И.С. Красильщик

Линейные дифференциальные операторы над коммутативными алгебрами и геометрия пространств джетов

Независимый московский университет
Осенний семестр 2015–2016 гг.

Предуведомление. Здесь — краткое содержание лекций и задачи к ним. Распределение материала по лекциям не всегда полностью соответствует видеоверсии.

Текст обновляется по мере чтения лекций. Вопросы можно посылать на мою почту.

Содержание

Лекция 1 (09.09.2015)

Основные функторы дифференциального исчисления

(1) $\mathbb{R}$-точки алгебры $C^\infty(M)$, гомеоморфность M и $|C^\infty(M)|_{\mathbb{R}}$, где $|A|_{\Bbbk}$ обозначает множество $\Bbbk$-точек $\Bbbk$-алгебры A
(2) Кольца, поля, алгебры, модули, категория $\mathscr{M}od(A)$, $\hom_A(P,Q)$, $\hom_{\Bbbk}(P,Q)$, тензорное произведение, свободные и проективные модули
(3) Категории, функторы, естественные преобразования. Изоморфность $\mathscr{PM}od(C^\infty(M))$ и $\mathscr{V}ect(M)$
(4) Векторные поля и дифференцирования
(5) Линейные дифференциальные операторы $P \to Q$. Случай $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Простейшие свойства

Задача 1. Если M — компактное многообразие, то любой максимальный идеал алгебры $C^\infty(M)$ имеет вид $\mu_x = \{\, f \in C^\infty(M) \mid f(x) = 0 \,\}$, $x \in M$. В некомпактном случае это не так. Постройте контрпример.

Задача 2. Пусть $A = C^0(\mathbb{R}^1)$ — алгебра непрерывных функций на прямой. Опишите $\mathrm{Diff}_*(A)$.

Задача 3. Пусть A — $\Bbbk$-алгебра и P, Q — A-модули. Докажите, что тождественные отображения

$$\mathrm{id}\colon \mathrm{Diff}_k(P,Q) \to \mathrm{Diff}_k^+(P,Q), \quad \mathrm{id}\colon \mathrm{Diff}_k^+(P,Q) \to \mathrm{Diff}_k(P,Q)$$

являются дифференциальными операторами порядка $\le k$.

Задача 4. Мы привыкли к тому, что любой дифференциальный оператор можно построить из дифференцирований и функций, т.е. алгебра $\mathrm{Diff}_*(C^\infty(\mathbb{R}^n))$ порождается элементами из $\mathrm{Diff}_1(C^\infty(\mathbb{R}^n))$. Для произвольной алгебры это не так. Постройте контрпример.

Более сложный вопрос: какие условия на алгебру A обеспечивают порождаемость всех операторов операторами первого порядка?

Задача 5. Пусть A — $\mathbb{R}$-алгебра линейных дифференциальных операторов $\Delta\colon C^\infty(\mathbb{R}^1) \to C^\infty(\mathbb{R}^1)$ с постоянными коэффициентами.

(1) Опишите $|A|_{\mathbb{R}}$.
(2) Опишите $\mathrm{Diff}_*(A)$.

Задача 6. Рассмотрим $\mathbb{R}$-алгебру полиномиальных функций на кресте $A = \mathbb{R}[x,y]/(xy)$.

(1) Опишите $|A|_{\mathbb{R}}$.
(2) Опишите $\mathrm{Diff}_*(A)$.

Задача 7. Пусть m и $n > 1$ — натуральные и $A = \mathbb{Z}_n[x]/(x^m)$.

(1) Опишите $|A|_{\mathbb{Z}_n}$.
(2) Опишите $\mathrm{Diff}_*(A)$.

Лекция 2 (16.09.2015)

Символы

(1) Зафиксируем обозначения:
- $\Bbbk$ — поле, A — $\Bbbk$- алгебра, $|A|_{\Bbbk} = \{\, \varphi\colon A \to \Bbbk \mid \varphi$ — эпи $\}$ — пространство $\Bbbk$-точек
- $\operatorname{Diff}_k^{(+)}(P,Q) = \{\, \Delta \in \hom_{\Bbbk}(P,Q) \mid (\delta_{a_0} \circ \dots \circ \delta_{a_k})(\Delta) = 0 \,\}$ — бимодуль дифференциальных операторов порядка $\le k$
- В частности, $\operatorname{Diff}_k^{(+)}(P) = \operatorname{Diff}_k^{(+)}(A,P)$
- $\operatorname{Diff}_*^{(+)}(P,Q) = \cup_{k\ge 0} \operatorname{Diff}_k^{(+)}(P,Q)$
- $D(P) = \{\, X \in \hom_{\Bbbk}(A,P) \mid X(ab) = aX(b) + bX(a) \,\} \subset \operatorname{Diff}_1(P)$ — модуль P-значных дифференцирований

(2) $\operatorname{Diff}_*^{(+)}(P,P)$ — ассоциативная алгебра с фильтрацией, $\operatorname{Diff}_*^{(+)}(P,Q)$ — левый $\operatorname{Diff}_*^{(+)}(P,P)$- и правый $\operatorname{Diff}_*^{(+)}(Q,Q)$-модуль с фильтрацией. При этом $a(\Delta\cdot\nabla) = (a\Delta)\cdot\nabla$, $a^+(\Delta\cdot\nabla) = \Delta\cdot(a^+\nabla)$, $(a^+\Delta)\cdot\nabla = \Delta\cdot(a\nabla)$.

(3) Соответствующий градуированный объект $\operatorname{Smbl}_*(P,Q) = \oplus_{k=0}^{\infty} \operatorname{Smbl}_k(P,Q)$, где $\operatorname{Smbl}_k(P,Q) = \operatorname{Diff}_k^{(+)}(P,Q)/\operatorname{Diff}_{k-1}^{(+)}(P,Q)$ называется модулем символов. Если $\Delta \in \operatorname{Diff}_k^{(+)}(P,Q)$ то класс смежности $\sigma_k(\Delta) \in \operatorname{Smbl}_k(P,Q)$ называется его символом. Если $s = \sigma_k(\Delta) \in \operatorname{Diff}_k^{(+)}(P,Q)$ и $s' = \sigma_{k'}(\Delta') \in \operatorname{Diff}_{k'}^{(+)}(Q,R)$, то по определению $s'\cdot s = \sigma_{k+k'}(\Delta'\circ\Delta)$

(4) Рассмотрим коммутативную алгебру $S = \operatorname{Smbl}_*(A)$ (задача 9). Пусть $s = \sigma_k(\Delta) \in \operatorname{Smbl}_k(A)$ и $s' = \sigma_{k'}(\Delta') \in \operatorname{Smbl}_{k'}(A)$. Определим скобку Пуассона $\{s,s'\} = \sigma_{s+s'-1}(\Delta\circ\Delta' - \Delta'\circ\Delta)$. Она $\Bbbk$-линейна, кососимметрична и удовлетворяет тождеству Якоби.

(5) Скобка Пуассона определяет отображение $\partial\colon S \to D(S)$, $s \mapsto \{s,\cdot\}$, являющееся $D(S)$-значным дифференцированием. Его ядро $\ker\partial = H_P^0(S)$ называется пуассоновым центром, а элементы ядра — казимирами пуассоновой структуры. Элементы образа $X_s = \{s,\cdot\}$ — это гамильтоновы векторные поля. В силу тождества Якоби $X_{\{s,s'\}} = [X_s, X_{s'}]$.

Дифференцирование $X \in D(S)$ — симметрия пуассоновой структуры, если $X\{s,s'\} = \{X(s),s'\} + \{s,X(s')\}$, и можно определить группу $H_P^1(S) = \{\text{симметрии}\}/\operatorname{im}\partial$

(6) Вот ещё ситуация, в которой возникают пуассоновы структуры: пусть $\mathfrak{g}$ — $\Bbbk$-алгебра Ли и $U(\mathfrak{g})$ — её универсальная обёртывающая. Тогда в присоединённой градуированной алгебре $S(\mathfrak{g})$ определяется естественная пуассонова структура.

Как определить $H_P^i(S)$ при $i > 1$?

Задача 8. Докажите, что при переходе к символам бимодульная структура в $\operatorname{Diff}_k^{(+)}(P,Q)$ сливается в одну.

Задача 9. Докажите, что алгебра $\mathrm{Smbl}_*(A)$ коммутативна.

Задача 10. Опишите алгебры $\mathrm{Smbl}_*(A)$ и пространства $|\mathrm{Smbl}_*(A)|_{\Bbbk}$ для алгебр A из задач 5–7.

Задача 11. Докажите, что в случае $A = C^\infty(M)$ алгебра $\mathrm{Smbl}_*(A)$ совпадает с алгеброй гладких функций на T^*M, полиномиальных по слоям.

Задача 12. Докажите, что если $A = C^\infty(M)$, то $H^1_P(S)$ изоморфна первой группе когомологий де Рама многообразия M.

Задача 13. Пусть $X \in D(A) \subset \mathrm{Diff}_1(A)$. Положим $\rho(X) = \sigma_1(X) \in \mathrm{Smbl}_1(A)$. Докажите, что при $A = C^\infty(M)$ эта конструкция даёт каноническую форму $p\,dq$ на T^*M.

Задача 14. Рассмотрим случай $\operatorname{char}\Bbbk = 0$. Пусть $a \in A$, $s = \sigma_k(\Delta) \in \mathrm{Smbl}_k(A)$. Определим $\varphi_a\colon \mathrm{Smbl}_k(A) \to A$, полагая $\varphi_a(s) = \frac{1}{k!}\delta^k_a(\Delta)$. Докажите, что

(1) $\varphi_a(ss') = \varphi_a(s)\varphi_a(s')$.
(2) Если $A = C^\infty(M)$, то $\varphi_a = \psi^*_{da}$, где $\psi_{da}\colon M \to T^*M$ — сечение, соответствующее форме da.

Задача 15. Вычислите $H^1_P(\mathfrak{g})$ (см. п. 6), если

(1) $\mathfrak{g}$ — двумерная разрешимая алгебра Ли.
(2) $\mathfrak{g} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & k_{12} & k_{13} \\ 0 & 0 & k_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \mid k_{ij} \in \Bbbk \right\}$ — алгебра Гейзенберга.
(3) $\mathfrak{g}$ полупростая.

Лекция 3 (23.09.2015)

Представляющие объекты

(1) Пусть Q — A-модуль. Определим отображение $\square_k\colon \mathrm{Diff}^+_k(Q) \to Q$, полагая $\square_k(\Delta) = \Delta(1)$.

Предложение 1. *Оператор $\square_k$ является дифференциальным оператором порядка $\le k$ и обладает следующим универсальным свойством: для любого $\Delta \in \mathrm{Diff}_k(P,Q)$ найдётся такой единственный гомоморфизм ψ_Δ, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "\Delta"] \arrow[dr, "\psi_\Delta"'] & & Q \\ & \mathrm{Diff}^+_k(Q) \arrow[ur, "\square_k"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Таким образом, функтор $\mathrm{Diff}_k(\bullet, Q)\colon P \Rightarrow \mathrm{Diff}^{(+)}_k(P,Q)$ представим.

(2) Зафиксируем модуль P и рассмотрим тензорное произведение $A \otimes_{\Bbbk} P$. Пусть $\delta_a(b \otimes p) = ab \otimes p - b \otimes ap$, a, $b \in A$, $p \in P$; определим модуль k-джетов $\mathscr{J}^k(P) = A \otimes_{\Bbbk} P / \operatorname{im}(\delta_{a_0} \circ \dots \circ \delta_{a_k})$ и $j_k(p) = p \bmod \operatorname{im}(\delta_{a_0} \circ \dots \circ \delta_{a_k}) \in \mathscr{J}^k(P)$.

Предложение 2. *Оператор j_k является дифференциальным оператором порядка $\leq k$ и обладает следующим универсальным свойством: для любого $\Delta \in \mathrm{Diff}_k(P, Q)$ найдётся такой единственный гомоморфизм ψ_k^Δ, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "\Delta"] \arrow[dr, "j_k"'] & & Q \\ & \mathscr{J}^k(P) \arrow[ur, "\psi_k^\Delta"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Итак, функтор $\mathrm{Diff}_k(P, \bullet)\colon Q \Rightarrow \mathrm{Diff}_k(P, Q)$ представим. Соответствие соответствие $\mathscr{J}^k_{(+)}\colon P \Rightarrow \mathscr{J}^k_{(+)}(P)$ — функтор из категории A-модулей в категорию A-бимодулей.

(3) Поскольку всякий оператор порядка $\leq k$ есть оператор порядка $\leq k + l$, имеют место коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd} \mathscr{J}^{k+l}(P) \arrow[rr, "\nu_{k+l,k} = \psi_{k+l}^{j_k}"] & & \mathscr{J}^k(P) \\ & P \arrow[ul, "j_{k+l}"] \arrow[ur, "j_k"'] & \end{tikzcd}$$

Поэтому можно определить модуль $\mathscr{J}^\infty(P)$ бесконечных джетов как обратный предел и оператор $j_\infty\colon P \to \mathscr{J}^\infty(P)$.

(4) Композиция $j_l \circ \Delta\colon P \to \mathscr{J}^l(Q)$ называется l-м (джет-) продолжением оператора Δ. Таким образом, есть коммутативная диаграмм

$$\begin{tikzcd} \mathscr{J}^{k+l}(P) \arrow[r, "\psi_{k+l}^\Delta"] & \mathscr{J}^l(Q) \\ P \arrow[u, "j_{k+l}"] \arrow[r, "\Delta"] & Q, \arrow[u, "j_l"'] \end{tikzcd}$$

где $\psi_{k+l}^\Delta = \psi_{k+l}^{j_l \circ \Delta}$. Из задачи 19 следует, что соответствие $\mathscr{J}^\infty\colon P \Rightarrow \mathscr{J}^\infty(P)$ можно понимать как функтор из категории $\mathscr{D}\!\mathit{iff}(A)$, объектами которой являются A-модули, а морфизмами — линейные дифференциальные операторы, в категорию $\mathscr{M}\!od(\mathrm{Diff}_*(A))$.

(5) Пусть $i\colon A \to \mathscr{J}^1(A)$ — гомоморфизм, порождённый отображением $a \mapsto a \times 1 \in A \times_{\Bbbk} A$ и $\Lambda^1(A) = \operatorname{coker} i$ (модуль 1-форм).

Определим $d\colon A \to \Lambda^1(A)$ (дифференциал де Рама)как композицию $j_1\colon A \to \mathscr{J}^1(A)$ с естественной проекцией $\mathscr{J}^1(A) \to \Lambda^1(A)$.

Предложение 3. *Дифференциал де Рама является дифференцированием алгебры A со значениями в модуле $\Lambda^1(A)$, обладающим следующим свойством: для любого A-модуля P и дифференцирования $X \in D(P)$ найдётся единственный гомоморфизм ψ_X, для которого диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "X"] \arrow[dr, "d"'] & & P \\
& \Lambda^1(A) \arrow[ur, "\psi_X"'] &
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Таким образом, функтор $D\colon P \Rightarrow D(P)$ представим в категории A-модулей и $D(P) = \hom_A(\Lambda^1(A), P)$.

(6) Рассмотрим свободный A-модуль с образующими d_a, $a \in A$, и соотношениями

$$d_{a+b} = d_a + d_b, \quad d_{\alpha a} = \alpha d_a, \quad d_{ab} = a d_b + b d_a, \qquad a, b \in A, \quad \alpha \in \Bbbk.$$

Это эксплицитное описание модуля 1-форм, причём $d(a) = d_a$.

(7) Определим модули i-форм как внешние степени $\Lambda^i(A) = \underbrace{\Lambda^1(A) \wedge \dots \wedge \Lambda^1(A)}_{i \text{ раз}}$, $i \geq 0$, и комплекс де Рама алгебры A

$$A \xrightarrow{d} \Lambda^1(A) \longrightarrow \dots \longrightarrow \Lambda^i(A) \xrightarrow{d} \Lambda^{i+1}(A) \longrightarrow \dots,$$

полагая

$$d(a\, da_1 \wedge \dots \wedge da_i) = da \wedge da_1 \wedge \dots \wedge da_i.$$

Очевидно, $d \circ d = 0$.

(8) Пусть P — A-модуль. Значением P в точке $\theta \in |A|_\Bbbk$ называется фактор $P_\theta = P/(\ker\theta \cdot P)$, а значением элемента $p \in P$ — его класс $p(\theta) \in P_\theta$. Элемент называется невидимым, если его значения во всех точках тривиальны. Например, форма $de^x - e^x\,dx$ является невидимым элементом модуля $\Lambda^1(C^\infty(\mathbb{R}^1))$. По этой причине модуль 1-форм алгебры $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ не совпадает с модулем «геометрических» 1-форм на прямой.

Модуль называется геометрическим, если все его невидимые элементы тривиальны. Пусть $\mathscr{GM}od(A)$ — полная подкатегория, состоящая из геометрических A-модулей. Для каждого модуля P положим

$$\mathscr{G}P = P \Big/ \bigcap_{\theta \in |A|_\Bbbk} \ker\theta \cdot P\,.$$

Свойства соответствия $P \Rightarrow \mathscr{G}P$ рассмотрены в задаче 24.

Задача 16. Докажите предложение 1.

Задача 17. Докажите предложение 2.

Задача 18. В $\mathscr{J}^k(P)$ две модульных структуры, порождаемые умножениями $a(b \otimes p) = (ab) \otimes p$ и $a^+(b \otimes p) = b \otimes (ap)$. Соответствующий бимодуль обозначается $\mathscr{J}^k_{(+)}(P)$. Докажите, что тождественные отображения $\mathrm{id} : \mathscr{J}^k(P) \to \mathscr{J}^k_+(P)$ и $\mathrm{id} : \mathscr{J}^k_+(P) \to \mathscr{J}^k(P)$ суть дифференциальные операторы порядка $\leq k$.

Задача 19. Пусть $\Delta \colon P \to Q$ — дифференциальный оператор порядка $\leq k$. Докажите, что:

(1) Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{J}^{k+l+1}(P) & \xrightarrow{\psi^\Delta_{k+l+1}} & \mathscr{J}^{l+1}(Q) \\ {\scriptstyle \nu_{k+l+1,k+l}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \nu_{l+1,l}} \\ \mathscr{J}^{k+l}(P) & \xrightarrow{\psi^\Delta_{k+l}} & \mathscr{J}^{l}(Q) \end{array}$$

коммутативна, т.е. определён гомоморфизм $\psi^\Delta_* \colon \mathscr{J}^\infty(P) \to \mathscr{J}^\infty(Q)$.

(2) Если $\nabla \colon Q \to R$ — ещё один дифференциальный оператор, то $\psi^{\nabla\circ\Delta}_* = \psi^\nabla_* \circ \psi^\Delta_*$.

Задача 20. Докажите предложение 3.

Задача 21. Хотелось бы, чтобы соответствие $A \Rightarrow \Lambda^1(A)$ было функтором. Откуда куда?

Задача 22. Докажите утверждение, сформулированное в п. 6.

Задача 23. Опишите невидимые элементы модулей $\Lambda^1(C^\infty(M))$ и $\mathscr{J}^k(C^\infty(M))$.

Задача 24. Пусть A — $\Bbbk$-алгебра и P — A-модуль. Докажите следующие утверждения.

(1) Соответствие $P \Rightarrow \mathscr{G}P$ является функтором из категории $\mathscr{M}od(A)$ в $\mathscr{G}\mathscr{M}od(A)$.

(2) Функторы $D \colon P \Rightarrow D(P)$ и $\mathrm{Diff}_k(P, \cdot) \colon Q \Rightarrow \mathrm{Diff}_k(P, Q)$ представимы в категории геометрических модулей и их представляющими объектами являются модули $\mathscr{G}\Lambda^1(A)$ и $\mathscr{G}\mathscr{J}^k(P)$ соответственно.

(3) Если M — гладкое многообразие, то $\mathscr{G}\Lambda^1(C^\infty(M)) = \Lambda^1(M)$.

Задача 25. Пусть $\omega \in \Lambda^1(A)$ — произвольная 1-форма. Определите гомоморфизм $\varphi_\omega \colon \mathrm{Smbl}_*(A) \to A$, который обобщает гомоморфизм $1f_a$, построенный в задаче 14

Лекция 4 (30.09.2015)

Скобки Схоутена–Нийенхейса и пуассоновы алгебры

(1) Пусть P — A-модуль. Определим модули $D_i(P)$ полидиффренцирований, полагая $D_0(P) = P$, $D_1(P) = D(P)$ и

$$D_i(P) = \{\, X \in D(D_{i-1}(P)) \mid (X(a))(b) + (X(b))(a) = 0,\ a, b \in A\,\},$$

для всех $i > 1$.

Предложение 4. *Соответствие $P \Rightarrow D_i(P)$ является функтором и модуль $\Lambda^i(A)$ — его представляющий объект. Этот функтор представим и в категории геометрических модулей, и представляющим объектом является $\mathscr{G}\Lambda^1(A)$.*

(2) Пусть $X \in D_i(A)$, $Y \in D_j(P)$. Определим элемент $X \wedge Y \in D_{i+j}(P)$, полагая $X \wedge Y = X \cdot Y$, если $i = j = 0$, и по индукции

$$(X \wedge Y)(a) = X \wedge Y(a) + (-1)^j X(a) \wedge Y, \qquad i + j > 0.$$

Таким образом определённое внешнее умножение ассоциативно и кососоммутативно,

$$X \wedge Y = (-1)^{ij} Y \wedge X,$$

если $Y \in D_j(A)$.

(3) Определим операцию внутреннего умножения (подстановки)

$$\mathrm{i}\colon D_j(P) \otimes_A \Lambda^i(A) \to \begin{cases} P \otimes_A \Lambda^{i-j}(A), & j \le i, \\ D_{j-i}(P), & j \ge i, \end{cases}$$

полагая $\mathrm{i}(X \otimes a) = aX$ и далее по индукции

$$\mathrm{i}(X \otimes\, da \wedge \omega) = \mathrm{i}(X(a) \otimes \omega).$$

Мы будем использовать обозначения

$$\mathrm{i}_X(\omega) = \begin{cases} \mathrm{i}(X \otimes \omega), & i \ge j, \\ 0, & i < j, \end{cases}, \quad \mathrm{i}_\omega(X) = \begin{cases} \mathrm{i}(X \otimes \omega), & i \le j, \\ 0, & i > j. \end{cases}$$

(4) Пусть $X \in D_j(A)$. Определим производную Ли $\mathrm{L}_X\colon \Lambda^i(A) \to \Lambda^{i-j}(A)$ вдоль X, полагая $\mathrm{L}_X = [d, \mathrm{i}_X]$, где $[d, \mathrm{i}_X]$ — суперкоммутатор:

$$[d, \mathrm{i}_X] = d \circ \mathrm{i}_X - (-1)^j \mathrm{i}_X \circ d.$$

Теорема 1. *Для любых двух элементов $X \in D_i(A)$ и $Y \in D_j(A)$ существует такой элемент $[\![X, Y]\!] \in D_{i+j-1}(A)$, что*

$$[\mathrm{L}_X, \mathrm{L}_Y] = \mathrm{L}_{[\![X,Y]\!]}.$$

Это свойство определяет $[\![X, Y]\!]$ однозначно.

Набросок доказательства. Положим $[\![X, a]\!] = X(a)$, $[\![a, Y]\!] = (-1)^j Y(a)$, $a \in A$, и по индукции

$$[\![X, Y]\!](a) = [\![X, Y(a)]\!] + (-1)^{j-1}[\![X(a), Y]\!], \quad i, j > 0.$$

Далее см. задачу 29. □

Элемент $[\![X, Y]\!]$ называется скобкой Схоутена–Нийенхейса (или просто скобкой Схоутена) дифференцирований X и Y.

Предложение 5. *Пусть* $X \in D_i(A)$, $Y \in D_j(A)$, $Z \in D_k(A)$. *Тогда*
(a) $[\![X, Y]\!] + (-1)^{(i-1)(j-1)}[\![Y, X]\!] = 0$,
(b) $[\![X, [\![Y, Z]\!]]\!] = [\![[\![X, Y]\!], Z]\!] + (-1)^{(i-1)(j-1)}[\![X, [\![Y, Z]\!]]\!]$,
(c) $[\![X, Y \wedge Z]\!] = [\![X, Y]\!] \wedge Z + (-1)^{(i-1)j} Y \wedge [\![X, Z]\!]$,
(d) $[\![X, Y]\!] = [X, Y,]$, *если* $i = j = 1$,
(e) $\mathrm{i}_{[\![X,Y]\!]} = [\mathrm{L}_X, \mathrm{i}_Y]$.

(5) С этого момента будем считать, что $\operatorname{char} \Bbbk \neq 2$.

Бидифференцирование $\mathscr{P} \in D_2(A)$ называется пуассоновой структурой, если $[\![\mathscr{P}, \mathscr{P}]\!] = 0$, а пара $(A, \mathscr{P})$ называется пуассоновой алгеброй. Определим скобку Пуассона $\{a, b\}_{\mathscr{P}} = \mathscr{P}(a, b)$, a, $b \in A$, и оператор $\partial_{\mathscr{P}} \colon D_i(A) \to D_{i+1}(A)$, полагая $\partial_{\mathscr{P}}(\Delta) = [\![\mathscr{P}, \Delta]\!]$.

Предложение 6. *Следующие утверждения эквивалентны*:
(a) $\mathscr{P}$ *— пуассонова структура*;
(b) *скобка* $\{\cdot, \cdot\}_{\mathscr{P}}$ *удовлетворяет тождеству Якоби*;
(c) $\partial_{\mathscr{P}}$ *— дифференциал, т.е.* $\partial_{\mathscr{P}} \circ \partial_{\mathscr{P}} = 0$.

Вследствие п. 5с предложения 6 возникает пуассонов комплекс

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow D(A) \longrightarrow \dots \longrightarrow D_i(A) \xrightarrow{\partial_{\mathscr{P}}} D_{i+1}(A) \longrightarrow \dots$$

Его когомологии обозначаются через $H^i(A; \mathscr{P})$ и называются пуассоновыми.

(6) Как и в п. 5 лекции 2, определим пуассонов центр алгебры A, полагая

$$Z_{\mathscr{P}}(A) = \{\, a \in A \mid \{a, b\}_{\mathscr{P}} = 0 \text{ для всех } b \in A \,\},$$

дифференцирования вида $X_a = \mathscr{P}(a)$ будем называть гамильтоновыми, а дифференцирования $X \in D(A)$, обладающими свойством

$$X\{a, b\}_{\mathscr{P}} = \{Xa, b\}_{\mathscr{P}} + \{a, Xb\}_{\mathscr{P}}, \qquad a, b \in A,$$

— инфинитезимальными симметриями пуассоновой структуры (или каноническими дифференцированиями). И те, и другие образуют алгебры Ли относительно коммутатора, которые обозначаются $\mathrm{Ham}(A; \mathscr{P})$ и $\mathrm{Can}(A; \mathscr{P})$ соответственно.

Теорема 2. *Пусть $(A\mathscr{P})$ — пуассонова алгебра.*
(a) $H^0(A;\mathscr{P})$ *совпадает с пуассоновым центром;*
(b) $H^1(A;\mathscr{P}) = \mathrm{Can}(A;\mathscr{P})/\mathrm{Ham}(A;\mathscr{P})$*;*
(c) $H^2(A;\mathscr{P})$ *состоит из классов инфинитезимальных деформаций пуассоновой структуры $\mathscr{P}$ по модулю тривиальных;*
(d) $H^4(A;\mathscr{P})$ *содержит препятствия к продолжению инфинитезимальных деформаций до формальных.*

Задача 26. Докажите предложение 4.

Задача 27. Докажите, что элемент $X \wedge Y$ действительно лежит в $D_{i+j}(P)$, а внешнее умножение обладает указанными в п. 2 свойствами.

Задача 28. Определите понятие дифференциального оператора в категории модулей над кософкоммутатиной алгеброй и докажите, что отображения $\mathrm{i}_\omega\colon D_*(P) \to D_*(P)$ и $\mathrm{i}_X\colon \Lambda^*(A) \to P\otimes_A \Lambda^*(A)$ являются дифференциальными операторами порядков i и j соответственно, где $\Lambda^*(A) = \oplus_{i\geq 0}\Lambda^i(A)$, $D_*(P) = \oplus_{j\geq 0}D_j(P)$, $\omega\in\Lambda^i(A)$, $X\in D_j(P)$.

Задача 29. Докажите теорему 1.

Задача 30. Докажите предложение 5.

Задача 31. Докажите предложение 6

Задача 32. Докажите теорему 2

Задача 33. Пуассонова структура $\mathscr{P}$ называется невырожденной, если определяемый ею гомоморфизм $\varphi_{\mathscr{P}}\colon \Lambda^1(A) \to D_1(A)$, $\varphi_{\mathscr{P}}(\omega) = \mathrm{i}_\omega(\mathscr{P})$, является изоморфизмом. Докажите, что

(1) изоморфизм $\varphi_{\mathscr{P}}$ продолжается до изоморфизмов $\varphi_{\mathscr{P}}^{(i)}\colon \Lambda^i(A) \to D_i(A)$, а их прямая сумма $\varphi_{\mathscr{P}}^{(*)}\colon \Lambda^*(A) \to D_*(A)$ является изоморфизмом внешних алгебр;
(2) 2-форма Ω, образом которой является бивектор $\mathscr{P}$, замкнута (т.е. A является симплектической алгеброй);
(3) пуассоновы когомологии совпадают с когомологиями де Рама алгебры A.

Задача 34. В силу п. 4b предложения 30 пуассоновы когомологии наследуют скобку Схоутена. Докажите, что если структура $\mathscr{P}$ невырождена, то получаемая таким образом скобка тривиальна.

Задача 35. Используя подстановку $\mathrm{i}_{\mathscr{P}}\colon \Lambda^i(A) \to \Lambda^{i-2}(A)$, определите пуассонов дифференциал $d_{\mathscr{P}}\colon \Lambda^i(A) \to \Lambda^{i-1}(A)$. Опишите свойства возникающих таким образом пуассоновых гомологий.

Задача 36. Пусть $(A,\mathscr{P})$ — пуассонова алгебра и $\partial_{\mathscr{P}}\colon D_i(A) \to D_{i+1}(A)$ — её пуассонов дифференциал. Рассмотрим форму $\omega\in\Lambda^j(A)$ и положим $\mathrm{L}_\omega^{\mathscr{P}} = [\partial_{\mathscr{P}}, \mathrm{i}_\omega]\colon D_i(A) \to D_{i-j+1}(A)$. Докажите, что равенство

$$\mathrm{i}_{\{\!\{\omega,\theta\}\!\}_{\mathscr{P}}} = [\mathrm{L}_\omega^{\mathscr{P}}, \mathrm{i}_\theta], \qquad \omega\in\Lambda^j(A), \theta\in\Lambda^k(A),$$

корректно определяет скобку Пуассона $\{\!\{\omega,\theta\}\!\}_{\mathscr{P}} \in \Lambda^{j+k-1}(A)$ на дифференциальных формах, которая обладает следующими свойствами:

(1) $\{\!\{a,\, db\}\!\}_{\mathscr{P}} = -\{a,b\}_{\mathscr{P}}$,
(2) $\{\!\{\, da,\, db\}\!\}_{\mathscr{P}} = \, d\{a,b\}_{\mathscr{P}}$,
(3) $\{\!\{\omega,\theta\wedge\rho\}\!\}_{\mathscr{P}} = \{\!\{\omega,\theta\}\!\}_{\mathscr{P}}\wedge\rho + (-1)^{(j-1)k}\theta\wedge\{\!\{\omega,\rho\}\!\}_{\mathscr{P}}$,
(4) $\{\!\{\omega,\{\!\{\theta,\rho\}\!\}_{\mathscr{P}}\}\!\}_{\mathscr{P}} =$
$= \{\!\{\{\!\{\omega,\theta\}\!\}_{\mathscr{P}},\rho\}\!\}_{\mathscr{P}} + +(-1)^{(j-1)(k-1)}\{\!\{\theta,\{\!\{\omega,\rho\}\!\}_{\mathscr{P}}\}\!\}_{\mathscr{P}}$,
(5) $\{\!\{\omega,\theta\}\!\}_{\mathscr{P}} + (-1)^{(j-1)(k-1)}\{\!\{\theta,\omega\}\!\}_{\mathscr{P}} = 0$,
(6) $\mathrm{L}^{\mathscr{P}}_{\{\!\{\omega,\theta\}\!\}_{\mathscr{P}}} = [\mathrm{L}^{\mathscr{P}}_{\omega},\mathrm{L}^{\mathscr{P}}_{\theta}]$.

Всюду выше квадратные скобки обозначают градуированные коммутаторы.

Задача 37. Две пуассоновы структуры называются совместными, если $[\![\mathscr{P},\mathscr{P}']\!] = 0$ (это, очевидно, эквивалентно тому, что $[\partial_{\mathscr{P}},\partial_{\mathscr{P}'}] = 0$). Докажите следующий результат:

Теорема 3 (Схема Магри)**.** *Пусть $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}' \in D_2(A)$ — совместные пуассоновы структуры и $H^1(A;\mathscr{P}') = 0$. Предположим, что существуют такие элементы a_1, $a_2 \in A$, что $\partial_{\mathscr{P}}(a_1) = \partial_{\mathscr{P}'}(a_2)$. Тогда*:

(1) *Существуют элементы $a_3,\dots,a_s,\dots \in A$, для которых $\partial_{\mathscr{P}}(a_s) = \partial_{\mathscr{P}'}(a_{s+1})$.*
(2) *Эти элементы находятся в инволюции относительно обеих скобок Пуассона, т.е.*

$$\{a_i,a_j\}_{\mathscr{P}} = \{a_i,a_j\}_{\mathscr{P}'} = 0$$

для всех i, $j \geq 1$.

Лекция 5 (07.10.2015)

Скобки Фрёлихера–Нийенхейса и алгебры со связностью

(1) Мы будем рассматривать модули $\Lambda^k(A)$-значных дифференцирований $D(\Lambda^k(A))$. Определим внутреннее произведение $\mathrm{i}_\Omega(\omega) \in \Lambda^{k+j-1}(A)$ элемента $\Omega \in D(\Lambda^k(A))$ и формы $\omega \in \Lambda^j(A)$ как образ элемента $\Omega\otimes\omega$ при композиции

$$D(\Lambda^k(A))\otimes_A\Lambda^j(A) \xrightarrow{\ \mathrm{i}\ } \Lambda^k(A)\otimes\Lambda^{j-1}(A) \xrightarrow{\ \wedge\ } \Lambda^{k+j-1}(A),$$

где первое отображение — подстановка, введённая в п. 3 лекции 2. Тогда определена и производная Ли

$$\mathrm{L}_\Omega = [d,\mathrm{i}_\Omega]\colon \Lambda^j(A)\to\Lambda^{k+j}(A).$$

Предложение 7. *Пусть $\Omega \in D(\Lambda^k(A))$, $\omega\in\Lambda^j(A)$. Тогда*
(a) $\mathrm{L}_\Omega(\omega\wedge\theta) = \mathrm{L}_\Omega(\omega)\wedge\theta + (-1)^{kj}\omega\wedge\mathrm{L}_\Omega(\theta)$,
(b) $[\mathrm{L}_\omega,\, d] = 0$,
(c) $\mathrm{L}_{\omega\wedge\Omega} = \omega\wedge\mathrm{L}_\Omega + (-1)^{k+j}\, d\omega\wedge\mathrm{i}_\Omega$
для любой формы $\theta\in\Lambda^*(A)$.

(2) Пусть $\Omega \in D(\Lambda^k(A))$, $\Theta \in D(\Lambda^k(A))$. Рассмотрим коммутатор производных Ли $[\mathrm{L}_\Omega, \mathrm{L}_\Theta]$.

Предложение 8. *Равенство*

$$[\mathrm{L}_\Omega, \mathrm{L}_\Theta] = \mathrm{L}_{[\![\Omega,\Theta]\!]}$$

корректно определяет дифференцирование $[\![\Omega, \Theta]\!] \in D(\Lambda^{k+l}(A))$.

Элемент $[\![\Omega, \Theta]\!]$ называется скобкой Фрёлихера–Нийенхейса (или просто скобкой Нийенхейса) дифференцирований Ω и Θ. Основные свойства этой скобки сформулированы в следующем утверждении:

Предложение 9. *Для любых дифференцирований* $\Omega \in D(\Lambda^k(A))$, $\Theta \in D(\Lambda^l(A))$ *и* $\Xi \in D(\Lambda^m(A))$ *имеют место равенства*

(a) $[\![\Omega, \Theta]\!] + (-1)^{kl}[\![\Theta, \Omega]\!] = 0$,
(b) $[\![\Omega, [\![\Theta, \Xi]\!]]\!] = [\![[\![\Omega, \Theta]\!], \Xi]\!] + (-1)^{kl}[\![\Theta, [\![\Omega, \Xi]\!]]\!]$,
(c) $[\![\Omega, \omega \wedge \Theta]\!] = \mathrm{L}_\Omega(\omega) \wedge \Theta + (-1)^{ik}\omega \wedge [\![\Omega, \Theta]\!] - {} -(-1)^{(k+1)(i+k)}\, d\omega \wedge \mathrm{i}_\Theta(\Omega)$,
(d) $[\mathrm{L}_\Omega, \mathrm{i}_\Theta] = (-1)^k \mathrm{L}_{\mathrm{i}_\Theta(\Omega)} + \mathrm{i}_{[\![\Omega,\Theta]\!]}$,
(e) $\mathrm{i}_\Omega[\![\Theta, \Xi]\!] = [\![\mathrm{i}_\Omega(\Theta), \Xi]\!] + (-1)^{(k+1)l}[\![\Theta, \mathrm{i}_\Omega(\Xi)]\!] + (-1)^l \mathrm{i}_{[\![\Omega,\Theta]\!]}(\Xi) - {} -(-1)^{(l+1)m}\mathrm{i}_{[\![\Omega,\Xi]\!]}(\Theta)$,

где $\omega \in \Lambda^i(A)$)

В этом предложении и ниже подстановка $\mathrm{i}_\Omega(\Theta) \in D(\Lambda^{k+l-1})$ определяется равенством

$$(\mathrm{i}_\Omega(\Theta))(a) = \mathrm{i}_\Omega(\Theta(a))$$

для любого элемента $a \in A$.

(3) Элемент $\mathcal{N} \in D(\Lambda^1(A))$ называется интегрируемым, если выполнено равенство $[\![\mathcal{N}, \mathcal{N}]\!] = 0$ (скобка $[\![\mathcal{N}, \mathcal{N}]\!]$ называется тензором Нийенхейса). Очевидно, интегрируемость равносильно тому, что $\partial_\mathcal{N} \circ \partial_\mathcal{N} = 0$, где $\partial_\mathcal{N}(\Omega) = [\![\mathcal{N}, \Omega]\!]$. Таким образом, для интегрируемых $\mathcal{N}$ определён комплекс

$$0 \longrightarrow D(A) \longrightarrow D(\Lambda^1(A)) \longrightarrow \dots \longrightarrow$$

$$\longrightarrow D(\Lambda^k(A)) \xrightarrow{\partial_\mathcal{N}} D(\Lambda^{k+1}(A)) \longrightarrow \dots$$

Его когомологии обозначаются через $H^k(A; \mathcal{N})$.

В интегрируемом случае производная Ли $d_\mathcal{N} = \mathrm{L}_\mathcal{N} \colon \Lambda^i(A) \to \Lambda^{i+1}(A)$ также является дифференциалом, причём $[d_\mathcal{N}, d] = 0$. Таким образом, пара $(d_\mathcal{N}, \bar{d}_\mathcal{N})$, где $\bar{d}_\mathcal{N} = d - d_\mathcal{N}$ есть бикомплекс на $\Lambda^*(A)$, спектральная последовательность которого сходится к когомологиям де Рама алгебры A. В геометрической теории дифференциальных уравнений это называется вариационным бикомплексом.

(4) Рассмотрим $\Bbbk$-алгебры A и B и гомоморфизм $\varphi\colon A \to B$. Тогда B — A-алгебра, и можно рассмотреть B-модуль $D(A,B)$ B-значных дифференцирований $A \to B$. Если $X \in D(B)$, то операция ограничения $X|_A(a) = X(\varphi(a))$ определяет дифференцирование $X|_A \in D(A,B)$ и точную последовательность

$$0 \longrightarrow D^v(B) \longrightarrow D(B) \longrightarrow D(A,B),$$

где

$$D^v(B) = \{\, X \in D(B) \ \mid\ X|_A = 0 \,\}$$

— модуль φ-вертикальных дифференцирований.

Связностью в A-алгебре B называется B-гомоморфизм $\nabla\colon D(A,B) \to D(B)$, расщепляющий эту последовательность, т.е. такой, что $\nabla(X|_A) = X$ для любого $X \in D(B)$. Формой связности называется элемент $U_\nabla \in D(\Lambda^1(B))$, определяемый равенством

$$\mathrm{i}_X(U_\nabla) = X - \nabla(X|_A), \qquad X \in D(B).$$

Пусть X, $Y \in D(A,B)$. Положим

$$R_\nabla(X,Y) = [\nabla(X), \nabla(Y)] - \nabla\left(\nabla(X)\circ Y - \nabla(Y)\circ X\right).$$

Элемент называется кривизной связности ∇.

Предложение 10. *Если ∇ — связность, то*

$$\mathrm{i}_X(\mathrm{i}_Y[\![U_\nabla, U_\nabla]\!]) = 2R_\nabla(X|_A, Y|_A)$$

для для любых X, $Y \in D(B)$.

(5) Связность называется плоской, если $R_\nabla = 0$. В силу предложения 10 элемент U_∇ является интегрируемым в этом случае и определён дифференциал $\partial_\nabla = \partial_{U_\nabla}$. Рассмотрим комплекс

$$0 \longrightarrow D^v(B) \longrightarrow D^v(\Lambda^1(B)) \longrightarrow \dots$$

$$\dots \longrightarrow D(\Lambda^i(B)) \xrightarrow{\partial_\nabla} D^v(\Lambda^{i+1}(B)) \longrightarrow \dots$$

(см. задачу 48) и обозначим его когомологии через $H^i(B,\nabla)$.

Теорема 4. *Пусть $\nabla\colon D(A,B) \to D(B)$ — плоская связность. Тогда:*

(a) *Группы когомологий $H^i(B,\nabla)$ наследуют операцию внутреннего умножения*

$$\mathrm{i}\colon H^i(B,\nabla) \times H^j(B,\nabla) \to H^{i+j-1}(B,\nabla).$$

В частности, группа $H^1(B,\nabla)$ является ассоциативной алгеброй

$$\mathrm{i}\colon H^1(B,\nabla)\times H^1(B,\nabla)\to H^1(B,\nabla),$$

а подстановка

$$\mathrm{i}\colon H^1(B,\nabla)\times H^0(B,\nabla)\to H^0(B,\nabla)$$

определяет её представление в эндоморфизмах группы $H^0(B,\nabla)$.

(b) *Группы когомологий $H^i(B,\nabla)$ наследуют скобку Нийенхейса*

$$[\![\cdot,\cdot]\!]\colon H^i(B,\nabla)\times H^j(B,\nabla)\to H^{i+j}(B,\nabla).$$

В частности, $H^0(B,\nabla)$ является алгеброй Ли относительно этой скобки.

(6) Другая интерпретация групп $H^i(B,\nabla)$, которая будет важна в последующем изложении, состоит в следующем.
 (a) Дифференцирования $X\in H^0(B,\nabla)$ можно понимать как симметрии связности ∇.
 (b) Элементы группы $H^1(B,\nabla)$ — это классы инфинитезимальных деформаций связности по модулю тривиальных.
 (c) Наконец, группа $H^2(B,\nabla)$ содержит препятствия к продолжению инфинитезимальных деформаций до формальных.

(7) С другой стороны, в силу п. 5а теоремы 4 элементы группы $H^1(B,\nabla)$ «размножают» симметрии связности (как мы увидим ниже, в теории интегрируемых систем они называются операторами рекурсии). С точки зрения приложений к дифференциальным уравнениям важна ситуация, когда получаемые симметрии коммутируют. Рассмотрим симметрию $X\in H^0(B,\nabla)$ и элемент $R\in H^1(B,\nabla)$. Введём обозначения $R(X)=\mathrm{i}_X(R)$ и $X_n=R^n(X)$.

Теорема 5. *Пусть $H^2(B,\nabla)=0$. Тогда для любых X, $Y\in H^0(B,\nabla)$, $R\in H^1(B,\nabla)$ и m, $n=1,2,\dots$ имеют соотношения*

$$[X_m,Y_n]=[X,Y]_{m+n}+\sum_{i=0}^{n-1}([\![X,R]\!]^n(Y_i))_{m+n-i-1}-\sum_{j=0}^{m-1}([\![Y,R]\!]^m(X_j))_{m+n-j-1}.$$

В частности, если $[X,Y]=0$ и $[\![X,R]\!]=[\![Y,R]\!]=0$, то $[X_m,Y_n]=0$ для всех m и n.

(8) В заключение, рассмотрим важный пример. Для произвольной $\Bbbk$-алгебры A и A-модуля P построим алгебру B следующим образом. Пусть $S^*(Q)$ обозначает симметрическую алгебру модуля Q. Положим $B_k=S^*(\mathrm{Diff}_k(P,A))$. Тогда $B_k\subset B_{k+1}$ и мы определяем B как $\cup_k B_k$. Пусть $X\in D(A)$ и $\Delta\in\mathrm{Diff}_k(P,A)$. Положим $\nabla(X)(\Delta)=X\circ\Delta$ и распространим действие $\nabla(X)$ на B по правилу Лейбница. Таким образом мы получаем отображение $\nabla\colon D(A)\to D(B)$. Из задачи 50 следует, что оно достраивается

до плоской связности. Это — алгебраическая модель связности Картана, играющей ключевую роль в геометрии джетов.

Задача 38. Докажите предложение 7.

Задача 39. Докажите предложение 8.

Задача 40. Докажите предложение 9.

Задача 41. Модуль $\Lambda^i(A)\otimes_A D(A)$ можно вложить в $D(\Lambda^i(A))$, полагая $(\omega\otimes X)(a) = X(a)\omega$. Элементы, принадлежащие образу этого вложения, назовём разложимыми. Докажите, что на разложимых элементах скобка Нийенхейса имеет вид

$$[\![\omega \otimes X, \theta \otimes Y]\!] = \omega \wedge \theta \otimes [X, Y] + \omega \wedge \mathrm{L}_X(\theta) \otimes Y - \mathrm{L}_Y(\omega) \wedge \theta \otimes X + \\ + (-1)^i\, d\omega \wedge \mathrm{i}_X(\theta) \otimes Y + (-1)^i \mathrm{i}_Y(\omega) \wedge\, d\theta \otimes X,$$

где $\omega \in \Lambda^i(A)$, $\theta \in \Lambda^j(A)$, X, $Y \in D(A)$.

Задача 42. Покажите, что модуль $D(\Lambda^1(A))$ является ассоциативной алгеброй относительно операции $\Omega \cdot \Theta = \mathrm{i}_\Omega(\Theta)$.

Задача 43. Какие алгебраические структуры (внутреннее умножение, внешнее умножение на формы, скобка Нийенхейса) «выживают» при переходе от модулей $D(\Lambda^k(A))$ к группам когомологий $H^k(A; \mathscr{N})$?

Задача 44. Рассмотрим гладкое многообразие M и автоморфизм кокасательного расслоения J. Он является элементом $C^\infty(M)$-модуля $\hom_{C^\infty(M)}(D(M), D(M)) = \Lambda^1(M) \otimes_{C^\infty(M)} D(M) = D(\Lambda^1(M))$. Почти комплексные структуры на M — это такие J, для которых $J^2 = -\mathrm{id}$. Теорема Ньюлендера–Ниренберга утверждает, что J — комплексная структура, если $[\![J, J]\!] = 0$.

(1) Вычислите когомологии $H^k(C^\infty(M); J)$ для комплексных структур.
(2) Вычислите также когомологии дифференциалов d_J и $\bar{d}_J$.

Задача 45. Исследуйте свойства следующих скобок:

(1) Пусть $\Omega \in D(\Lambda^i(A))$, $\Theta \in D(\Lambda^j(A))$. Определим скобку $[\![\Omega, \Theta]\!] \in D(\Lambda^{i+j-1}(A))$ равенством
$$\mathrm{i}_{[\![\Omega,\Theta]\!]} = [\mathrm{i}_\Omega, \mathrm{i}_\Theta]$$
(это так называемая скобка Ричардсона–Нийенхейса).

(2) Пусть $\mathscr{N} \in D(\Lambda^1(A))$ и $\Omega \in D(\Lambda^i(A))$. Положим
$$\mathrm{L}^{\mathscr{N}}_\Omega = [\partial_{\mathscr{N}}, \mathrm{i}_\Omega] \colon D(\Lambda^j(A)) \to D(\Lambda^{i+j}(A))$$
и определим скобку $[\![\Omega, \Theta]\!]^{\mathscr{N}} \in D(\Lambda^{i+j}(A))$, полагая
$$\mathrm{L}^{\mathscr{N}}_{[\![\Omega,\Theta]\!]^{\mathscr{N}}} = [\mathrm{L}^{\mathscr{N}}_\Omega, \mathrm{L}^{\mathscr{N}}_\Theta],$$
где $\Theta \in D(\Lambda^j(A))$.

(3) Предположим теперь, что $\Lambda^1(A)$ — проективный модуль конечного типа. Тогда $D_i(P) = D_i(A) \otimes_A P$ для любого A-модуля P. Рассмотрим подстановку $\mathrm{i}\colon D_k(\Lambda^1(A)) \otimes_A D_l(A) \to D_{k+l-1}(A)$, полагая
$$\mathrm{i}(X \otimes \omega \otimes Y) = X \wedge \mathrm{i}_\omega(Y).$$
Пусть $\mathscr{P} \in D_2(A)$ и $\Omega \in D_k(\Lambda^1(A))$. Положим
$$\mathrm{L}_\Omega^{\mathscr{P}} = [\partial_{\mathscr{P}}, \mathrm{i}_\Omega]\colon D_l(A) \to D_{k+l}(A).$$
Если $\Theta \in D_l(\Lambda^1(A))$, определим скобку $[\![\Omega, \Theta]\!]^{\mathscr{P}} \in D_{k+l}(\Lambda^1(A))$, полагая
$$\mathrm{L}^{\mathscr{P}}_{[\![\Omega,\Theta]\!]^{\mathscr{P}}} = [\mathrm{L}^{\mathscr{P}}_\Omega, \mathrm{L}^{\mathscr{P}}_\Theta].$$

Есть ли ещё идеи?

Задача 46. Постройте пример пары алгебр (A, B) и гомоморфизма $\varphi\colon A \to B$, в котором операция ограничения $D(B) \to D(A, B)$ не является эпиморфизмом. Какие условия гарантирую эпиморфность?

Задача 47. Докажите предложение 10.

Задача 48. Докажите, что если $\Omega \in D^v(\Lambda^i(B))$ — вертикальное дифференцирование, то $\partial_\nabla(\Omega)$ также является вертикальным.

Задача 49. Докажите теорему 4.

Задача 50. Докажите теорему 5.

Задача 51. Покажите, что отображение ∇, описанное в п. 8, достраивается до плоской связности.

Лекция 6 (14.10.2015)

Джеты и нелинейные дифференциальные операторы

(1) Пусть M — гладкое многообразие, $\dim M = n$, и $\pi\colon E \to M$ — гладкое векторное расслоение размерности m. Обозначим через $\Gamma(\pi)$ $C^\infty(M)$-модуль сечений расслоения π. Пусть $x \in M$ и $s \in \Gamma(\pi)$. Положим
$$[s]_x^k = \{\, s' \in \Gamma(\pi) \mid \text{график } s' \text{ касается графика } s \text{ с порядком } k \,\}$$
и $J_x^k(\pi) = \{\, [s]_x^k \mid s \in \Gamma(\pi) \,\}$. Множество $J_x^k(\pi)$ превращается в векторное пространство, если положить
$$[s]_x^k + [s']_x^k = [s + s']_x^k, \quad \alpha[s]_x^k = [\alpha s]_x^k, \qquad s, s' \in \Gamma(\pi), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Пусть $J^k(\pi) = \cup_{x \in M} J_x^k(\pi)$. Сопоставим каждому $s \in \Gamma(\pi)$ отображение $j_k(s)\colon M \to J^k(\pi)$, полагая
$$j_k(s)(x) = [s]_x^k,$$
и введём в $J^k(\pi)$ минимальную топологию, при которой все отображения $j_k(s)$ непрерывны. Обозначим через $\pi_k\colon J^k(\pi) \to M$, $[s]_x^k \mapsto x$, естественную проекцию.

(2) Пусть $\mathscr{U} \subset M$ — такая карта с координатами $x^1, \dots, x^n$, что расслоение π тривиализуется над $\mathscr{U}$, и $u^1, \dots, u^m$ — послойные координаты в этой тривиализации. Определим в $\pi_k^{-1}(\mathscr{U}) \subset J^k(\pi)$ адаптированные координаты u_σ^j, полагая

$$u_\sigma^j([s]_x^k) = \left.\frac{\partial^{|\sigma|} s^j}{\partial x^\sigma}\right|_x,$$

если сечение s локально задано как $u^j = s^j(x)$, $j = 1, \dots, m$. Полученное многообразие (см. задачу 53) называется многообразием k-джетов сечений расслоения π, а $\pi_k \colon J^k(\pi) \to M$ — расслоением k-джетов. При этом $J^0(\pi) = M$, а естественные проекции $\pi \colon J^k(\pi) \to J^l(\pi)$, $k \geq l$, суть гладкие отображения.

Если $s \in \Gamma(\pi)$, то сечение $j_k(s) \in \Gamma(\pi_k)$ называется k-джетом сечения s.

(3) Пусть $\pi' \colon E' \to M$ — также векторное расслоение, $\dim \pi' = m'$. Обозначим через $\mathscr{F}_k(\pi, \pi')$ модуль сечений индуцированного расслоения $\pi^*(\pi')$. В частном случае, когда π' — тривиальное одномерное расслоение, мы будем использовать обозначение $\mathscr{F}_k(\pi)$. Нелинейный дифференциальный дифференциальный оператор порядка k, действующий из $\Gamma(\pi)$ в $\Gamma(\pi')$, — это элемент $\varphi \in \mathscr{F}_k(\pi, \pi')$, причём соответствующее действие определяется равенством

$$\Delta_\varphi(s) = (j_k(s))^*(\varphi), \qquad s \in \Gamma(\pi).$$

Операторы порядка k находятся во взаимно-однозначном соответствии с морфизмами расслоений

$$\begin{tikzcd} J^k(\pi) \arrow[rr, "\Phi_\Delta"] \arrow[dr, "\pi_k"'] & & E' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & M, & \end{tikzcd}$$

$\Phi_\Delta([s]_x^k) = \Delta(s)\big|_x$. Тогда действие оператора на сечения можно записать в виде $\Delta(s) = \Phi_\Delta \circ j_k(s)$. Если Φ_Δ — морфизм векторных расслоений, то оператор Δ — линейный.

(4) Пусть $\varphi \in \mathscr{F}_k(\pi, \pi')$ — оператор порядка k. Построим морфизм $\Phi_\Delta^{(l)} \colon J^{k+l}(\pi) \to J^l(\pi')$, полагая $\Phi_\Delta^{(l)}([s]_x^{k+l}) = [\Delta(s)]_x^l$. Оператор $\Delta^{(l)} \colon \Gamma(\pi) \to \Gamma(\pi_l)$ называется l-м продолжением оператора Δ; его порядок равен $k + l$. Очевидно, что диаграммы

$$\begin{tikzcd} J^{k+l+1}(\pi) \arrow[r, "\Phi_\Delta^{(l+1)}"] \arrow[d, "\pi_{k+l+1,k+l}"'] & J^{l+1}(\pi') \arrow[d, "\pi'_{l+1,l}"] \\ J^{k+l}(\pi) \arrow[r, "\Phi_\Delta^{(l)}"] & J^l(\pi') \end{tikzcd}$$

коммутативны при всех l.

(5) Рассмотрим операторы $\Delta\colon \Gamma(\pi) \to \Gamma(\pi')$ и $\Delta'\colon \Gamma(\pi') \to \Gamma(\pi'')$ порядков k и k' соответственно и композицию морфизмов расслоений

$$J^{k+k'}(\pi) \xrightarrow{\Phi_\Delta^{(k')}} J^{k'}(\pi') \xrightarrow{\Phi_{\Delta'}} E'' = J^0(\pi'').$$

Соответствующий оператор называется композицией операторов Δ и Δ' и, как следует из задачи 58, действительно ею является.

(6) Рассмотрим точку $\theta \in J^k(\pi)$ и определим пространство

$$\mathscr{C}_\theta^k = \mathop{\mathscr{L}}_{[s]_x^k=\theta} T_\theta(j_k(s)(M)) \subset T_\theta J^k(\pi),$$

где $\mathscr{L}$ обозначает линейную оболочку. Пространство $\mathscr{C}_\theta = \mathscr{C}_\theta^k$ называется плоскостью Картана в точке θ, а соответствие $\mathscr{C} = \mathscr{C}^k\colon \theta \mapsto \mathscr{C}_\theta$ — распределением Картана. Это распределение — главная геометрическая структура на пространстве джетов.

(7) Выберем координатную окрестность $\mathscr{U} \subset M$ с локальными координатами $x^1, \dots, x^n$ и адаптированные координаты u_σ^j в $\pi_k^{-1}(\mathscr{U}) \subset J^k(\pi)$.

Предложение 11. *Пусть $k > 0$. Тогда*

(a) *Распределение Картана локально натянуто на векторные поля*

$$\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{|\tau|\le k-1} u_{\tau i}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_\tau^\alpha}, \qquad \frac{\partial}{\partial u_\sigma^j}, \tag{1}$$

где $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, $|\sigma| = k$, или, эквивалентно,

(b) *Поле X лежит в распределении Картана тогда и только тогда, когда оно аннулирует систему форм*

$$\omega_\sigma^j = du_\sigma^j - \sum_{i=1}^{n} u_{\sigma i}^j \, dx^i, \tag{2}$$

где $j = 1, \dots, m$, $|\sigma| \le k-1$.

Формы ω_σ^j называются формами Картана, или высшими контактными формами.

Задача 52. Докажите, что $\dim J_x^k(\pi) = m\binom{n+k}{k}$.

Задача 53. Докажите, что введённые в п. 2 локальные координаты определяют в $J^k(\pi)$ структуру гладкого многообразия, а в $\pi_k\colon J^k(\pi) \to M$ — структуру гладкого векторного расслоения.

Задача 54. Пусть $P = \Gamma(\pi)$. Докажите, что модуль $\mathscr{J}^k(P)$, построенный как представляющий объект функтора $\mathrm{Diff}_k(P, \cdot)$ в категории геометрических модулей над $C^\infty(M)$ совпадает с модулем сечений $\Gamma(\pi_k)$.

Задача 55. Докажите, что $\pi_{k+1,k}\colon J^{k+1}(\pi) \to J^k\pi)$ — аффинные расслоения, причём векторным пространством, ассоциированным со слоем над точкой $\theta = [s]_x^k$ является $S^{k+1}T_x^*M \otimes E_x$.

Задача 56. Докажите, что определение морфизма $\Phi_\Delta^{(l)}$ из п. 4 корректно, т.е. не зависит от выбора сечения s.

Задача 57. Пусть $\Delta\colon \Gamma(\pi) \to \Gamma(\pi')$ — оператор порядка k и l, l' — натуральные числа. Какова связь между операторами $\Delta^{(l+l')}\colon \Gamma(\pi) \to \Gamma(\pi_{l+l'})$ и $\left(\Delta^{(l)}\right)^{(l')}: \Gamma(\pi) \to \Gamma((\pi_l)_{l'})$?

Задача 58. Покажите, что оператор, который соответствует морфизму, построенному в п. 5, действует на сечение $s \in \Gamma(\pi)$ как $\Delta'(\Delta(s))$.

Задача 59. Вычислите размерность распределения Картана.

Задача 60. Докажите предложение 11.

Продолжение следует. . .

Список литературы

[1] Джет Неструев, *Гладкие многообразия и наблюдаемые*, М.: МЦНМО, 2000, 300с, `http://diffiety.ac.ru/books/texts/nestruev.pdf`

[2] Joseph Krasil′shchik, Barbara Prinari, *Lectures on Linear Differential Operators over Commutative Algebras*, `http://diffiety.ac.ru/preprint/99/01_99.pdf`

[3] М. Атья, И. Макдональд, *Введение в коммутативную алгебру*, Факториал Пресс, Серия: XX век. Математика и механика, 2003 г., 144 с.

[4] С. Маклейн, *Категории для работающего математика*, Москва: Физматлит, 2004, 349 с.

[5] Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В.*Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений.* М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 336 с.

[6] Виноградов А.М., Красильщик И.С. (Ред.) *Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики.* Серия: XX век. Математика и механика, Факториал, 2005, Вып. 9, Изд. 2. 380 с.

[7] I. S. Krasil'shchik and A. M. Verbovetsky, *Homological methods in equations of mathematical physics,* Open Education & Sciences, Opava, 1998, `arXiv:math/9808130`