

И.С. Красильщик

**Линейные дифференциальные операторы над
коммутативными алгебрами и геометрия пространств джетов**

**Независимый московский университет
Осенний семестр 2015–2016 гг.**

Предупреждение. Здесь — краткое содержание лекций и задачи к ним. Распределение материала по лекциям не всегда полностью соответствует видеоверсии.

Текст обновляется по мере чтения лекций. Вопросы можно посылать на мою почту.

СОДЕРЖАНИЕ

Лекция 1 (09.09.2015)	2
Лекция 2 (16.09.2015)	3
Лекция 3 (23.09.2015)	4
Лекция 4 (30.09.2015)	8
Лекция 5 (07.10.2015)	11
Список литературы	16

Лекция 1 (09.09.2015)

Основные функторы дифференциального исчисления

- (1) $\mathbb{R}$ -точки алгебры $C^\infty(M)$, гомеоморфность M и $|C^\infty(M)|_{\mathbb{R}}$, где $|A|_{\mathbb{K}}$ обозначает множество $\mathbb{K}$ -точек $\mathbb{K}$ -алгебры A
- (2) Кольца, поля, алгебры, модули, категория $\mathcal{M}od(A)$, $\text{hom}_A(P, Q)$, $\text{hom}_{\mathbb{K}}(P, Q)$, тензорное произведение, свободные и проективные модули
- (3) Категории, функторы, естественные преобразования. Изоморфность $\mathcal{P}\mathcal{M}od(C^\infty(M))$ и $\mathcal{V}ect(M)$
- (4) Векторные поля и дифференцирования
- (5) Линейные дифференциальные операторы $P \rightarrow Q$. Случай $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Простейшие свойства

Задача 1. Если M — компактное многообразие, то любой максимальный идеал алгебры $C^\infty(M)$ имеет вид $\mu_x = \{f \in C^\infty(M) \mid f(x) = 0\}$, $x \in M$. В некомпактном случае это не так. Постройте контрпример.

Задача 2. Пусть $A = C^0(\mathbb{R}^1)$ — алгебра непрерывных функций на прямой. Опишите $\text{Diff}_*(A)$.

Задача 3. Пусть A — $\mathbb{K}$ -алгебра и P, Q — A -модули. Докажите, что тождественные отображения

$$\text{id}: \text{Diff}_k(P, Q) \rightarrow \text{Diff}_k^+(P, Q), \quad \text{id}: \text{Diff}_k^+(P, Q) \rightarrow \text{Diff}_k(P, Q)$$

являются дифференциальными операторами порядка $\leq k$.

Задача 4. Мы привыкли к тому, что любой дифференциальный оператор можно построить из дифференцирований и функций, т.е. алгебра $\text{Diff}_*(C^\infty(\mathbb{R}^n))$ порождается элементами из $\text{Diff}_1(C^\infty(\mathbb{R}^n))$. Для произвольной алгебры это не так. Постройте контрпример.

Более сложный вопрос: какие условия на алгебру A обеспечивают порождаемость всех операторов операторами первого порядка?

Задача 5. Пусть A — $\mathbb{R}$ -алгебра линейных дифференциальных операторов $\Delta: C^\infty(\mathbb{R}^1) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^1)$ с постоянными коэффициентами.

- (1) Опишите $|A|_{\mathbb{R}}$.
- (2) Опишите $\text{Diff}_*(A)$.

Задача 6. Рассмотрим $\mathbb{R}$ -алгебру полиномиальных функций на кресте $A = \mathbb{R}[x, y]/(xy)$.

- (1) Опишите $|A|_{\mathbb{R}}$.
- (2) Опишите $\text{Diff}_*(A)$.

Задача 7. Пусть m и $n > 1$ — натуральные и $A = \mathbb{Z}_n[x]/(x^m)$.

- (1) Опишите $|A|_{\mathbb{Z}_n}$.
- (2) Опишите $\text{Diff}_*(A)$.

Лекция 2 (16.09.2015)

Символы

(1) Зафиксируем обозначения:

- $\mathbb{k}$ — поле, A — $\mathbb{k}$ -алгебра, $|A|_{\mathbb{k}} = \{ \varphi: A \rightarrow \mathbb{k} \mid \varphi \text{ — эпи} \}$ — пространство $\mathbb{k}$ -точек
- $\text{Diff}_k^{(+)}(P, Q) = \{ \Delta \in \text{hom}_{\mathbb{k}}(P, Q) \mid (\delta_{a_0} \circ \dots \circ \delta_{a_k})(\Delta) = 0 \}$ — бимодуль дифференциальных операторов порядка $\leq k$
- В частности, $\text{Diff}_k^{(+)}(P) = \text{Diff}_k^{(+)}(A, P)$
- $\text{Diff}_*^{(+)}(P, Q) = \cup_{k \geq 0} \text{Diff}_k^{(+)}(P, Q)$
- $D(P) = \{ X \in \text{hom}_{\mathbb{k}}(A, P) \mid X(ab) = aX(b) + bX(a) \} \subset \text{Diff}_1^{(+)}(P)$ — модуль P -значных дифференцирований

(2) $\text{Diff}_*^{(+)}(P, P)$ — ассоциативная алгебра с фильтрацией, $\text{Diff}_*^{(+)}(P, Q)$ — левый $\text{Diff}_*^{(+)}(P, P)$ - и правый $\text{Diff}_*^{(+)}(Q, Q)$ -модуль с фильтрацией. При этом $a(\Delta \cdot \nabla) = (a\Delta) \cdot \nabla$, $a^+(\Delta \cdot \nabla) = \Delta \cdot (a^+ \nabla)$, $(a^+ \Delta) \cdot \nabla = \Delta \cdot (a \nabla)$.

(3) Соответствующий градуированный объект $\text{Smb}_*(P, Q) = \oplus_{k=0}^{\infty} \text{Smb}_k(P, Q)$, где $\text{Smb}_k(P, Q) = \text{Diff}_k^{(+)}(P, Q) / \text{Diff}_{k-1}^{(+)}(P, Q)$ называется модулем символов. Если $\Delta \in \text{Diff}_k^{(+)}(P, Q)$ то класс смежности $\sigma_k(\Delta) \in \text{Smb}_k(P, Q)$ называется его символом. Если $s = \sigma_k(\Delta) \in \text{Diff}_k^{(+)}(P, Q)$ и $s' = \sigma_{k'}(\Delta') \in \text{Diff}_{k'}^{(+)}(Q, R)$, то по определению $s' \cdot s = \sigma_{k+k'}(\Delta' \circ \Delta)$

(4) Рассмотрим коммутативную алгебру $S = \text{Smb}_*(A)$ (задача 9). Пусть $s = \sigma_k(\Delta) \in \text{Smb}_k(A)$ и $s' = \sigma_{k'}(\Delta') \in \text{Smb}_{k'}(A)$. Определим скобку Пуассона $\{s, s'\} = \sigma_{s+s'-1}(\Delta \circ \Delta' - \Delta' \circ \Delta)$. Она $\mathbb{k}$ -линейна, кососимметрична и удовлетворяет тождеству Якоби.

(5) Скобка Пуассона определяет отображение $\partial: S \rightarrow D(S)$, $s \mapsto \{s, \cdot\}$, являющееся $D(S)$ -значным дифференцированием. Его ядро $\ker \partial = H_P^0(S)$ называется пуассоновым центром, а элементы ядра — казимирами пуассоновой структуры. Элементы образа $X_s = \{s, \cdot\}$ — это гамильтоновы векторные поля. В силу тождества Якоби $X_{\{s, s'\}} = [X_s, X_{s'}]$.

Дифференцирование $X \in D(S)$ — симметрия пуассоновой структуры, если $X\{s, s'\} = \{X(s), s'\} + \{s, X(s')\}$, и можно определить группу $H_P^1(S) = \{\text{симметрии}\} / \text{im } \partial$

(6) Вот ещё ситуация, в которой возникают пуассоновы структуры: пусть $\mathfrak{g}$ — $\mathbb{k}$ -алгебра Ли и $U(\mathfrak{g})$ — её универсальная обёртывающая. Тогда в присоединённой градуированной алгебре $S(\mathfrak{g})$ определяется естественная пуассонова структура.

Как определить $H_P^i(S)$ при $i > 1$?

Задача 8. Докажите, что при переходе к символам бимодульная структура в $\text{Diff}_k^{(+)}(P, Q)$ сливается в одну.

Задача 9. Докажите, что алгебра $\text{Smb}_*(A)$ коммутативна.

Задача 10. Опишите алгебры $\text{Smb}_*(A)$ и пространства $|\text{Smb}_*(A)|_{\mathbb{k}}$ для алгебр A из задач 5–7.

Задача 11. Докажите, что в случае $A = C^\infty(M)$ алгебра $\text{Smb}_*(A)$ совпадает с алгеброй гладких функций на T^*M , полиномиальных по слоям.

Задача 12. Докажите, что если $A = C^\infty(M)$, то $H_P^1(S)$ изоморфна первой группе когомологий де Рама многообразия M .

Задача 13. Пусть $X \in D(A) \subset \text{Diff}_1(A)$. Положим $\rho(X) = \sigma_1(X) \in \text{Smb}_1(A)$. Докажите, что при $A = C^\infty(M)$ эта конструкция даёт каноническую форму $p dq$ на T^*M .

Задача 14. Рассмотрим случай $\text{char } \mathbb{k} = 0$. Пусть $a \in A$, $s = \sigma_k(\Delta) \in \text{Smb}_k(A)$. Определим $\varphi_a: \text{Smb}_k(A) \rightarrow A$, полагая $\varphi_a(s) = \frac{1}{k!} \delta_a^k(\Delta)$. Докажите, что

- (1) $\varphi_a(ss') = \varphi_a(s)\varphi_a(s')$.
- (2) Если $A = C^\infty(M)$, то $\varphi_a = \psi_{da}^*$, где $\psi_{da}: M \rightarrow T^*M$ — сечение, соответствующее форме da .

Задача 15. Вычислите $H_P^1(\mathfrak{g})$ (см. п. 6), если

- (1) $\mathfrak{g}$ — двумерная разрешимая алгебра Ли.
- (2) $\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & k_{12} & k_{13} \\ 0 & 0 & k_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid k_{ij} \in \mathbb{k} \right\}$ — алгебра Гейзенберга.
- (3) $\mathfrak{g}$ полупростая.

ЛЕКЦИЯ 3 (23.09.2015)

Представляющие объекты

- (1) Пусть Q — A -модуль. Определим отображение $\square_k: \text{Diff}_k^+(Q) \rightarrow Q$, полагая $\square_k(\Delta) = \Delta(1)$.

Предложение 1. Оператор $\square_k$ является дифференциальным оператором порядка $\leq k$ и обладает следующим универсальным свойством: для любого $\Delta \in \text{Diff}_k(P, Q)$ найдётся такой единственный гомоморфизм ψ_Δ , что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\Delta} & Q \\ & \searrow \psi_\Delta & \nearrow \square_k \\ & \text{Diff}_k^+(Q) & \end{array}$$

коммутативна.

Таким образом, функтор $\text{Diff}_k(\bullet, Q): P \Rightarrow \text{Diff}_k^{(+)}(P, Q)$ представим.

- (2) Зафиксируем модуль P и рассмотрим тензорное произведение $A \otimes_{\mathbb{K}} P$. Пусть $\delta_a(b \otimes p) = ab \otimes p - b \otimes ap$, $a, b \in A$, $p \in P$; определим модуль k -джетов $\mathcal{J}^k(P) = A \otimes_{\mathbb{K}} P / \text{im}(\delta_{a_0} \circ \dots \circ \delta_{a_k})$ и $j_k(p) = p \bmod \text{im}(\delta_{a_0} \circ \dots \circ \delta_{a_k}) \in \mathcal{J}^k(P)$.

Предложение 2. Оператор j_k является дифференциальным оператором порядка $\leq k$ и обладает следующим универсальным свойством: для любого $\Delta \in \text{Diff}_k(P, Q)$ найдётся такой единственный гомоморфизм ψ_k^Δ , что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\Delta} & Q \\ & \searrow j_k & \nearrow \psi_k^\Delta \\ & \mathcal{J}^k(P) & \end{array}$$

коммутативна.

Итак, функтор $\text{Diff}_k(P, \bullet): Q \Rightarrow \text{Diff}_k(P, Q)$ представим. Соответствие $\mathcal{J}_{(+)}^k: P \Rightarrow \mathcal{J}_{(+)}^k(P)$ — функтор из категории A -модулей в категорию A -бимодулей.

- (3) Поскольку всякий оператор порядка $\leq k$ есть оператор порядка $\leq k+l$, имеют место коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{J}^{k+l}(P) & \xrightarrow{\nu_{k+l,k} = \psi_{k+l}^{j_k}} & \mathcal{J}^k(P) \\ & \nwarrow j_{k+l} \quad \nearrow j_k & \\ & P & \end{array}$$

Поэтому можно определить модуль $\mathcal{J}^\infty(P)$ бесконечных джетов как обратный предел и оператор $j_\infty: P \rightarrow \mathcal{J}^\infty(P)$.

- (4) Композиция $j_l \circ \Delta: P \rightarrow \mathcal{J}^l(Q)$ называется l -м (джет-) продолжением оператора Δ . Таким образом, есть коммутативная диаграмм

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{J}^{k+l}(P) & \xrightarrow{\psi_{k+l}^\Delta} & \mathcal{J}^l(Q) \\ \uparrow j_{k+l} & & \uparrow j_l \\ P & \xrightarrow{\Delta} & Q, \end{array}$$

где $\psi_{k+l}^\Delta = \psi_{k+l}^{j_l \circ \Delta}$. Из задачи 19 следует, что соответствие $\mathcal{J}^\infty: P \Rightarrow \mathcal{J}^\infty(P)$ можно понимать как функтор из категории $\text{Mod}(A)$ в категорию $\mathcal{D}iff(A)$, объектами которой являются A -модули, а морфизмами — линейные дифференциальные операторы.

- (5) Пусть $i: A \rightarrow \mathcal{J}^1(A)$ — гомоморфизм, порождённый отображением $a \mapsto a \times 1 \in A \times_{\mathbb{K}} A$ и $\Lambda^1(A) = \text{so ker } i$ (модуль 1-форм).

Определим $d: A \rightarrow \Lambda^1(A)$ (дифференциал де Рама) как композицию $j_1: A \rightarrow \mathcal{J}^1(A)$ с естественной проекцией $\mathcal{J}^1(A) \rightarrow \Lambda^1(A)$.

Предложение 3. Дифференциал де Рама является дифференцированием алгебры A со значениями в модуле $\Lambda^1(A)$, обладающим следующим свойством: для любого A -модуля P и дифференцирования $X \in D(P)$ найдётся единственный гомоморфизм ψ_X , для которого диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{X} & P \\ & \searrow d & \nearrow \psi_X \\ & \Lambda^1(A) & \end{array}$$

коммулативна.

Таким образом, функтор $D: P \Rightarrow D(P)$ представим в категории A -модулей и $D(P) = \text{hom}_A(\Lambda^1(A), P)$.

- (6) Рассмотрим свободный A -модуль с образующими d_a , $a \in A$, и соотношениями

$$d_{a+b} = d_a + d_b, \quad d_{\alpha a} = \alpha d_a, \quad d_{ab} = ad_b + bd_a, \quad a, b \in A, \quad \alpha \in \mathbb{k}.$$

Это эксплицитное описание модуля 1-форм, причём $d(a) = d_a$.

- (7) Определим модули i -форм как внешние степени $\Lambda^i(A) = \underbrace{\Lambda^1(A) \wedge \dots \wedge \Lambda^1(A)}_{i \text{ раз}}$, $i \geq 0$, и комплекс де Рама алгебры A

$$A \xrightarrow{d} \Lambda^1(A) \longrightarrow \dots \longrightarrow \Lambda^i(A) \xrightarrow{d} \Lambda^{i+1}(A) \longrightarrow \dots,$$

полагая

$$d(a da_1 \wedge \dots \wedge da_i) = da \wedge da_1 \wedge \dots \wedge da_i.$$

Очевидно, $d \circ d = 0$.

- (8) Пусть P — A -модуль. Значением P в точке $\theta \in |A|_{\mathbb{k}}$ называется фактор $P_\theta = P/(\ker \theta \cdot P)$, а значением элемента $p \in P$ — его класс $p(\theta) \in P_\theta$. Элемент называется невидимым, если его значения во всех точках тривиальны. Например, форма $de^x - e^x dx$ является невидимым элементом модуля $\Lambda^1(C^\infty(\mathbb{R}^1))$. По этой причине модуль 1-форм алгебры $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ не совпадает с модулем «геометрических» 1-форм на прямой.

Модуль называется геометрическим, если все его невидимые элементы тривиальны. Пусть $\mathcal{G}Mod(A)$ — полная подкатегория, состоящая из геометрических A -модулей. Для каждого модуля P положим

$$\mathcal{G}P = P \Big/ \bigcap_{\theta \in |A|_{\mathbb{k}}} \ker \theta \cdot P.$$

Свойства соответствия $P \Rightarrow \mathcal{G}P$ рассмотрены в задаче 24.

Задача 16. Докажите предложение 1.

Задача 17. Докажите предложение 2.

Задача 18. В $\mathcal{J}^k(P)$ две модульных структуры, порождаемые умножениями $a(b \otimes p) = (ab) \otimes p$ и $a^+(b \otimes p) = b \otimes (ap)$. Соответствующий бимодуль обозначается $\mathcal{J}_{(+)}^k(P)$. Докажите, что тождественные отображения $\text{id} : \mathcal{J}^k(P) \rightarrow \mathcal{J}_{(+)}^k(P)$ и $\text{id} : \mathcal{J}_{(+)}^k(P) \rightarrow \mathcal{J}^k(P)$ суть дифференциальные операторы порядка $\leq k$.

Задача 19. Пусть $\Delta : P \rightarrow Q$ — дифференциальный оператор порядка $\leq k$. Докажите, что:

(1) Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{J}^{k+l+1}(P) & \xrightarrow{\psi_{k+l+1}^\Delta} & \mathcal{J}^{l+1}(Q) \\ \nu_{k+l+1, k+l} \downarrow & & \downarrow \nu_{l+1, l} \\ \mathcal{J}^{k+l}(P) & \xrightarrow{\psi_{k+l}^\Delta} & \mathcal{J}^l(Q) \end{array}$$

коммутативна, т.е. определён гомоморфизм $\psi_*^\Delta : \mathcal{J}^\infty(P) \rightarrow \mathcal{J}^\infty(Q)$.

(2) Если $\nabla : Q \rightarrow R$ — ещё один дифференциальный оператор, то $\psi_*^{\nabla \circ \Delta} = \psi_*^\nabla \circ \psi_*^\Delta$.

Задача 20. Докажите предложение 3.

Задача 21. Хотелось бы, чтобы соответствие $A \Rightarrow \Lambda^1(A)$ было функтором. Откуда куда?

Задача 22. Докажите утверждение, сформулированное в п. 6.

Задача 23. Опишите невидимые элементы модулей $\Lambda^1(C^\infty(M))$ и $\mathcal{J}^k(C^\infty(M))$.

Задача 24. Пусть A — $\mathbb{k}$ -алгебра и P — A -модуль. Докажите следующие утверждения.

- (1) Соответствие $P \Rightarrow \mathcal{G}P$ является функтором из категории $\mathcal{M}od(A)$ в $\mathcal{G}Mod(A)$.
- (2) Функторы $D : P \Rightarrow D(P)$ и $\text{Diff}_k(P, \cdot) : Q \Rightarrow \text{Diff}_k(P, Q)$ представимы в категории геометрических модулей и их представляющими объектами являются модули $\mathcal{G}\Lambda^1(A)$ и $\mathcal{G}\mathcal{J}^k(P)$ соответственно.
- (3) Если M — гладкое многообразие, то $\mathcal{G}\Lambda^1(C^\infty(M)) = \Lambda^1(M)$.

Задача 25. Пусть $\omega \in \Lambda^1(A)$ — произвольная 1-форма. Определите гомоморфизм $\varphi_\omega : \text{Smb}l_*(A) \rightarrow A$, который обобщает гомоморфизм $1f_a$, построенный в задаче 14

Лекция 4 (30.09.2015)

Скобки Схоутена–Нийенхейса и пуассоновы алгебры

- (1) Пусть P — A -модуль. Определим модули $D_i(P)$ полидифференцирований, полагая $D_0(P) = P$, $D_1(P) = D(P)$ и

$$D_i(P) = \{ X \in D(D_{i-1}(P)) \mid (X(a))(b) + (X(b))(a) = 0, \ a, b \in A \},$$

для всех $i > 1$.

Предложение 4. Соответствие $P \Rightarrow D_i(P)$ является функтором и модуль $\Lambda^i(A)$ — его представляющий объект. Этот функтор представим и в категории геометрических модулей, и представляющим объектом является $\mathcal{G}\Lambda^1(A)$.

- (2) Пусть $X \in D_i(A)$, $Y \in D_j(P)$. Определим элемент $X \wedge Y \in D_{i+j}(P)$, полагая $X \wedge Y = X \cdot Y$, если $i = j = 0$, и по индукции

$$(X \wedge Y)(a) = X \wedge Y(a) + (-1)^j X(a) \wedge Y, \quad i + j > 0.$$

Таким образом определённое внешнее умножение ассоциативно и косокоммутативно,

$$X \wedge Y = (-1)^{ij} Y \wedge X,$$

если $Y \in D_j(A)$.

- (3) Определим операцию внутреннего умножения (подстановки)

$$i: D_j(P) \otimes_A \Lambda^i(A) \rightarrow \begin{cases} P \otimes_A \Lambda^{i-j}(A), & j \leq i, \\ D_{j-i}(P), & j \geq i, \end{cases}$$

полагая $i(X \otimes a) = aX$ и далее по индукции

$$i(X \otimes da \wedge \omega) = i(X(a) \otimes \omega).$$

Мы будем использовать обозначения

$$i_X(\omega) = \begin{cases} i(X \otimes \omega), & i \geq j, \\ 0, & i < j, \end{cases}, \quad i_\omega(X) = \begin{cases} i(X \otimes \omega), & i \leq j, \\ 0, & i > j. \end{cases}$$

- (4) Пусть $X \in D_j(A)$. Определим производную Ли $L_X: \Lambda^i(A) \rightarrow \Lambda^{i-j}(A)$ вдоль X , полагая $L_X = [d, i_X]$, где $[d, i_X]$ — суперкоммутатор:

$$[d, i_X] = d \circ i_X - (-1)^j i_X \circ d.$$

Теорема 1. Для любых двух элементов $X \in D_i(A)$ и $Y \in D_j(A)$ существует такой элемент $[X, Y] \in D_{i+j-1}(A)$, что

$$[L_X, L_Y] = L_{[X, Y]}.$$

Это свойство определяет $[X, Y]$ однозначно.

Набросок доказательства. Положим $[X, a] = X(a)$, $[a, Y] = (-1)^j Y(a)$, $a \in A$, и по индукции

$$[X, Y](a) = [X, Y(a)] + (-1)^{j-1} [X(a), Y], \quad i, j > 0.$$

Далее см. задачу 29. $\square$

Элемент $[X, Y]$ называется скобкой Схоутена–Нийенхейса (или просто скобкой Схоутена) дифференцирований X и Y .

Предложение 5. Пусть $X \in D_i(A)$, $Y \in D_j(A)$, $Z \in D_k(A)$. Тогда

- (a) $[X, Y] + (-1)^{(i-1)(j-1)} [Y, X] = 0$,
- (b) $[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + (-1)^{(i-1)(j-1)} [X, [Y, Z]]$,
- (c) $[X, Y \wedge Z] = [X, Y] \wedge Z + (-1)^{(i-1)j} Y \wedge [X, Z]$,
- (d) $[X, Y] = [X, Y]$, если $i = j = 1$,
- (e) $i_{[X, Y]} = [L_X, i_Y]$.

- (5) С этого момента будем считать, что $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$.

Бидифференцирование $\mathcal{P} \in D_2(A)$ называется пуассоновой структурой, если $[\mathcal{P}, \mathcal{P}] = 0$, а пара $(A, \mathcal{P})$ называется пуассоновой алгеброй. Определим скобку Пуассона $\{a, b\}_{\mathcal{P}} = \mathcal{P}(a, b)$, $a, b \in A$, и оператор $\partial_{\mathcal{P}}: D_i(A) \rightarrow D_{i+1}(A)$, полагая $\partial_{\mathcal{P}}(\Delta) = [\mathcal{P}, \Delta]$.

Предложение 6. Следующие утверждения эквивалентны:

- (a) $\mathcal{P}$ — пуассонова структура;
- (b) скобка $\{\cdot, \cdot\}_{\mathcal{P}}$ удовлетворяет тождеству Якоби;
- (c) $\partial_{\mathcal{P}}$ — дифференциал, т.е. $\partial_{\mathcal{P}} \circ \partial_{\mathcal{P}} = 0$.

Вследствие п. 5с предложения 6 возникает пуассонов комплекс

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow D(A) \longrightarrow \dots \longrightarrow D_i(A) \xrightarrow{\partial_{\mathcal{P}}} D_{i+1}(A) \longrightarrow \dots$$

Его когомологии обозначаются через $H^i(A; \mathcal{P})$ и называются пуассоновыми.

- (6) Как и в п. 5 лекции 2, определим пуассонов центр алгебры A , полагая

$$Z_{\mathcal{P}}(A) = \{a \in A \mid \{a, b\}_{\mathcal{P}} = 0 \text{ для всех } b \in A\},$$

дифференцирования вида $X_a = \mathcal{P}(a)$ будем называть гамильтоновыми, а дифференцирования $X \in D(A)$, обладающими свойством

$$X\{a, b\}_{\mathcal{P}} = \{Xa, b\}_{\mathcal{P}} + \{a, Xb\}_{\mathcal{P}}, \quad a, b \in A,$$

— инфинитезимальными симметриями пуассоновой структуры (или каноническими дифференцированиями). И те, и другие образуют алгебры Ли относительно коммутатора, которые обозначаются $\text{Ham}(A; \mathcal{P})$ и $\text{Can}(A; \mathcal{P})$ соответственно.

Теорема 2. Пусть $(A, \mathcal{P})$ — пуассонова алгебра.

- (a) $H^0(A; \mathcal{P})$ совпадает с пуассоновым центром;
- (b) $H^1(A; \mathcal{P}) = \text{Can}(A; \mathcal{P}) / \text{Ham}(A; \mathcal{P})$;
- (c) $H^2(A; \mathcal{P})$ состоит из классов инфинитезимальных деформаций пуассоновой структуры $\mathcal{P}$ по модулю тривиальных;
- (d) $H^4(A; \mathcal{P})$ содержит препятствия к продолжению инфинитезимальных деформаций до формальных.

Задача 26. Докажите предложение 4.

Задача 27. Докажите, что элемент $X \wedge Y$ действительно лежит в $D_{i+j}(P)$, а внешнее умножение обладает указанными в п. 2 свойствами.

Задача 28. Определите понятие дифференциального оператора в категории модулей над косокоммутативной алгеброй и докажите, что отображения $i_\omega: D_*(P) \rightarrow D_*(P)$ и $i_X: \Lambda^*(A) \rightarrow P \otimes_A \Lambda^*(A)$ являются дифференциальными операторами порядков i и j соответственно, где $\Lambda^*(A) = \bigoplus_{i \geq 0} \Lambda^i(A)$, $D_*(P) = \bigoplus_{j \geq 0} D_j(P)$, $\omega \in \Lambda^i(A)$, $X \in D_j(P)$.

Задача 29. Докажите теорему 1.

Задача 30. Докажите предложение 5.

Задача 31. Докажите предложение 6

Задача 32. Докажите теорему 2

Задача 33. Пуассонова структура $\mathcal{P}$ называется невырожденной, если определяемый ею гомоморфизм $\varphi_{\mathcal{P}}: \Lambda^1(A) \rightarrow D_1(A)$, $\varphi_{\mathcal{P}}(\omega) = i_\omega(\mathcal{P})$, является изоморфизмом. Докажите, что

- (1) изоморфизм $\varphi_{\mathcal{P}}$ продолжается до изоморфизмов $\varphi_{\mathcal{P}}^{(i)}: \Lambda^i(A) \rightarrow D_i(A)$, а их прямая сумма $\varphi_{\mathcal{P}}^{(*)}: \Lambda^*(A) \rightarrow D_*(A)$ является изоморфизмом внешних алгебр;
- (2) 2-форма Ω , образом которой является бивектор $\mathcal{P}$, замкнута (т.е. A является симплектической алгеброй);
- (3) пуассоновы когомологии совпадают с когомологиями де Рама алгебры A .

Задача 34. В силу п. 4b предложения 30 пуассоновы когомологии наследуют скобку Схоутена. Докажите, что если структура $\mathcal{P}$ невырождена, то получаемая таким образом скобка тривиальна.

Задача 35. Используя подстановку $i_{\mathcal{P}}: \Lambda^i(A) \rightarrow \Lambda^{i-2}(A)$, определите пуассонов дифференциал $d_{\mathcal{P}}: \Lambda^i(A) \rightarrow \Lambda^{i-1}(A)$. Опишите свойства возникающих таким образом пуассоновых гомологий.

Задача 36. Пусть $(A, \mathcal{P})$ — пуассонова алгебра и $\partial_{\mathcal{P}}: D_i(A) \rightarrow D_{i+1}(A)$ — её пуассонов дифференциал. Рассмотрим форму $\omega \in \Lambda^j(A)$ и положим $L_{\omega}^{\mathcal{P}} = [\partial_{\mathcal{P}}, i_{\omega}]: D_i(A) \rightarrow D_{i-j+1}(A)$. Докажите, что равенство

$$i_{\llbracket \omega, \theta \rrbracket_{\mathcal{P}}} = [L_{\omega}^{\mathcal{P}}, i_{\theta}], \quad \omega \in \Lambda^j(A), \theta \in \Lambda^k(A),$$

корректно определяет скобку Пуассона $\{\omega, \theta\}_{\mathcal{P}} \in \Lambda^{j+k-1}(A)$ на дифференциальных формах, которая обладает следующими свойствами:

- (1) $\{a, db\}_{\mathcal{P}} = -\{a, b\}_{\mathcal{P}},$
- (2) $\{da, db\}_{\mathcal{P}} = d\{a, b\}_{\mathcal{P}},$
- (3) $\{\omega, \theta \wedge \rho\}_{\mathcal{P}} = \{\omega, \theta\}_{\mathcal{P}} \wedge \rho + (-1)^{(j-1)k} \theta \wedge \{\omega, \rho\}_{\mathcal{P}},$
- (4) $\{\omega, \{\theta, \rho\}_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}} =$
 $= \{\{\omega, \theta\}_{\mathcal{P}}, \rho\}_{\mathcal{P}} + (-1)^{(j-1)(k-1)} \{\theta, \{\omega, \rho\}_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}},$
- (5) $\{\omega, \theta\}_{\mathcal{P}} + (-1)^{(j-1)(k-1)} \{\theta, \omega\}_{\mathcal{P}} = 0,$
- (6) $L_{\{\omega, \theta\}_{\mathcal{P}}}^{\mathcal{P}} = [L_{\omega}^{\mathcal{P}}, L_{\theta}^{\mathcal{P}}].$

Всюду выше квадратные скобки обозначают градуированные коммутаторы.

Задача 37. Две пуассоновы структуры называются совместными, если $[\mathcal{P}, \mathcal{P}'] = 0$ (это, очевидно, эквивалентно тому, что $[\partial_{\mathcal{P}}, \partial_{\mathcal{P}'}] = 0$). Докажите следующий результат:

Теорема 3 (Схема Магри). Пусть $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \in D_2(A)$ — совместные пуассоновы структуры и $H^1(A; \mathcal{P}') = 0$. Предположим, что существуют такие элементы $a_1, a_2 \in A$, что $\partial_{\mathcal{P}}(a_1) = \partial_{\mathcal{P}'}(a_2)$. Тогда:

- (1) Существуют элементы $a_3, \dots, a_s, \dots \in A$, для которых $\partial_{\mathcal{P}}(a_s) = \partial_{\mathcal{P}'}(a_{s+1})$.
- (2) Эти элементы находятся в инволюции относительно обеих скобок Пуассона, т.е.

$$\{a_i, a_j\}_{\mathcal{P}} = \{a_i, a_j\}_{\mathcal{P}'} = 0$$

для всех $i, j \geq 1$.

Лекция 5 (07.10.2015)

Скобки Фрёлихера–Нийенхейса и алгебры со связностью

- (1) Мы будем рассматривать модули $\Lambda^k(A)$ -значных дифференцирований $D(\Lambda^k(A))$. Определим внутреннее произведение $i_{\Omega}(\omega) \in \Lambda^{k+j-1}(A)$ элемента $\Omega \in D(\Lambda^k(A))$ и формы $\omega \in \Lambda^j(A)$ как образ элемента $\Omega \otimes \omega$ при композиции

$$D(\Lambda^k(A)) \otimes_A \Lambda^j(A) \xrightarrow{i} \Lambda^k(A) \otimes \Lambda^{j-1}(A) \xrightarrow{\wedge} \Lambda^{k+j-1}(A),$$

где первое отображение — подстановка, введённая в п. 3 лекции 2. Тогда определена и производная Ли

$$L_{\Omega} = [d, i_{\Omega}]: \Lambda^j(A) \rightarrow \Lambda^{k+j}(A).$$

Предложение 7. Пусть $\Omega \in D(\Lambda^k(A))$, $\omega \in \Lambda^j(A)$. Тогда

- (a) $L_{\Omega}(\omega \wedge \theta) = L_{\Omega}(\omega) \wedge \theta + (-1)^{kj} \omega \wedge L_{\Omega}(\theta),$
- (b) $[L_{\omega}, d] = 0,$
- (c) $L_{\omega \wedge \Omega} = \omega \wedge L_{\Omega} + (-1)^{k+j} d\omega \wedge i_{\Omega}$

для любой формы $\theta \in \Lambda^*(A)$.

- (2) Пусть $\Omega \in D(\Lambda^k(A))$, $\Theta \in D(\Lambda^l(A))$. Рассмотрим коммутатор производных Ли $[L_\Omega, L_\Theta]$.

Предложение 8. *Равенство*

$$[L_\Omega, L_\Theta] = L_{[\Omega, \Theta]}$$

корректно определяет дифференцирование $[\Omega, \Theta] \in D(\Lambda^{k+l}(A))$.

Элемент $[\Omega, \Theta]$ называется скобкой Фрёлихера–Нийенхейса (или просто скобкой Нийенхейса) дифференцирований Ω и Θ . Основные свойства этой скобки сформулированы в следующем утверждении:

Предложение 9. *Для любых дифференцирований $\Omega \in D(\Lambda^k(A))$, $\Theta \in D(\Lambda^l(A))$ и $\Xi \in D(\Lambda^m(A))$ имеют место равенства*

- (a) $[\Omega, \Theta] + (-1)^{kl}[\Theta, \Omega] = 0$,
- (b) $[\Omega, [\Theta, \Xi]] = [[\Omega, \Theta], \Xi] + (-1)^{kl}[\Theta, [\Omega, \Xi]]$,
- (c) $[\Omega, \omega \wedge \Theta] = L_\Omega(\omega) \wedge \Theta + (-1)^{ik}\omega \wedge [\Omega, \Theta] - (-1)^{(k+1)(i+k)}d\omega \wedge i_\Theta(\Omega)$,
- (d) $[L_\Omega, i_\Theta] = (-1)^k L_{i_\Theta(\Omega)} + i_{[\Omega, \Theta]}$,
- (e) $i_\Omega[\Theta, \Xi] = [i_\Omega(\Theta), \Xi] + (-1)^{(k+1)l}[\Theta, i_\Omega(\Xi)] + (-1)^l i_{[\Omega, \Theta]}(\Xi) - (-1)^{(l+1)m} i_{[\Omega, \Xi]}(\Theta)$,

где $\omega \in \Lambda^i(A)$

В этом предложении и ниже подстановка $i_\Omega(\Theta) \in D(\Lambda^{k+l-1})$ определяется равенством

$$(i_\Omega(\Theta))(a) = i_\Omega(\Theta(a))$$

для любого элемента $a \in A$.

- (3) Элемент $\mathcal{N} \in D(\Lambda^1(A))$ называется интегрируемым, если выполнено равенство $[\mathcal{N}, \mathcal{N}] = 0$ (скобка $[\mathcal{N}, \mathcal{N}]$ называется тензором Нийенхейса). Очевидно, интегрируемость равносильно тому, что $\partial_{\mathcal{N}} \circ \partial_{\mathcal{N}} = 0$, где $\partial_{\mathcal{N}}(\Omega) = [\mathcal{N}, \Omega]$. Таким образом, для интегрируемых $\mathcal{N}$ определён комплекс

$$0 \longrightarrow D(A) \longrightarrow D(\Lambda^1(A)) \longrightarrow \dots \longrightarrow$$

$$\longrightarrow D(\Lambda^k(A)) \xrightarrow{\partial_{\mathcal{N}}} D(\Lambda^{k+1}(A)) \longrightarrow \dots$$

Его когомологии обозначаются через $H^k(A; \mathcal{N})$.

В интегрируемом случае производная Ли $d_{\mathcal{N}} = L_{\mathcal{N}}: \Lambda^i(A) \rightarrow \Lambda^{i+1}(A)$ также является дифференциалом, причём $[d_{\mathcal{N}}, d] = 0$. Таким образом, пара $(d_{\mathcal{N}}, \bar{d}_{\mathcal{N}})$, где $\bar{d}_{\mathcal{N}} = d - d_{\mathcal{N}}$ есть бикомплекс на $\Lambda^*(A)$, спектральная последовательность которого сходится к

когомологиям де Рама алгебры A . В геометрической теории дифференциальных уравнений это называется вариационным бикомплексом.

- (4) Рассмотрим $\mathbb{k}$ -алгебры A и B и гомоморфизм $\varphi: A \rightarrow B$. Тогда B — A -алгебра, и можно рассмотреть B -модуль $D(A, B)$ B -значных дифференцирований $A \rightarrow B$. Если $X \in D(B)$, то операция ограничения $X|_A(a) = X(\varphi(a))$ определяет дифференцирование $X|_A \in D(A, B)$ и точную последовательность

$$0 \longrightarrow D^v(B) \longrightarrow D(B) \longrightarrow D(A, B),$$

где

$$D^v(B) = \{ X \in D(B) \mid X|_A = 0 \}$$

— модуль φ -вертикальных дифференцирований.

Связностью в A -алгебре B называется B -гомоморфизм $\nabla: D(A, B) \rightarrow D(B)$, расщепляющий эту последовательность, т.е. такой, что $\nabla(X|_A) = X$ для любого $X \in D(B)$. Формой связности называется элемент $U_\nabla \in D(\Lambda^1(B))$, определяемый равенством

$$i_X(U_\nabla) = X - \nabla(X|_A), \quad X \in D(B).$$

Пусть $X, Y \in D(A, B)$. Положим

$$R_\nabla(X, Y) = [\nabla(X), \nabla(Y)] - \nabla(\nabla(X) \circ Y - \nabla(Y) \circ X).$$

Элемент называется кривизной связности ∇ .

Предложение 10. Если ∇ — связность, то

$$i_X(i_Y[U_\nabla, U_\nabla]) = 2R_\nabla(X|_A, Y|_A)$$

для любых $X, Y \in D(B)$.

- (5) Связность называется плоской, если $R_\nabla = 0$. В силу предложения 10 элемент U_∇ является интегрируемым в этом случае и определён дифференциал $\partial_\nabla = \partial_{U_\nabla}$. Рассмотрим комплекс

$$0 \longrightarrow D^v(B) \longrightarrow D^v(\Lambda^1(B)) \longrightarrow \dots$$

$$\dots \longrightarrow D(\Lambda^i(B)) \xrightarrow{\partial_\nabla} D^v(\Lambda^{i+1}(B)) \longrightarrow \dots$$

(см. задачу 48) и обозначим его когомологии через $H^i(B, \nabla)$.

Теорема 4. Пусть $\nabla: D(A, B) \rightarrow D(B)$ — плоская связность. Тогда:

- (а) Группы когомологий $H^i(B, \nabla)$ наследуют операцию внутреннего умножения

$$i: H^i(B, \nabla) \times H^j(B, \nabla) \rightarrow H^{i+j-1}(B, \nabla).$$

В частности, группа $H^1(B, \nabla)$ является ассоциативной алгеброй

$$i: H^1(B, \nabla) \times H^1(B, \nabla) \rightarrow H^1(B, \nabla),$$

а подстановка

$$i: H^1(B, \nabla) \times H^0(B, \nabla) \rightarrow H^0(B, \nabla)$$

определяет её представление в эндоморфизмах группы $H^0(B, \nabla)$.

(b) Группы когомологий $H^i(B, \nabla)$ наследуют скобку Нийенхейса

$$[\cdot, \cdot]: H^i(B, \nabla) \times H^j(B, \nabla) \rightarrow H^{i+j}(B, \nabla).$$

В частности, $H^0(B, \nabla)$ является алгеброй Ли относительно этой скобки.

(6) Другая интерпретация групп $H^i(B, \nabla)$, которая будет важна в последующем изложении, состоит в следующем.

(a) Дифференцирования $X \in H^0(B, \nabla)$ можно понимать как симметрии связности ∇ .

(b) Элементы группы $H^1(B, \nabla)$ — это классы инфинитезимальных деформаций связности по модулю тривиальных.

(c) Наконец, группа $H^2(B, \nabla)$ содержит препятствия к продолжению инфинитезимальных деформаций до формальных.

(7) С другой стороны, в силу п. 5а теоремы 4 элементы группы $H^1(B, \nabla)$ «размножают» симметрии связности (как мы увидим ниже, в теории интегрируемых систем они называются операторами рекурсии). С точки зрения приложений к дифференциальным уравнениям важна ситуация, когда получаемые симметрии коммутируют. Рассмотрим симметрию $X \in H^0(B, \nabla)$ и элемент $R \in H^1(B, \nabla)$. Введём обозначения $R(X) = i_X(R)$ и $X_n = R^n(X)$.

Теорема 5. Пусть $H^2(B, \nabla) = 0$. Тогда для любых $X, Y \in H^0(B, \nabla)$, $R \in H^1(B, \nabla)$ и $m, n = 1, 2, \dots$ имеют соотношения

$$[X_m, Y_n] = [X, Y]_{m+n} + \sum_{i=0}^{n-1} ([X, R]^n(Y_i))_{m+n-i-1} - \sum_{j=0}^{m-1} ([Y, R]^m(X_j))_{m+n-j-1}.$$

В частности, если $[X, Y] = 0$ и $[X, R] = [Y, R] = 0$, то $[X_m, Y_n] = 0$ для всех m и n .

(8) В заключение, рассмотрим важный пример. Для произвольной $\mathbb{K}$ -алгебры A и A -модуля P построим алгебру B следующим образом. Пусть $S^*(Q)$ обозначает симметрическую алгебру модуля Q . Положим $B_k = S^*(\text{Diff}_k(P, A))$. Тогда $B_k \subset B_{k+1}$ и мы определяем B как $\cup_k B_k$. Пусть $X \in D(A)$ и $\Delta \in \text{Diff}_k(P, A)$. Положим $\nabla(X)(\Delta) = X \circ \Delta$ и распространим действие $\nabla(X)$ на B по правилу Лейбница. Таким образом мы получаем отображение $\nabla: D(A) \rightarrow D(B)$. Из задачи 50 следует, что оно достраивается

до плоской связности. Это — алгебраическая модель связности Картана, играющей ключевую роль в геометрии джетов.

Задача 38. Докажите предложение 7.

Задача 39. Докажите предложение 8.

Задача 40. Докажите предложение 9.

Задача 41. Модуль $\Lambda^i(A) \otimes_A D(A)$ можно вложить в $D(\Lambda^i(A))$, полагая $(\omega \otimes X)(a) = X(a)\omega$. Элементы, принадлежащие образу этого вложения, назовём разложимыми. Докажите, что на разложимых элементах скобка Нийенхейса имеет вид

$$\begin{aligned} [\omega \otimes X, \theta \otimes Y] &= \omega \wedge \theta \otimes [X, Y] + \omega \wedge L_X(\theta) \otimes Y - L_Y(\omega) \wedge \theta \otimes X + \\ &+ (-1)^i d\omega \wedge i_X(\theta) \otimes Y + (-1)^i i_Y(\omega) \wedge d\theta \otimes X, \end{aligned}$$

где $\omega \in \Lambda^i(A)$, $\theta \in \Lambda^j(A)$, $X, Y \in D(A)$.

Задача 42. Покажите, что модуль $D(\Lambda^1(A))$ является ассоциативной алгеброй относительно операции $\Omega \cdot \Theta = i_\Omega(\Theta)$.

Задача 43. Какие алгебраические структуры (внутреннее умножение, внешнее умножение на формы, скобка Нийенхейса) «выживают» при переходе от модулей $D(\Lambda^k(A))$ к группам когомологий $H^k(A; \mathcal{N})$?

Задача 44. Рассмотрим гладкое многообразие M и автоморфизм кокасательного расслоения J . Он является элементом $C^\infty(M)$ -модуля $\text{hom}_{C^\infty(M)}(D(M), D(M)) = \Lambda^1(M) \otimes_{C^\infty(M)} D(M) = D(\Lambda^1(M))$. Почти комплексные структуры на M — это такие J , для которых $J^2 = -\text{id}$. Теорема Ньюлендера–Ниренберга утверждает, что J — комплексная структура, если $[J, J] = 0$.

- (1) Вычислите когомологии $H^k(C^\infty(M); J)$ для комплексных структур.
- (2) Вычислите также когомологии дифференциалов d_J и $\bar{d}_J$.

Задача 45. Исследуйте свойства следующих скобок:

- (1) Пусть $\Omega \in D(\Lambda^i(A))$, $\Theta \in D(\Lambda^j(A))$. Определим скобку $[\Omega, \Theta] \in D(\Lambda^{i+j-1}(A))$ равенством

$$i_{[\Omega, \Theta]} = [i_\Omega, i_\Theta]$$

(это так называемая скобка Ричардсона–Нийенхейса).

- (2) Пусть $\mathcal{N} \in D(\Lambda^1(A))$ и $\Omega \in D(\Lambda^i(A))$. Положим

$$L_\Omega^\mathcal{N} = [\partial_\mathcal{N}, i_\Omega]: D(\Lambda^j(A)) \rightarrow D(\Lambda^{i+j}(A))$$

и определим скобку $[\Omega, \Theta]^\mathcal{N} \in D(\Lambda^{i+j}(A))$, полагая

$$L_{[\Omega, \Theta]^\mathcal{N}}^\mathcal{N} = [L_\Omega^\mathcal{N}, L_\Theta^\mathcal{N}],$$

где $\Theta \in D(\Lambda^j(A))$.

- (3) Предположим теперь, что $\Lambda^1(A)$ — проективный модуль конечного типа. Тогда $D_i(P) = D_i(A) \otimes_A P$ для любого A -модуля P . Рассмотрим подстановку $i: D_k(\Lambda^1(A)) \otimes_A D_l(A) \rightarrow D_{k+l-1}(A)$, полагая

$$i(X \otimes \omega \otimes Y) = X \wedge i_\omega(Y).$$

Пусть $\mathcal{P} \in D_2(A)$ и $\Omega \in D_k(\Lambda^1(A))$. Положим

$$L_\Omega^\mathcal{P} = [\partial_\mathcal{P}, i_\Omega]: D_l(A) \rightarrow D_{k+l}(A).$$

Если $\Theta \in D_l(\Lambda^1(A))$, определим скобку $[\Omega, \Theta]^\mathcal{P} \in D_{k+l}(\Lambda^1(A))$, полагая

$$L_{[\Omega, \Theta]^\mathcal{P}}^\mathcal{P} = [L_\Omega^\mathcal{P}, L_\Theta^\mathcal{P}].$$

Есть ли ещё идеи?

Задача 46. Постройте пример пары алгебр (A, B) и гомоморфизма $\varphi: A \rightarrow B$, в котором операция ограничения $D(B) \rightarrow D(A, B)$ не является эпиморфизмом. Какие условия гарантируют эпиморфность?

Задача 47. Докажите предложение 10.

Задача 48. Докажите, что если $\Omega \in D^v(\Lambda^i(B))$ — вертикальное дифференцирование, то $\partial_\nabla(\Omega)$ также является вертикальным.

Задача 49. Докажите теорему 4.

Задача 50. Докажите теорему 5.

Задача 51. Покажите, что отображение ∇ , описанное в п. 8, достраивается до плоской связности.

Продолжение следует...

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Джет Неструев, *Гладкие многообразия и наблюдаемые*, М.: МЦНМО, 2000, 300с, <http://diffiety.ac.ru/books/texts/nestruев.pdf>
- [2] Joseph Krasil'shchik, Barbara Prinari, *Lectures on Linear Differential Operators over Commutative Algebras*, http://diffiety.ac.ru/preprint/99/01_99.pdf
- [3] М. Атья, И. Макдональд, *Введение в коммутативную алгебру*, Факториал Пресс, Серия: XX век. Математика и механика, 2003 г., 144 с.
- [4] С. Маклейн, *Категории для работающего математика*, Москва: Физматлит, 2004, 349 с.