

$$[L_\Omega, L_\Theta] = L_{[\Omega, \Theta]}$$

корректно определяет дифференцирование $[\Omega, \Theta] \in D(\Lambda^{k+l}(A))$.

Элемент $[\Omega, \Theta]$ называется скобкой Фрёлихера–Нийенхейса (или просто скобкой Нийенхейса) дифференцирований Ω и Θ . Основные свойства этой скобки сформулированы в следующем утверждении:

Предложение 9. Для любых дифференцирований $\Omega \in D(\Lambda^k(A))$, $\Theta \in D(\Lambda^l(A))$ и $\Xi \in D(\Lambda^m(A))$ имеют место равенства

$$(a) \quad [\Omega, \Theta] + (-1)^{kl} [\Theta, \Omega] = 0,$$

$$(b) \quad [\Omega, [\Theta, \Xi]] = [[\Omega, \Theta], \Xi] + (-1)^{kl} [\Theta, [\Omega, \Xi]],$$

$$(c) \quad [\Omega, \omega \wedge \Theta] = L_\Omega(\omega) \wedge \Theta + (-1)^{ik} \omega \wedge [\Omega, \Theta] - (-1)^{(k+1)(i+k)} d\omega \wedge i_\Theta(\Omega),$$

$$(d) \quad [L_\Omega, i_\Theta] = (-1)^k L_{i_\Theta(\Omega)} + i_{[\Omega, \Theta]},$$

$$(e) \quad i_\Omega[\Theta, \Xi] = [i_\Omega(\Theta), \Xi] + (-1)^{(k+1)l} [\Theta, i_\Omega(\Xi)] + (-1)^l i_{[\Omega, \Theta]}(\Xi) - (-1)^{(l+1)m} i_{[\Omega, \Xi]}(\Theta),$$

где $\omega \in \Lambda^i(A)$

В этом предложении и ниже подстановка $i_\Omega(\Theta) \in D(\Lambda^{k+l-1})$ определяется равенством

$$(i_\Omega(\Theta))(a) = i_\Omega(\Theta(a))$$

для любого элемента $a \in A$.

- (3) Элемент $\mathcal{N} \in D(\Lambda^1(A))$ называется интегрируемым, если выполнено равенство $[\mathcal{N}, \mathcal{N}] = 0$ (скобка $[\mathcal{N}, \mathcal{N}]$ называется тензором Нийенхейса). Очевидно, интегрируемость равносильно тому, что

$\partial_{\mathcal{N}} \circ \partial_{\mathcal{N}} = 0$, где $\partial_{\mathcal{N}}(\Omega) = [\cdot, \mathcal{N}, \Omega]$. Таким образом, для интегрируемых $\mathcal{N}$ определён комплекс

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow D(A) \longrightarrow D(\Lambda^1(A)) \longrightarrow \dots \longrightarrow \\ \longrightarrow D(\Lambda^k(A)) \xrightarrow{\partial_{\mathcal{N}}} D(\Lambda^{k+1}(A)) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Его когомологии обозначаются через $H^k(A; \mathcal{N})$.

В интегрируемом случае производная Ли $d_{\mathcal{N}} = L_{\mathcal{N}}: \Lambda^i(A) \rightarrow \Lambda^{i+1}(A)$ также является дифференциалом, причём $[d_{\mathcal{N}}, d] = 0$. Таким образом, пара $(d_{\mathcal{N}}, \bar{d}_{\mathcal{N}})$, где $\bar{d}_{\mathcal{N}} = d - d_{\mathcal{N}}$ есть бикомплекс на $\Lambda^*(A)$, спектральная последовательность которого сходится к когомологиям де Рама алгебры A . В геометрической теории дифференциальных уравнений это называется вариационным бикомплексом.

- (4) Рассмотрим $\mathbb{k}$ -алгебры A и B и гомоморфизм $\varphi: A \rightarrow B$. Тогда B — A -алгебра, и можно рассмотреть B -модуль $D(A, B)$ B -значных дифференцирований $A \rightarrow B$. Если $X \in D(B)$, то операция ограничения $X|_A(a) = X(\varphi(a))$ определяет дифференцирование $X|_A \in D(A, B)$ и точную последовательность

$$0 \longrightarrow D^v(B) \longrightarrow D(B) \longrightarrow D(A, B),$$

где

$$D^v(B) = \{ X \in D(B) \mid X|_A = 0 \}$$

— модуль φ -вертикальных дифференцирований.

Связностью в A -алгебре B называется B -гомоморфизм $\nabla: D(A, B) \rightarrow D(B)$, расщепляющий эту последовательность, т.е. такой, что $\nabla(X|_A) = X$ для любого $X \in D(B)$. Формой связности называется элемент $U_{\nabla} \in D(\Lambda^1(B))$, определяемый равенством

$$i_X(U_{\nabla}) = X - \nabla(X|_A), \quad X \in D(B).$$

Пусть $X, Y \in D(A, B)$. Положим

$$R_{\nabla}(X, Y) = [\nabla(X), \nabla(Y)] - \nabla(\nabla(X) \circ Y - \nabla(Y) \circ X).$$

Элемент называется кривизной связности ∇ .

Предложение 10. Если ∇ — связность, то

$$i_X(i_Y[U_{\nabla}, U_{\nabla}]) = 2R_{\nabla}(X|_A, Y|_A)$$

для любых $X, Y \in D(B)$.

- (5) Связность называется плоской, если $R_\nabla = 0$. В силу предложения 10 элемент U_∇ является интегрируемым в этом случае и определён дифференциал $\partial_\nabla = \partial_{U_\nabla}$. Рассмотрим комплекс

$$0 \longrightarrow D^v(B) \longrightarrow D^v(\Lambda^1(B)) \longrightarrow \dots$$

$$\dots \longrightarrow D(\Lambda^i(B)) \xrightarrow{\partial_\nabla} D^v(\Lambda^{i+1}(B)) \longrightarrow \dots$$

(см. задачу 49) и обозначим его когомологии через $H^i(B, \nabla)$.

Теорема 4. Пусть $\nabla: D(A, B) \rightarrow D(B)$ — плоская связность. Тогда:

- (а) Группы когомологий $H^i(B, \nabla)$ наследуют операцию внутреннего умножения

$$i: H^i(B, \nabla) \times H^j(B, \nabla) \rightarrow H^{i+j-1}(B, \nabla).$$

В частности, группа $H^1(B, \nabla)$ является ассоциативной алгеброй

$$i: H^1(B, \nabla) \times H^1(B, \nabla) \rightarrow H^1(B, \nabla),$$

а подстановка

$$i: H^1(B, \nabla) \times H^0(B, \nabla) \rightarrow H^0(B, \nabla)$$

определяет её представление в эндоморфизмах группы $H^0(B, \nabla)$.

- (б) Группы когомологий $H^i(B, \nabla)$ наследуют скобку Нийенхейса

$$[\cdot, \cdot]: H^i(B, \nabla) \times H^j(B, \nabla) \rightarrow H^{i+j}(B, \nabla).$$

В частности, $H^0(B, \nabla)$ является алгеброй Ли относительно этой скобки.

- (6) Другая интерпретация групп $H^i(B, \nabla)$, которая будет важна в последующем изложении, состоит в следующем.

- (а) Дифференцирования $X \in H^0(B, \nabla)$ можно понимать как симметрии связности ∇ .
 (б) Элементы группы $H^1(B, \nabla)$ — это классы инфинитезимальных деформаций связности по модулю тривиальных.
 (с) Наконец, группа $H^2(B, \nabla)$ содержит препятствия к продолжению инфинитезимальных деформаций до формальных.

- (7) С другой стороны, в силу п. 5а теоремы 4 элементы группы $H^1(B, \nabla)$ «размножают» симметрии связности (как мы увидим ниже, в теории интегрируемых систем они называются операторами рекурсии). С точки зрения приложений к дифференциальным уравнениям важна ситуация, когда получаемые симметрии коммутируют. Рассмотрим симметрию $X \in H^0(B, \nabla)$ и элемент $R \in H^1(B, \nabla)$. Введём обозначения $R(X) = i_X(R)$ и $X_n = R^n(X)$.

Теорема 5. Пусть $H^2(B, \nabla) = 0$. Тогда для любых $X, Y \in H^0(B, \nabla)$, $R \in H^1(B, \nabla)$ и $m, n = 1, 2, \dots$ имеют соотношения

$$[X_m, Y_n] = [X, Y]_{m+n} + \sum_{i=0}^{n-1} ([X, R]^n(Y_i))_{m+n-i-1} - \sum_{j=0}^{m-1} ([Y, R]^m(X_j))_{m+n-j-1}.$$

В частности, если $[X, Y] = 0$ и $[X, R] = [Y, R] = 0$, то $[X_m, Y_n] = 0$ для всех m и n .

- (8) В заключение, рассмотрим важный пример. Для произвольной $\mathbb{K}$ -алгебры A и A -модуля P построим алгебру B следующим образом. Пусть $S^*(Q)$ обозначает симметрическую алгебру модуля Q . Положим $B_k = S^*(\text{Diff}_k(P, A))$. Тогда $B_k \subset B_{k+1}$ и мы определяем B как $\cup_k B_k$. Пусть $X \in D(A)$ и $\Delta \in \text{Diff}_k(P, A)$. Положим $\nabla(X)(\Delta) = X \circ \Delta$ и распространим действие $\nabla(X)$ на B по правилу Лейбница. Таким образом мы получаем отображение $\nabla: D(A) \rightarrow D(B)$. Из задачи 51 следует, что оно достраивается до плоской связности. Это — алгебраическая модель связности Картана, играющей ключевую роль в геометрии джетов.

Задача 39. Докажите предложение 7.

Задача 40. Докажите предложение 8.

Задача 41. Докажите предложение 9.

Задача 42. Модуль $\Lambda^i(A) \otimes_A D(A)$ можно вложить в $D(\Lambda^i(A))$, полагая $(\omega \otimes X)(a) = X(a)\omega$. Элементы, принадлежащие образу этого вложения, назовём разложимыми. Докажите, что на разложимых элементах скобка Нийенхейса имеет вид

$$\begin{aligned} [\omega \otimes X, \theta \otimes Y] &= \omega \wedge \theta \otimes [X, Y] + \omega \wedge L_X(\theta) \otimes Y - L_Y(\omega) \wedge \theta \otimes X + \\ &+ (-1)^i d\omega \wedge i_X(\theta) \otimes Y + (-1)^i i_Y(\omega) \wedge d\theta \otimes X, \end{aligned}$$

где $\omega \in \Lambda^i(A)$, $\theta \in \Lambda^j(A)$, $X, Y \in D(A)$.

Задача 43. Покажите, что модуль $D(\Lambda^1(A))$ является ассоциативной алгеброй относительно операции $\Omega \cdot \Theta = i_\Omega(\Theta)$.

Задача 44. Какие алгебраические структуры (внутреннее умножение, внешнее умножение на формы, скобка Нийенхейса) «выживают» при переходе от модулей $D(\Lambda^k(A))$ к группам когомологий $H^k(A; \mathcal{A})$?

Задача 45. Рассмотрим гладкое многообразие M и автоморфизм кокасательного расслоения J . Он является элементом $C^\infty(M)$ -модуля $\text{hom}_{C^\infty(M)}(D(M), D(M)) = \Lambda^1(M) \otimes_{C^\infty(M)} D(M) = D(\Lambda^1(M))$. Почти комплексные структуры на M — это такие J , для которых $J^2 = -\text{id}$. Теорема Ньюлендера–Ниренберга утверждает, что J — комплексная структура, если $[J, J] = 0$.

- (1) Вычислите когомологии $H^k(C^\infty(M); J)$ для комплексных структур.
- (2) Вычислите также когомологии дифференциалов d_J и $\bar{d}_J$.

Задача 46. Исследуйте свойства следующих скобок:

- (1) Пусть $\Omega \in D(\Lambda^i(A))$, $\Theta \in D(\Lambda^j(A))$. Определим скобку $[\Omega, \Theta] \in D(\Lambda^{i+j-1}(A))$ равенством

$$i_{[\Omega, \Theta]} = [i_\Omega, i_\Theta]$$

(это так называемая скобка Ричардсона–Нийенхейса).

- (2) Пусть $\mathcal{N} \in D(\Lambda^1(A))$ и $\Omega \in D(\Lambda^i(A))$. Положим

$$L_\Omega^\mathcal{N} = [\partial_\mathcal{N}, i_\Omega]: D(\Lambda^j(A)) \rightarrow D(\Lambda^{i+j}(A))$$

и определим скобку $[\Omega, \Theta]^\mathcal{N} \in D(\Lambda^{i+j}(A))$, полагая

$$L_{[\Omega, \Theta]^\mathcal{N}}^\mathcal{N} = [L_\Omega^\mathcal{N}, L_\Theta^\mathcal{N}],$$

где $\Theta \in D(\Lambda^j(A))$.

- (3) Предположим теперь, что $\Lambda^1(A)$ — проективный модуль конечного типа. Тогда $D_i(P) = D_i(A) \otimes_A P$ для любого A -модуля P . Рассмотрим подстановку $i: D_k(\Lambda^1(A)) \otimes_A D_l(A) \rightarrow D_{k+l-1}(A)$, полагая

$$i(X \otimes \omega \otimes Y) = X \wedge i_\omega(Y).$$

Пусть $\mathcal{P} \in D_2(A)$ и $\Omega \in D_k(\Lambda^1(A))$. Положим

$$L_\Omega^\mathcal{P} = [\partial_\mathcal{P}, i_\Omega]: D_l(A) \rightarrow D_{k+l}(A).$$

Если $\Theta \in D_l(\Lambda^1(A))$, определим скобку $[\Omega, \Theta]^\mathcal{P} \in D_{k+l}(\Lambda^1(A))$, полагая

$$L_{[\Omega, \Theta]^\mathcal{P}}^\mathcal{P} = [L_\Omega^\mathcal{P}, L_\Theta^\mathcal{P}].$$

Есть ли ещё идеи?

Задача 47. Постройте пример пары алгебр (A, B) и гомоморфизма $\varphi: A \rightarrow B$, в котором операция ограничения $D(B) \rightarrow D(A, B)$ не является эпиморфизмом. Какие условия гарантируют эпиморфность?

Задача 48. Докажите предложение 10.

Задача 49. Докажите, что если $\Omega \in D^v(\Lambda^i(B))$ — вертикальное дифференцирование, то $\partial_\nabla(\Omega)$ также является вертикальным.

Задача 50. Докажите теорему 4.

Задача 51. Докажите теорему 5.

Задача 52. Покажите, что отображение ∇ , описанное в п. 8, достраивается до плоской связности.

Лекция 6 (14.10.2015)

Джеты и нелинейные дифференциальные операторы

- (1) Пусть M — гладкое многообразие, $\dim M = n$, и $\pi: E \rightarrow M$ — гладкое векторное расслоение размерности m . Обозначим через $\Gamma(\pi)$ $C^\infty(M)$ -модуль сечений расслоения π . Пусть $x \in M$ и $s \in \Gamma(\pi)$. Положим

$$[s]_x^k = \{ s' \in \Gamma(\pi) \mid \text{график } s' \text{ касается графика } s \text{ с порядком } k \}$$

и $J_x^k(\pi) = \{ [s]_x^k \mid s \in \Gamma(\pi) \}$. Множество $J_x^k(\pi)$ превращается в векторное пространство, если положить

$$[s]_x^k + [s']_x^k = [s + s']_x^k, \quad \alpha[s]_x^k = [\alpha s]_x^k, \quad s, s' \in \Gamma(\pi), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Пусть $J^k(\pi) = \cup_{x \in M} J_x^k(\pi)$. Сопоставим каждому $s \in \Gamma(\pi)$ отображение $j_k(s): M \rightarrow J^k(\pi)$, полагая

$$j_k(s)(x) = [s]_x^k,$$

и введём в $J^k(\pi)$ минимальную топологию, при которой все отображения $j_k(s)$ непрерывны. Обозначим через $\pi_k: J^k(\pi) \rightarrow M$, $[s]_x^k \mapsto x$, естественную проекцию.

- (2) Пусть $\mathcal{U} \subset M$ — такая карта с координатами $x^1, \dots, x^n$, что расслоение π тривиализуется над $\mathcal{U}$, и $u^1, \dots, u^m$ — послойные координаты в этой тривиализации. Определим в $\pi_k^{-1}(\mathcal{U}) \subset J^k(\pi)$ адаптированные координаты u_σ^j , полагая

$$u_\sigma^j([s]_x^k) = \left. \frac{\partial^{|\sigma|} s^j}{\partial x^\sigma} \right|_x,$$

если сечение s локально задано как $u^j = s^j(x)$, $j = 1, \dots, m$. Полученное многообразие (см. задачу 54) называется многообразием k -джетов сечений расслоения π , а $\pi_k: J^k(\pi) \rightarrow M$ — расслоением k -джетов. При этом $J^0(\pi) = M$, а естественные проекции $\pi: J^k(\pi) \rightarrow J^l(\pi)$, $k \geq l$, суть гладкие отображения.

Если $s \in \Gamma(\pi)$, то сечение $j_k(s) \in \Gamma(\pi_k)$ называется k -джетом сечения s .

- (3) Пусть $\pi': E' \rightarrow M$ — также векторное расслоение, $\dim \pi' = m'$. Обозначим через $\mathcal{F}_k(\pi, \pi')$ модуль сечений индуцированного расслоения $\pi^*(\pi')$. В частном случае, когда π' — тривиальное одномерное расслоение, мы будем использовать обозначение $\mathcal{F}_k(\pi)$. Нелинейный дифференциальный оператор порядка k , действующий из $\Gamma(\pi)$ в $\Gamma(\pi')$, — это элемент $\varphi \in \mathcal{F}_k(\pi, \pi')$, причём соответствующее действие определяется равенством

$$\Delta_\varphi(s) = (j_k(s))^*(\varphi), \quad s \in \Gamma(\pi).$$

Операторы порядка k находятся во взаимно-однозначном соответствии с морфизмами расслоений

$$\begin{array}{ccc} J^k(\pi) & \xrightarrow{\Phi_\Delta} & E' \\ & \searrow \pi_k \quad \swarrow \pi' & \\ & M, & \end{array}$$

$\Phi_\Delta([s]_x^k) = \Delta(s)|_x$. Тогда действие оператора на сечения можно записать в виде $\Delta(s) = \Phi_\Delta \circ j_k(s)$. Если Φ_Δ — морфизм векторных расслоений, то оператор Δ — линейный.

- (4) Пусть $\varphi \in \mathcal{F}_k(\pi, \pi')$ — оператор порядка k . Построим морфизм $\Phi_\Delta^{(l)}: J^{k+l}(\pi) \rightarrow J^l(\pi')$, полагая $\Phi_\Delta^{(l)}([s]_x^{k+l}) = [\Delta(s)]_x^l$. Оператор $\Delta^{(l)}: \Gamma(\pi) \rightarrow \Gamma(\pi')$ называется l -м продолжением оператора Δ ; его порядок равен $k + l$. Очевидно, что диаграммы

$$\begin{array}{ccc} J^{k+l+1}(\pi) & \xrightarrow{\Phi_\Delta^{(l+1)}} & J^{l+1}(\pi') \\ \pi_{k+l+1, k+l} \downarrow & & \downarrow \pi'_{l+1, l} \\ J^{k+l}(\pi) & \xrightarrow{\Phi_\Delta^{(l)}} & J^l(\pi') \end{array}$$

коммутативны при всех l .

- (5) Рассмотрим операторы $\Delta: \Gamma(\pi) \rightarrow \Gamma(\pi')$ и $\Delta': \Gamma(\pi') \rightarrow \Gamma(\pi'')$ порядков k и k' соответственно и композицию морфизмов расслоений

$$J^{k+k'}(\pi) \xrightarrow{\Phi_\Delta^{(k')}} J^{k'}(\pi') \xrightarrow{\Phi_{\Delta'}} E'' = J^0(\pi'').$$

Соответствующий оператор называется композицией операторов Δ и Δ' и, как следует из задачи 59, действительно ею является.

- (6) Рассмотрим точку $\theta \in J^k(\pi)$ и определим пространство

$$\mathcal{C}_\theta^k = \mathcal{L}_{[s]_x^k = \theta} T_\theta(j_k(s)(M)) \subset T_\theta J^k(\pi),$$

где $\mathcal{L}$ обозначает линейную оболочку. Пространство $\mathcal{C}_\theta = \mathcal{C}_\theta^k$ называется плоскостью Картана в точке θ , а соответствие $\mathcal{C} = \mathcal{C}^k: \theta \mapsto \mathcal{C}_\theta$ — распределением Картана. Это распределение — главная геометрическая структура на пространстве джетов.

- (7) Выберем координатную окрестность $\mathcal{U} \subset M$ с локальными координатами $x^1, \dots, x^n$ и адаптированные координаты u_σ^j в $\pi_k^{-1}(\mathcal{U}) \subset J^k(\pi)$.

Предложение 11. Пусть $k > 0$. Тогда

- (а) Распределение Картана локально натянуто на векторные поля

$$\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^m \sum_{|\tau| \leq k-1} u_{\tau i}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial u_{\tau}^{\alpha}}, \quad \frac{\partial}{\partial u_{\sigma}^j}, \quad (1)$$

где $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, $|\sigma| = k$, или, эквивалентно,

- (б) Поле X лежит в распределении Картана тогда и только тогда, когда оно аннулирует систему форм

$$\omega_{\sigma}^j = du_{\sigma}^j - \sum_{i=1}^n u_{\sigma i}^j dx^i, \quad (2)$$

где $j = 1, \dots, m$, $|\sigma| \leq k-1$.

Формы ω_{σ}^j называются формами Картана, или высшими контактными формами.

- (8) Пусть $\theta \in J^{k+1}(\pi)$ и $\bar{\theta} = \pi_{k+1,k}(\theta) \in J^k(\pi)$. Тогда для любого сечения $s \in \Gamma(\pi)$, обладающего свойством $[s]_x^{k+1} = \theta$, графики джетов $j_k(s)$ проходят через точку $\bar{\theta}$ и имеют общую касательную плоскость L_{θ} . Таким образом, точки пространства $J^{k+1}(\pi)$ можно отождествить с парами $(\bar{\theta}, L_{\theta})$. Это полезное отождествление позволяет, в частности, дать альтернативное описание распределение Картана, сформулированное в задаче 62.

Задача 53. Докажите, что $\dim J_x^k(\pi) = m \binom{n+k}{k}$.

Задача 54. Докажите, что введённые в п. 2 локальные координаты определяют в $J^k(\pi)$ структуру гладкого многообразия, а в $\pi_k: J^k(\pi) \rightarrow M$ — структуру гладкого векторного расслоения.

Задача 55. Пусть $P = \Gamma(\pi)$. Докажите, что модуль $\mathcal{J}^k(P)$, построенный как представляющий объект функтора $\text{Diff}_k(P, \cdot)$ в категории геометрических модулей над $C^{\infty}(M)$ совпадает с модулем сечений $\Gamma(\pi_k)$.

Задача 56. Докажите, что $\pi_{k+1,k}: J^{k+1}(\pi) \rightarrow J^k(\pi)$ — аффинные расслоения, причём векторным пространством, ассоциированным со слоем над точкой $\theta = [s]_x^k$ является $S^{k+1}T_x^*M \otimes E_x$.

Задача 57. Докажите, что определение морфизма $\Phi_{\Delta}^{(l)}$ из п. 4 корректно, т.е. не зависит от выбора сечения s .

Задача 58. Пусть $\Delta: \Gamma(\pi) \rightarrow \Gamma(\pi')$ — оператор порядка k и l , l' — натуральные числа. Какова связь между операторами $\Delta^{(l+l')}: \Gamma(\pi) \rightarrow \Gamma(\pi_{l+l'})$ и $(\Delta^{(l)})^{(l')}: \Gamma(\pi) \rightarrow \Gamma((\pi_l)_{l'})$?

Задача 59. Покажите, что оператор, который соответствует морфизму, построенному в п. 5, действует на сечение $s \in \Gamma(\pi)$ как $\Delta'(\Delta(s))$.

Задача 60. Вычислите размерность распределения Картана.

Задача 61. Докажите предложение 11.

Задача 62. Докажите, что если $\theta \in J^{k+1}(\pi)$ и $\theta = (\bar{\theta}, L_\theta)$, то $\mathcal{C}_\theta^{k+1} = (\pi_{k+1,k})_*^{-1}(L_\theta)$.

Задача 63. Из рассуждений п. 8 следует, что имеет место естественное вложение $J^{k+1}(\pi) \subset J^1(J^k(\pi))$. Опишите его в координатах. Каков его алгебраический аналог?

Задача 64 (структура максимальных интегральных многообразий распределения Картана). Пусть $N \subset J^{k-1}(\pi)$ — интегральное подмногообразие распределения Картана, без вырождения проектирующееся на M , $1 \leq \dim M \leq n$ (такие многообразия легко описать). Рассмотрим множество

$$L(N) = \left\{ (\theta, L_\theta) \in J^k(\pi) \mid \theta \in N, L_\theta \supset T_\theta N \right\}.$$

- (1) Докажите, что $L(N)$ — максимальное интегральное многообразие распределения Картана на $J^k(\pi)$ и что все максимальные интегральные многообразия имеют такой вид.
- (2) Вычислите $\dim L(N)$.

Лекция 7 (28.10.2015)

Симметрии распределения Картана и теорема Ли–Беклунда

- (1) Пусть N — гладкое многообразие, $\dim N = n$, и $D \subset TN$ — распределение на нём, $\text{rank } D = d$. Обозначим через $\mathcal{D} = \mathcal{D}_D \subset D(M)$ модуль векторных полей, лежащих в D , а через $\Lambda_D^1 \subset \Lambda^1(M)$ — подмодуль 1-форм, аннулируемых элементами из $\mathcal{D}$. Таким образом, локально D задаётся базисом $X_1, \dots, X_d$ модуля $\mathcal{D}$ или базисом $\omega_1, \dots, \omega_{n-d}$ модуля Λ_D^1 .
- (2) Диффеоморфизм $f: N \rightarrow N$ называется (конечной) симметрией распределения D , если $f_*(D_x) = D_{f(x)}$ для любой точки $x \in N$. Поле $X \in D(N)$ называется инфинитезимальной симметрией, если соответствующая ему однопараметрическая группа преобразований состоит из конечных симметрий. Инфинитезимальная симметрия называется характеристической, если она принадлежит модулю $\mathcal{D}$.
- (3) Если $X_1, \dots, X_d$ и $\omega_1, \dots, \omega_{n-d}$ — базисы из п. 1, то условие того, что f — конечная симметрия локально задаётся эквивалентными системами

$$f_*(X_i) = \sum_{\alpha} \lambda_i^{\alpha} X_{\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad f^*(\omega_j) = \sum_{\beta} \mu_j^{\beta} \omega_{\beta}.$$

Аналогично, X — инфинитезимальная симметрия тогда и только тогда, когда

$$[X, X_i] = \sum_{\alpha} \lambda_i^{\alpha} X_{\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad L_X(\omega_j) = \sum_{\beta} \mu_j^{\beta} \omega_{\beta}.$$

- (4) Подмногообразие $\Upsilon \subset N$ называется интегральным многообразием распределения D , если $T_x \Upsilon \subset D_x$ для любой точки $x \in \Upsilon$. Распределение называется интегрируемым, если через любую точку $x \in N$ проходит локальное интегральное d -мерное многообразие. Критерием интегрируемости является теорема Фробениуса:

Теорема 6. *Следующие утверждения эквивалентны:*

- (a) *Распределение D интегрируемо.*
- (b) *Модуль $\mathcal{D}$ является алгеброй Ли относительно коммутатора векторных полей.*
- (c) *Идеал внешней алгебры $\Lambda^*(N)$, порождённый модулем Λ_D^1 , дифференциально замкнут.*

Таким образом, локально интегрируемость задаётся условиями

$$[X_i, X_k] = \sum_{\alpha} a_{ij} X_{\alpha}, \quad \alpha, i, k = 1, \dots, d,$$

или

$$d\omega_j = \sum_{\beta} \rho_j^{\beta} \wedge \omega_{\beta}, \quad \beta, j = 1, \dots, n - d.$$

- (5) Степень неинтегрируемости распределения можно «померить» с помощью следующей конструкции. Рассмотрим модуль $\mathcal{D}^{(1)}$, являющийся линейной оболочкой всех полей вида $X, [Y, Z]$, $X, Y, Z \in \mathcal{D}$. Соответствующее распределение называется производной распределения D . Положим $\mathcal{D}^{(2)} = (\mathcal{D}^{(1)})^{(1)}$ и т.д. Тогда

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}^{(0)} \subset \mathcal{D}^{(1)} \subset \dots \subset \mathcal{D}^{(i)} \subset \dots$$

— производный ряд распределения D . Если распределение интегрируемо, то у этого ряда минимальная длина: $\mathcal{D}^{(0)} = \mathcal{D}^{(1)}$; чем длиннее производный ряд, тем менее интегрируемо распределение.

- (6) Перейдём к описанию симметрий распределения Картана на $J^k(\pi)$. Прежде чем формулировать общее утверждение, сделаем простой вычислительный эксперимент. Пусть $M = \mathbb{R}^n$ и $\pi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — тривиальное расслоение. Выберем координаты $x^1, \dots, x^n$ в базе, $u^1, \dots, u^m$ в слое, и пусть u_i^j — соответствующие адаптированные координаты в $J^1(\pi)$. Распределение Картана задаётся формами

$$\omega^j = du^j - \sum_i u_i^j dx^i, \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m,$$

и поле

$$X = \sum_i a^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_j b^j \frac{\partial}{\partial u^j} + \sum_{i,j} c_i^j \frac{\partial}{\partial u_i^j}$$

является инфинитезимальной симметрией тогда и только тогда, когда

$$db^j - \sum_i \left(c_i^j dx^i - u_i^j da_i \right) = \sum_\beta \lambda_\beta^j \left(du^\beta - \sum_i u_i^\beta dx^i \right),$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial b^j}{\partial x^i} - c_i^j - \sum_\alpha u_\alpha^j \frac{\partial a^\alpha}{\partial x^i} &= - \sum_\beta \lambda_\beta^j u_i^\beta, \\ \frac{\partial c^j}{\partial u^k} - \sum_\alpha u_\alpha^j \frac{\partial a^\alpha}{\partial u^k} &= \lambda_k^j, \\ \frac{\partial c^j}{\partial u_i^k} - \sum_\alpha u_\alpha^j \frac{\partial a^\alpha}{\partial u_i^k} &= 0, \end{aligned}$$

где λ_β^j — некоторые функции на $J^1(\pi)$.

- (7) Из задачи 71 следует, что при $m > 1$ коэффициенты c_i^j однозначно восстанавливаются по произвольным коэффициентам a_i и b^i с помощью формул

$$c_i^j = \frac{\partial b^j}{\partial x^i} - \sum_\alpha u_\alpha^j \frac{\partial a^\alpha}{\partial x^i} + \sum_\beta \frac{\partial c^j}{\partial u^\beta} - \sum_{\alpha, \beta} u_\alpha^j \frac{\partial a^\alpha}{\partial u^\beta} u_i^\beta,$$

т.е. симметрий распределения Картана столько же, сколько полей на $J^0(\pi)$. В случае $m = 1$ сопоставим всякой симметрии функцию (производящую функцию контактного поля) $\varphi = b - \sum_i u_i a^i$. Тогда

$$a^i = -\frac{\partial \varphi}{\partial u_i}, \quad b = \varphi - \sum_i u_i \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}, \quad c_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} + u_i \frac{\partial \varphi}{\partial u},$$

и всякое поле с такими коэффициентами является симметрией.

- (8) Симметрии распределения Картана на $J^k(\pi)$ называются преобразованиями Ли, а инфинитезимальные симметрии — полями Ли. Сейчас мы дадим полное описание преобразований и полей Ли, обобщающее результаты вычислений пп. 6–7. Заметим во-первых, что преобразования Ли многообразия $J^0(\pi)$ — это все его диффеоморфизмы. Во-вторых, распределение Картана на $J^1(\pi)$ для одномерных расслоений π — это контактная структура и преобразования Ли в этом случае суть контактные диффеоморфизмы. Наконец, в-третьих, рассмотрим следующую конструкцию. Пусть $g: J^k(\pi) \rightarrow J^k(\pi)$ — преобразование Ли. Рассмотрим отображение $g^{(1)}: J^{k+1}(\pi) \rightarrow J^{k+1}(\pi)$, определённое правилом

$$g^{(1)}(\theta) = (g(\bar{\theta}), dg(L_\theta)),$$

где точка $\theta \in J^{k+1}(\pi)$ представлена в виде пары $(\bar{\theta}, L_\theta)$ (см. п. 8). Отображение $g^{(1)}$ называется поднятием преобразования Ли g .

Из задачи 72 следует, что поднятие также является преобразованием Ли, определённым почти всюду.

Поднятия полей Ли определяются очевидным образом.

- (9) Пусть $g: J^k(\pi) \rightarrow J^k(\pi)$ — преобразование Ли. Определим преобразования Ли $g^{(l)}: J^{k+l}(\pi) \rightarrow J^{k+l}(\pi)$, полагая $g^{(i+1)} = (g^{(i)})^{(1)}$.

Теорема Ли–Беклунда. *Всякое преобразование Ли пространства $J^k(\pi)$ имеет вид:*

- (а) $g^{(k)}$, где $g: J^0(\pi) \rightarrow J^0(\pi)$ — произвольный диффеоморфизм, если $\dim \pi > 1$;
 (б) $g^{(k-1)}$, где $g: J^1(\pi) \rightarrow J^1(\pi)$ — контактный диффеоморфизм, если $\dim \pi = 1$

Инфинитезимальный аналог этой теоремы очевиден.

- (10) Доказательство теоремы Ли–Беклунда основывается на следующих утверждениях:

Лемма 1. *Пусть есть коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} J^{k+1}(\pi) & \xrightarrow{\bar{g}} & J^{k+1}(\pi) \\ \pi_{k+1,k} \downarrow & & \downarrow \pi_{k+1,k} \\ J^k(\pi) & \xrightarrow{g} & J^k(\pi), \end{array}$$

где g и $\bar{g}$ — преобразования Ли. Тогда $\bar{g} = g^{(1)}$.

Лемма 2. *Любое преобразование Ли $g: J^k(\pi) \rightarrow J^k(\pi)$ сохраняет слои проекции $\pi_{k,k-1}$, если $k \geq 2$ при $\dim \pi = 1$ и $k \geq 1$ при $\dim \pi > 1$.*

Доказательство. Рассмотрим пространство $\mathcal{C}^{(1)}$ над $J^k(\pi)$ (см. п. 5) и модуль

$$V^k(\mathcal{C}) = \left\{ X \in \mathcal{C} \mid [X, \mathcal{C}^{(1)}] \subset \mathcal{C}^{(1)} \right\}.$$

При $k \geq 2$ утверждение леммы следует из задачи 74. Если $\dim \pi > 1$ и $k = 1$, то оно следствие вычислений п. 7. $\square$

Задача 65. Докажите, что f — конечная симметрия тогда и только тогда, когда $f_*(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$, или $f^*(\Lambda_D^1) \subset \Lambda_D^1$.

Задача 66. Докажите, что X — инфинитезимальная симметрия тогда и только тогда, когда $[X, \mathcal{D}] \subset \mathcal{D}$, или $L_X(\Lambda_D^1) \subset \Lambda_D^1$.

Задача 67. Докажите, что инфинитезимальные симметрии образуют алгебру Ли относительно коммутатора, а характеристические симметрии — её идеал. Элементы факторалгебры по этому идеалу называются нетривиальными симметриями.

Задача 68. Докажите, что характеристические симметрии распределения Картана на $J^k(\pi)$ тривиальны.

Задача 69. Докажите, что образ интегрального многообразия при действии конечной симметрии является интегральным многообразием. Докажите, что симметрия является характеристической тогда и только тогда, когда соответствующие ей диффеоморфизмы переводят каждое интегральное многообразие в себя.

Задача 70. Докажите, что распределение Картана на $J^k(\pi)$ максимально неинтегрируемо: $\cup_i \mathcal{C}^{(i)} = D(J^k(\pi))$.

Задача 71. Докажите, что коэффициенты c_i^j из п. 6 не зависят от переменных u_α^β , если $m > 1$.

Задача 72. Докажите, что:

- (1) Поднятие преобразования Ли — снова преобразование Ли.
- (2) Поднятие преобразования Ли определено всюду, кроме множества точек положительной коразмерности.
- (3) Если поднятие $g^{(1)}$ определено в некоторой точке $\theta \in J^{k+1}(\pi)$, то поднятие $(g^{(1)})^{(1)}$ определено во всех точках $g' \in \pi_{k+2,k+1}^{-1}(\theta) \subset J^{k+2}(\pi)$.
- (4) Поднятия полей Ли определены во всех точках.

Задача 73. Докажите лемму 1.

Задача 74. Докажите, что модуль $V^k(\mathcal{C})$, построенный при доказательстве леммы 2, по крайней мере локально, состоит из $\pi_{k,k-1}$ -вертикальных векторных полей, если $k \geq 2$.

Задача 75. Докажите, что преобразования Ли сохраняют аффинную структуру слоёв (задача 56).

Задача 76. Производящая функция контактного поля, определённая в п. 7, на самом деле является не функцией, а сечением линейного расслоения $\bar{\pi}: T J^1(\pi)/\mathcal{C} \rightarrow J^1(\pi)$. Выведите формулы преобразования производящих функций при контактных заменах координат.

Задача 77 (поднятия полей Ли в координатах). Пусть поле Ли на $J^k(\pi)$ имеет вид

$$X = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^m \sum_{|\sigma| \leq k} c_\sigma^j \frac{\partial}{\partial u_\sigma^j}$$

Покажите, коэффициенты его поднятия $X^{(1)}$ при $\partial/\partial u_{\sigma l}^j$ вычисляются по формуле

$$c_{\sigma l}^j = D_l(c_\sigma^j) - \sum_{i=1}^n u_{\sigma i}^j D_l(a^i),$$

где

$$D_l = \frac{\partial}{\partial x^l} + \sum_{\sigma, j} u_{\sigma l}^j \frac{\partial}{\partial u_\sigma^j}$$

— операторы полных производных.

Лекция 8 (18.11.2015)

Уравнения и симметрии

- (1) Дифференциальным уравнением порядка k называется подмногообразие $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$, $\dim M = n$, $\text{rank } \pi = m$. Распределением Картана на $\mathcal{E}$ называется соответствие $\mathcal{C}^\mathcal{E}: \theta \in \mathcal{E} \mapsto T_\theta \mathcal{E} \cap \mathcal{C}_\theta$. Вообще говоря, $\mathcal{C}^\mathcal{E}$ не является распределением, поскольку размерности соответствующих плоскостей могут меняться от точки к точке. Точки, в которых коразмерность плоскостей $\mathcal{C}_\theta^\mathcal{E}$ максимальна, называются регулярными; остальные точки — особые. Решением уравнения $\mathcal{E}$ называется максимальное интегральное многообразие $s \subset \mathcal{E}$ распределения Картана размерности n . Если s — график k -джета некоторого сечения расслоения π , то решение называется классическим, в противном случае — обобщённым. Два уравнения $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ называются эквивалентными, если существует такое преобразование Ли $g: J^k(\pi) \rightarrow J^k(\pi)$, что $F(\mathcal{E}) = \mathcal{E}'$. Уравнение называется линейным, если $\mathcal{E}$ — векторное подрасслоение в $\pi_k: J^k(\pi) \rightarrow M$.
- (2) Рассмотрим примеры.

Пример 1. Пусть $\pi: \Lambda^i T^*M \rightarrow M$ — i -я внешняя степень кокасательного расслоения. Тогда

$$\mathcal{E} = \{ [\omega]_x^1 \mid d\omega = 0, \omega \in \Lambda_{\text{loc}}^i(M), x \in M \}$$

— линейное уравнение первого порядка в этом расслоении. Его решения — замкнутые i -формы.

Пример 2. Пусть $\pi: \Lambda^2 T^*M \rightarrow M$ — внешний квадрат касательного расслоения. Тогда

$$\mathcal{E} = \{ [Z]_x^1 \mid [Z, Z] = 0, Z \in D_2^{\text{loc}}(M), x \in M \},$$

где $[Z, Z]$ — скобка Схоутена, — нелинейное уравнение первого порядка в расслоении бивекторов. Его решения — пуассоновы структуры на M .

Пример 3. Рассмотрим некоторое одномерное расслоение $\pi: E \rightarrow M$ над двумерным многообразием M и дифференциальную 2-форму $\omega \in \Lambda^2 J^1(\pi)$. Уравнение

$$\mathcal{E}_\omega = \{ [s]_x^2 \mid j_1(s)^*(\omega) = 0, s \in \Gamma_{\text{loc}}(\pi), x \in M \}$$

называется уравнением Монжа–Ампера, ассоциированным с формой ω .

Пример 4. Пусть $\pi: \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — одномерное тривиальное расслоение с координатами x, t в базе и u — в слое. Уравнение

$$\mathcal{E} = \{ u_t = uu_x + \nu u_{xx} \} \subset J^2(\pi), \quad \nu = \text{const},$$

называется уравнением Бюргерса, если $\nu \neq 0$, и уравнением Хопфа, если $\nu = 0$. Уравнение Бюргерса описывает волновые процессы в акустике и гидродинамике; параметр ν соответствует вязкости среды.

Пример 5. Пусть π такое же, что и в примере 4. Уравнение

$$\mathcal{E} = \{u_t = uu_x + u_{xxx}\} \subset J^3(\pi)$$

называется уравнением Кортевега–де Фриза (КдФ). Уравнение КдФ описывает одномерные нелинейные волн в средах с дисперсией без диссипации.

Пример 6. Уравнение

$$\mathcal{E} = \{u_{xy} = \sin u\},$$

где x, y — координаты в базе, — это уравнение синус Гордона. Оно описывает поверхности постоянной гауссовой кривизны $K = -1$ в $\mathbb{R}^3$.

- (3) Пусть $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ — уравнение порядка k . Его (конечной) симметрией называется такое преобразование Ли g пространства $J^k(\pi)$, что $g(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$. Если g поднято с $J^1(\pi)$ (см. теорему Ли–Беклунда), то симметрия называется контактной; симметрии, поднятые с $J^0(\pi)$ называются точечными. Очевидно, симметрии образуют группу (псевдогруппу Ли). Если s — решение уравнения $\mathcal{E}$, то его образ при действии конечной симметрии — также (обобщённое) решение.
- (4) Вычислить конечные симметрии конкретного уравнения практически никогда невозможно. На помощь приходит инфинитезимальная точка зрения. Скажем, что поле Ли X на $J^k(\pi)$ является инфинитезимальной симметрией, если в каждой точке $\theta \in \mathcal{E}$ вектор X_θ касается $\mathcal{E}$. Очевидно, сдвиги вдоль траекторий инфинитезимальных симметрий являются конечными симметриями.

Пример 7. Пусть π — тривиальное одномерное расслоение над M и $\mathcal{E}$ — скалярное уравнение первого порядка, заданное нулями функции $F \in \mathcal{F}(\pi)$. Рассмотрим контактное X_F поле с производящей функцией F (см. п. 7 предыдущей лекции). Тогда X_F — инфинитезимальная симметрия уравнения; она называется характеристической.

- (5) Проиллюстрируем, как инфинитезимальные симметрии вычисляются на практике. Для этого, воспользовавшись задачей 77, выпишем явный вид полей Ли на $J^2(\pi)$ в случае одномерного расслоения π и двумерной базы M . Пусть x^1, x^2, u — координаты в $J^0(\pi)$ и $u_1, u_2, u_{11}, u_{12}, u_{22}$ — адаптированные координаты в $J^2(\pi)$. Всякое поле Ли на $J^2(\pi)$ является поднятием контактного поля

$$X_\varphi = -f_{u_1} \frac{\partial}{\partial x^1} - f_{u_2} \frac{\partial}{\partial x^2} + (\varphi - u_1 \varphi_{u_1} - u_2 \varphi_{u_2}) \frac{\partial}{\partial u} + \\ + (\varphi_{x^1} + u_1 \varphi_u) \frac{\partial}{\partial u_1} + (\varphi_{x^2} + u_2 \varphi_u) \frac{\partial}{\partial u_2},$$

а коэффициенты X_{ij} при $\partial/\partial u_{ij}$ имеют вид

$$X_{11} = \varphi_{x^1 x^1} + 2u_1 \varphi_{x^1 u} + u_1^2 \varphi_{uu} + u_{11}(\varphi_u + 2\varphi_{x^1 u_1} + 2u_1 \varphi_{uu_1}) + \\ + 2u_{12}(\varphi_{x^1 u_2} + u_1 \varphi_{uu_2}) + u_{11}^2 \varphi_{u_1 u_1} + 2u_{11} u_{12} \varphi_{u_1 u_2} + u_{12}^2 \varphi_{u_2 u_2}, \\ X_{12} = \varphi_{x^1 x^2} + u_1 \varphi_{x^2 u} + u_2 \varphi_{x^1 u} + u_1 u_2 \varphi_{uu} + u_{11}(\varphi_{x^2 u_1} + u_2 \varphi_{uu_1}) + \\ + u_{12}(\varphi_u + \varphi_{x^1 u_1} + \varphi_{x^2 u_2} + u_1 \varphi_{uu_1} + u_2 \varphi_{uu_2}) + u_{22}(\varphi_{x^1 u_2} + u_1 \varphi_{uu_2}) + \\ + u_{11} u_{12} \varphi_{u_1 u_1} + (u_{11} u_{22} + u_{12}^2) \varphi_{u_1 u_2} + u_{12} u_{22} \varphi_{u_2 u_2}, \\ X_{22} = \varphi_{x^2 x^2} + 2u_2 \varphi_{x^2 u} + u_2^2 \varphi_{uu} + 2u_{12}(\varphi_{x^2 u_1} + u_2 \varphi_{uu_1}) + \\ + u_{22}(\varphi_u + 2\varphi_{x^2 u_2} + 2u_2 \varphi_{uu_2}) + u_{12}^2 \varphi_{u_1 u_1} + 2u_{12} u_{22} \varphi_{u_1 u_2} + u_{22}^2 \varphi_{u_2 u_2},$$

и, если уравнение $\mathcal{E}$ задано условием

$$F(x^1, x^2, u, u_1, u_2, u_{11}, u_{12}, u_{22}) = 0,$$

то $X_\varphi^{(1)}$ — симметрия, если выполняется определяющее уравнение

$$X_\varphi^{(1)}(F) \Big|_{F=0} = 0.$$

Рассмотрим пример.

Пример 8. Вычислим инфинитезимальные симметрии уравнения Бюргерса $u_t = uu_x + u_{xx}$. В силу сказанного выше, производящая функция $\varphi = \varphi(x, t, u, u_x, u_t)$ такой симметрии должна удовлетворять условию

$$\varphi_t + u_t \varphi_u = (\varphi - u_t \varphi_{u_t} - u_x \varphi_{u_x}) u_x + u(\varphi_x + u_x \varphi_u) + \\ + \varphi_{xx} + 2u_x \varphi_{xu} + u_x^2 \varphi_{uu} + u_{xx}(\varphi_u + 2\varphi_{xu_x} + 2u_x \varphi_{uu_x}) + \\ + 2u_{xt}(\varphi_{xu_t} + u_x \varphi_{uu_t}) + u_{xx}^2 \varphi_{u_x u_x} + 2u_{xx} u_{xt} \varphi_{u_x u_t} + u_{xt}^2 \varphi_{u_t u_t},$$

на $\mathcal{E}$, или

$$\varphi = (\varphi - u_t \varphi_{u_t} - u_x \varphi_{u_x}) u_x + u(\varphi_x + u_x \varphi_u) + \\ + \varphi_{xx} + 2u_x \varphi_{xu} + u_x^2 \varphi_{uu} + (u_t - uu_x)(\varphi_u + 2\varphi_{xu_x} + 2u_x \varphi_{uu_x}) + \\ + 2u_{xt}(\varphi_{xu_t} + u_x \varphi_{uu_t}) + (u_t - uu_x)^2 \varphi_{u_x u_x} + 2(u_t - uu_x) u_{xt} \varphi_{u_x u_t} + u_{xt}^2 \varphi_{u_t u_t}.$$

Последнее уравнение квадратично по u_{xt} , откуда следует, что функция φ линейна по u_t . Используя этот факт, нетрудно убедиться, что

$$\varphi = Au_x + Bu_t + C,$$

где функции A , B и C зависят только от x , t и u и удовлетворяют уравнениям

$$A_u = 0, \quad B_t - 2A_x = 0,$$

$$u_x A_t + u u_x A_x + C_t - u C_x - u_x C - A_{xx} - C_{xx} - 2u_x C_{xu} - u_x^2 C_{uu} = 0.$$

Последнее из этих уравнений квадратично по u_x , что позволяет расщепить его в систему из трёх уравнений, и т.д. В итоге мы получим окончательный вид функции φ :

$$\varphi = ((\alpha t + \beta)x + \gamma t + \delta)u_x + (\alpha t^2 + 2\beta t + \varepsilon)u_t + (\alpha t + \beta)u + \beta x + \gamma,$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \in \mathbb{R}$. Таким образом, алгебра симметрий уравнения Бюргера порождена векторными полями

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} & \quad \text{— трансляция по } x, \\ \frac{\partial}{\partial t} & \quad \text{— трансляция по } t, \\ x \frac{\partial}{\partial x} + 2t \frac{\partial}{\partial t} - u \frac{\partial}{\partial u} & \quad \text{— масштабная симметрия,} \\ t \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial u} & \quad \text{— преобразование Галилея,} \end{aligned}$$

а также

$$tx \frac{\partial}{\partial x} + t^2 \frac{\partial}{\partial t} - (tu + x) \frac{\partial}{\partial u}.$$

(6) Несколько слов о применениях симметрий.

Групповая классификация. Пусть $\mathcal{E}, \mathcal{E}' \subset J^k(\pi)$ — уравнения. Очевидно, необходимым условием их эквивалентности является изоморфность соответствующих алгебр симметрий. В частности, если уравнение $\mathcal{E}$ содержит параметр (возможно, функциональный), то от этого параметра зависит, вообще говоря, и алгебра его симметрий. Опыт показывает, что «максимальная симметричность», как правило, соответствует физически (или геометрически) интересным случаям. Как практически работает групповая классификация, иллюстрируют задачи 88–90.

Размножение решений. Пусть f — решение уравнения $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$, т.е. такое сечение расслоения π , что график $[f]^k$ его k -джета лежит в $\mathcal{E}$. Если $g: J^k(\pi) \rightarrow J^k(\pi)$ — симметрия уравнения, то образ $g([f]^k)$ — также решение (возможно, обобщённое). Если X — инфинитезимальная симметрия и A_τ — соответствующая однопараметрическая группа преобразований, то семейство подмногообразий $A_\tau[f]^k \subset \mathcal{E}$ состоит из обобщённых решений (а при малых τ — из классических). Как следует из задач 92 и 93, для того, чтобы найти действие A_τ на f , нужно решить эволюционное уравнение

$$\frac{\partial f_\tau}{\partial \tau} = \varphi \left(x^1, \dots, x^n, f_\tau, \frac{\partial f_\tau}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f_\tau}{\partial x^n} \right)$$

с начальными данными $f_\tau|_{\tau=0} = f$ (или систему аналогичных уравнений, если $\dim \pi > 1$).

Пример 9. Пусть X — галилеева симметрия уравнения Бюргерса (пример 8) и $u = f(x, t)$ — некоторое решение этого уравнения. Тогда сдвиги по траекториям векторного поля X преобразуют это решение в семейство решений $u_\tau = f(t\tau + x, t) + \tau$.

Редукции. Пусть снова g — симметрия уравнения $\mathcal{E}$. Решение f называется инвариантным (стационарным) относительно этой симметрии, если $g([f]^k) = [f]^k$, т.е. график его k -джета переходит в себя. На инфинитезимальном уровне, в силу задач 92 и 93, инвариантные относительно симметрии $Y = X_\varphi$ решения должны удовлетворять уравнениям

$$\varphi \left(x^1, \dots, x^n, f, \frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n} \right) = 0.$$

Система, состоящая из уравнения $\mathcal{E}$ и условий инвариантности, называется редукцией уравнения $\mathcal{E}$ относительно симметрии X_φ и содержит $n - 1$ независимую переменную. В частности, редукции уравнений с двумя независимыми переменными являются обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Пример 10. Если уравнение допускает две трансляции (скажем, по x и t ; это означает, что оно не зависит явно от этих переменных), то решения, инвариантные относительно симметрии $vu_x + u_t$, $v = \text{const}$, называются бегущими волнами. Такие решения важны, например, во многих задачах гидродинамики. Опишем бегущие волны, удовлетворяющие уравнению Бюргерса. Всякое такое решение подчиняется уравнению

$$vu_x + u_t = 0,$$

т.е. его первые интегралы находятся из условий

$$\frac{dx}{v} = \frac{dt}{1} = \frac{du}{0}.$$

Значит, $u = u(\xi)$, где $\xi = x - vt$. Подставляя в уравнение Бюргерса, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$-vu' = uu' + u'',$$

где $u' = du/d\xi$. Следовательно,

$$\frac{du}{d\xi} + u^2 + 2vu + a = 0, \quad a = \text{const},$$

и мы получаем три класса решений

$$u = \begin{cases} -\alpha \operatorname{tg}(\alpha(\xi - \beta)) - v, & \text{если } a - v^2 > 0, \\ \frac{1}{\xi - \beta} - v, & \text{если } a - v^2 = 0, \\ -\alpha \operatorname{cth}(\alpha(\xi - \beta)) - v, & \text{если } a - v^2 < 0, \end{cases}$$

где $\alpha = \sqrt{|v^2 - a|}$, $\beta = \text{const}$.

Пример 11. Рассмотрим решения уравнения Бюргерса, инвариантные относительно галилеевой симметрии $\varphi = tu_x + 1$. Они должны удовлетворять характеристической системе

$$\frac{dx}{t} = \frac{dt}{0} = -\frac{du}{1},$$

полный интеграл которой имеет вид

$$\Psi(x + tu, t) = \text{const.}$$

Значит,

$$u = \psi(t) - \frac{x}{t}.$$

Подставляя в уравнение Бюргерса, получаем $t\psi' + \psi = 0$, т.е. $u = (k - x)/t$, $k = \text{const.}$

Задача 78. Рассмотрим пример 3.

- (1) Покажите, что $\mathcal{E}_\omega$ — дифференциальное уравнение второго порядка.
- (2) Выпишите это уравнение в локальных координатах.
- (3) Сформулируйте условия на формы ω и ω' , при которых уравнения $\mathcal{E}_\omega$ и $\mathcal{E}_{\omega'}$ одинаковы.
- (4) Каким условиям должна удовлетворять форма ω , чтобы (а) уравнение $\mathcal{E}_\omega$ было квазилинейным? (б) линейным?

Задача 79. Докажите, что все уравнения Бюргерса попарно эквивалентны.

Задача 80. Постройте пример уравнения, все симметрии которого тривиальны.

Задача 81. Данное выше определение симметрии использует вложение $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$. Но, очевидно, одно и то же уравнение можно по-разному вкладывать в пространства джетов (приведите примеры). Возможна, однако, альтернативная точка зрения, не апеллирующая к этому вложению. Именно, скажем, что диффеоморфизм многообразия $\mathcal{E}$ является внутренней симметрией уравнения, если он сохраняет распределение $\mathcal{C}^\mathcal{E}$. Очевидно, что всякая симметрия в смысле п. 3 определяет внутреннюю симметрию, но обратное, вообще говоря, не верно. Приведите примеры.

Задача 82 (метод характеристик). Покажите, что решение задачи Коши для скалярных уравнений первого порядка сводится к интегрированию характеристического векторного поля (пример 7). Дайте попутно геометрическое определение данных Коши.

Задача 83. Опишите симметрии уравнения Монжа–Ампера $\mathcal{E}_\omega$ в терминах формы ω .

Задача 84. Восстановите детали вычислений, приведённых в примере 8.

Задача 85. Опишите алгебру Ли симметрий уравнения теплопроводности $u_t = u_{xx}$.

Задача 86. Опишите алгебру Ли симметрий уравнения Кортевега–де Фриза.

Задача 87. Опишите алгебру Ли симметрий уравнения синус Гордона.

Задача 88. Дайте групповую классификацию класса уравнений вида $u_t = f(u, u_x) + u_{xx}$.

Задача 89. Дайте групповую классификацию класса уравнений вида $u_t = f(u, u_x) + u_{xxx}$.

Задача 90. Дайте групповую классификацию класса уравнений вида $u_{xy} = f(u)$.

Задача 91. Приведите пример, в котором симметрия переводит классическое решение уравнения в обобщённое.

Задача 92. Пусть $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$, $\dim \pi = 1$ и $X = X_\varphi$ — инфинитезимальная симметрия, $\varphi = \varphi(x^1, \dots, x^n, u, u_1, \dots, u_n)$. Докажите, что решения f_τ , полученные из решения $u = f(x^1, \dots, x^n)$ преобразованиями соответствующей однопараметрической группы сдвигов A_τ удовлетворяют следующей граничной задаче

$$\frac{\partial f_\tau}{\partial \tau} = \varphi \left(x^1, \dots, x^n, f_\tau, \frac{\partial f_\tau}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f_\tau}{\partial x^n} \right), \quad f_\tau|_{\tau=0} = f.$$

Задача 93. Пусть $\dim \pi > 1$ и $Y = X^{(k)}$ — симметрия уравнения $\mathcal{E}$, полученная поднятием векторного поля $X \in D(J^0(\pi))$ (теорема Ли–Беклунда). Рассмотрим вектор-функцию $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^m)$, где

$$\varphi^j = i_{X^{(1)}}(du^j - \sum_i u_i^j dx^i)$$

и назовём её производящим сечением поля Ли Y .

- (1) При каких условиях вектор-функция $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^m)$ на $J^1(\pi)$ является производящим сечением поля Ли?
- (2) Сформулируйте и докажите аналог утверждения из задачи 92 для многомерных расслоений π .

Задача 94. Опишите редукции уравнения Бюргерса по масштабной симметрии и симметрии, квадратичной по t (пример 8)

Задача 95. Бегущие волны уравнения Кортевега–де Фриза называются солитонами. Опишите их.

Задача 96. Бегущие волны уравнения синус Гордона называются кинками (и антикинками). Опишите их.

Продолжение следует...

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Джет Неструев, *Гладкие многообразия и наблюдаемые*, М.: МЦНМО, 2000, 300с, <http://diffiety.ac.ru/books/texts/nestruев.pdf>
- [2] Joseph Krasil'shchik, Barbara Prinari, *Lectures on Linear Differential Operators over Commutative Algebras*, http://diffiety.ac.ru/preprint/99/01_99.pdf
- [3] М. Атья, И. Макдональд, *Введение в коммутативную алгебру*, Факториал Пресс, Серия: XX век. Математика и механика, 2003 г., 144 с.
- [4] С. Маклейн, *Категории для работающего математика*, Москва: Физматлит, 2004, 349 с.
- [5] Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В. *Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений*. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 336 с.
- [6] Виноградов А.М., Красильщик И.С. (Ред.) *Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики*. Серия: XX век. Математика и механика, Факториал, 2005, Вып. 9, Изд. 2. 380 с.
- [7] I. S. Krasil'shchik and A. M. Verbovetsky, *Homological methods in equations of mathematical physics*, Open Education & Sciences, Opava, 1998, [arXiv:math/9808130](https://arxiv.org/abs/math/9808130)