

И.С. Красильщик

**Линейные дифференциальные операторы над
коммутативными алгебрами и геометрия пространств джетов**

**Независимый московский университет
Осенний семестр 2015–2016 гг.**

Предупреждение. Здесь — краткое содержание лекций и задачи к ним. Распределение материала по лекциям не всегда полностью соответствует видеоверсии.

Текст обновляется по мере чтения лекций. Вопросы можно посылать josephkra@gmail.com

СОДЕРЖАНИЕ

Лекция 1 (09.09.2015)	2
Лекция 2 (16.09.2015)	3
Лекция 3 (23.09.2015)	4
Лекция 4 (30.09.2015)	7
Список литературы	9

Лекция 1 (09.09.2015)

Основные функторы дифференциального исчисления

- (1) $\mathbb{R}$ -точки алгебры $C^\infty(M)$, гомеоморфность M и $|C^\infty(M)|_{\mathbb{R}}$, где $|A|_{\mathbb{K}}$ обозначает множество $\mathbb{K}$ -точек $\mathbb{K}$ -алгебры A
- (2) Кольца, поля, алгебры, модули, категория $\mathcal{M}od(A)$, $\text{hom}_A(P, Q)$, $\text{hom}_{\mathbb{K}}(P, Q)$, тензорное произведение, свободные и проективные модули
- (3) Категории, функторы, естественные преобразования. Изоморфность $\mathcal{P}\mathcal{M}od(C^\infty(M))$ и $\mathcal{V}ect(M)$
- (4) Векторные поля и дифференцирования
- (5) Линейные дифференциальные операторы $P \rightarrow Q$. Случай $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Простейшие свойства

Задача 1. Если M — компактное многообразие, то любой максимальный идеал алгебры $C^\infty(M)$ имеет вид $\mu_x = \{f \in C^\infty(M) \mid f(x) = 0\}$, $x \in M$. В некомпактном случае это не так. Постройте контрпример.

Задача 2. Пусть $A = C^0(\mathbb{R}^1)$ — алгебра непрерывных функций на прямой. Опишите $\text{Diff}_*(A)$.

Задача 3. Пусть A — $\mathbb{K}$ -алгебра и P, Q — A -модули. Докажите, что тождественные отображения

$$\text{id}: \text{Diff}_k(P, Q) \rightarrow \text{Diff}_k^+(P, Q), \quad \text{id}: \text{Diff}_k^+(P, Q) \rightarrow \text{Diff}_k(P, Q)$$

являются дифференциальными операторами порядка $\leq k$.

Задача 4. Мы привыкли к тому, что любой дифференциальный оператор можно построить из дифференцирований и функций, т.е. алгебра $\text{Diff}_*(C^\infty(\mathbb{R}^n))$ порождается элементами из $\text{Diff}_1(C^\infty(\mathbb{R}^n))$. Для произвольной алгебры это не так. Постройте контрпример.

Более сложный вопрос: какие условия на алгебру A обеспечивают порождаемость всех операторов операторами первого порядка?

Задача 5. Пусть A — $\mathbb{R}$ -алгебра линейных дифференциальных операторов $\Delta: C^\infty(\mathbb{R}^1) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^1)$ с постоянными коэффициентами.

- (1) Опишите $|A|_{\mathbb{R}}$.
- (2) Опишите $\text{Diff}_*(A)$.

Задача 6. Рассмотрим $\mathbb{R}$ -алгебру полиномиальных функций на кресте $A = \mathbb{R}[x, y]/(xy)$.

- (1) Опишите $|A|_{\mathbb{R}}$.
- (2) Опишите $\text{Diff}_*(A)$.

Задача 7. Пусть m и $n > 1$ — натуральные и $A = \mathbb{Z}_n[x]/(x^m)$.

- (1) Опишите $|A|_{\mathbb{Z}_n}$.
- (2) Опишите $\text{Diff}_*(A)$.

Лекция 2 (16.09.2015)

Символы

(1) Зафиксируем обозначения:

- $\mathbb{k}$ — поле, A — $\mathbb{k}$ -алгебра, $|A|_{\mathbb{k}} = \{ \varphi: A \rightarrow \mathbb{k} \mid \varphi \text{ — эпи} \}$ — пространство $\mathbb{k}$ -точек
- $\text{Diff}_k^{(+)}(P, Q) = \{ \Delta \in \text{hom}_{\mathbb{k}}(P, Q) \mid (\delta_{a_0} \circ \dots \circ \delta_{a_k})(\Delta) = 0 \}$ — бимодуль дифференциальных операторов порядка $\leq k$
- В частности, $\text{Diff}_k^{(+)}(P) = \text{Diff}_k^{(+)}(A, P)$
- $\text{Diff}_*^{(+)}(P, Q) = \cup_{k \geq 0} \text{Diff}_k^{(+)}(P, Q)$
- $D(P) = \{ X \in \text{hom}_{\mathbb{k}}(A, P) \mid X(ab) = aX(b) + bX(a) \} \subset \text{Diff}_1^{(+)}(P)$ — модуль P -значных дифференцирований

(2) $\text{Diff}_*^{(+)}(P, P)$ — ассоциативная алгебра с фильтрацией, $\text{Diff}_*^{(+)}(P, Q)$ — левый $\text{Diff}_*^{(+)}(P, P)$ - и правый $\text{Diff}_*^{(+)}(Q, Q)$ -модуль с фильтрацией. При этом $a(\Delta \cdot \nabla) = (a\Delta) \cdot \nabla$, $a^+(\Delta \cdot \nabla) = \Delta \cdot (a^+ \nabla)$, $(a^+ \Delta) \cdot \nabla = \Delta \cdot (a \nabla)$.

(3) Соответствующий градуированный объект $\text{Smb}_*(P, Q) = \oplus_{k=0}^{\infty} \text{Smb}_k(P, Q)$, где $\text{Smb}_k(P, Q) = \text{Diff}_k^{(+)}(P, Q) / \text{Diff}_{k-1}^{(+)}(P, Q)$ называется модулем символов. Если $\Delta \in \text{Diff}_k^{(+)}(P, Q)$ то класс смежности $\sigma_k(\Delta) \in \text{Smb}_k(P, Q)$ называется его символом. Если $s = \sigma_k(\Delta) \in \text{Diff}_k^{(+)}(P, Q)$ и $s' = \sigma_{k'}(\Delta') \in \text{Diff}_{k'}^{(+)}(Q, R)$, то по определению $s' \cdot s = \sigma_{k+k'}(\Delta' \circ \Delta)$

(4) Рассмотрим коммутативную алгебру $S = \text{Smb}_*(A)$ (задача 9). Пусть $s = \sigma_k(\Delta) \in \text{Smb}_k(A)$ и $s' = \sigma_{k'}(\Delta') \in \text{Smb}_{k'}(A)$. Определим скобку Пуассона $\{s, s'\} = \sigma_{s+s'-1}(\Delta \circ \Delta' - \Delta' \circ \Delta)$. Она $\mathbb{k}$ -линейна, кососимметрична и удовлетворяет тождеству Якоби.

(5) Скобка Пуассона определяет отображение $\partial: S \rightarrow D(S)$, $s \mapsto \{s, \cdot\}$, являющееся $D(S)$ -значным дифференцированием. Его ядро $\ker \partial = H_P^0(S)$ называется пуассоновым центром, а элементы ядра — казимирами пуассоновой структуры. Элементы образа $X_s = \{s, \cdot\}$ — это гамильтоновы векторные поля. В силу тождества Якоби $X_{\{s, s'\}} = [X_s, X_{s'}]$.

Дифференцирование $X \in D(S)$ — симметрия пуассоновой структуры, если $X\{s, s'\} = \{X(s), s'\} + \{s, X(s')\}$, и можно определить группу $H_P^1(S) = \{\text{симметрии}\} / \text{im } \partial$

(6) Вот ещё ситуация, в которой возникают пуассоновы структуры: пусть $\mathfrak{g}$ — $\mathbb{k}$ -алгебра Ли и $U(\mathfrak{g})$ — её универсальная обёртывающая. Тогда в присоединённой градуированной алгебре $S(\mathfrak{g})$ определяется естественная пуассонова структура.

Как определить $H_P^i(S)$ при $i > 1$?

Задача 8. Докажите, что при переходе к символам бимодульная структура в $\text{Diff}_k^{(+)}(P, Q)$ сливается в одну.

Задача 9. Докажите, что алгебра $\text{Smb}_*(A)$ коммутативна.

Задача 10. Опишите алгебры $\text{Smb}_*(A)$ и пространства $|\text{Smb}_*(A)|_{\mathbb{k}}$ для алгебр A из задач 5–7.

Задача 11. Докажите, что в случае $A = C^\infty(M)$ алгебра $\text{Smb}_*(A)$ совпадает с алгеброй гладких функций на T^*M , полиномиальных по слоям.

Задача 12. Докажите, что если $A = C^\infty(M)$, то $H_P^1(S)$ изоморфна первой группе когомологий де Рама многообразия M .

Задача 13. Пусть $X \in D(A) \subset \text{Diff}_1(A)$. Положим $\varrho(X) = \sigma_1(X) \in \text{Smb}_1(A)$. Докажите, что при $A = C^\infty(M)$ эта конструкция даёт каноническую форму $p dq$ на T^*M .

Задача 14. Пусть $a \in A$, $s = \sigma_k(\Delta) \in \text{Smb}_k(A)$. Определим $\varphi_a: \text{Smb}_k(A) \rightarrow A$, полагая $\varphi_a(s) = \delta_a^k(\delta)$. Докажите, что

- (1) $\varphi_a(ss') = \varphi_a(s)\varphi_a(s')$.
- (2) Если $A = C^\infty(M)$, то $\varphi_a = \psi_{da}^*$, где $\psi_{da}: M \rightarrow T^*M$ — сечение, соответствующее форме da .

Задача 15. Вычислите $H_P^1(\mathfrak{g})$ (см. п. 6), если

- (1) $\mathfrak{g}$ — двумерная разрешимая алгебра Ли.
- (2) $\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & k_{12} & k_{13} \\ 0 & 0 & k_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid k_{ij} \in \mathbb{k} \right\}$ — алгебра Гейзенберга.
- (3) $\mathfrak{g}$ полупростая.

Лекция 3 (23.09.2015)

Представляющие объекты

- (1) Пусть Q — A -модуль. Определим отображение $\square_k: \text{Diff}_k^+(Q) \rightarrow Q$, полагая $\square_k(\Delta) = \Delta(1)$.

Предложение 1. Оператор $\square_k$ является дифференциальным оператором порядка $\leq k$ и обладает следующим универсальным свойством: для любого $\Delta \in \text{Diff}_k(P, Q)$ найдётся такой единственный гомоморфизм ψ_Δ , что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\Delta} & Q \\ & \searrow \psi_\Delta & \nearrow \square_k \\ & \text{Diff}_k^+(Q) & \end{array}$$

коммутативна.

Таким образом, функтор $\text{Diff}_k(\bullet, Q): P \Rightarrow \text{Diff}_k^{(+)}(P, Q)$ представим.

- (2) Зафиксируем модуль P и рассмотрим тензорное произведение $A \otimes_{\mathbb{k}} P$. Пусть $\delta_a(b \otimes p) = ab \otimes p - b \otimes ap$, $a, b \in A$, $p \in P$; определим модуль k -джетов $\mathcal{J}^k(P) = A \otimes_{\mathbb{k}} P / \text{im}(\delta_{a_0} \circ \dots \circ \delta_{a_k})$ и $j_k(p) = p \bmod \text{im}(\delta_{a_0} \circ \dots \circ \delta_{a_k}) \in \mathcal{J}^k(P)$.

Предложение 2. Оператор j_k является дифференциальным оператором порядка $\leq k$ и обладает следующим универсальным свойством: для любого $\Delta \in \text{Diff}_k(P, Q)$ найдётся такой единственный гомоморфизм ψ_k^Δ , что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\Delta} & Q \\ & \searrow j_k & \nearrow \psi_k^\Delta \\ & \mathcal{J}^k(P) & \end{array}$$

коммутативна.

Итак, функтор $\text{Diff}_k(P, \bullet): Q \Rightarrow \text{Diff}_k(P, Q)$ представим. Соответствие $\mathcal{J}_{(+)}^k: P \Rightarrow \mathcal{J}_{(+)}^k(P)$ — функтор из категории A -модулей в категорию A -бимодулей.

- (3) Поскольку всякий оператор порядка $\leq k$ есть оператор порядка $\leq k + l$, имеют место коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{J}^{k+l}(P) & \xrightarrow{\nu_{k+l,k} = \psi_{k+l}^{j_k}} & \mathcal{J}^k(P) \\ & \nwarrow j_{k+l} \quad \nearrow j_k & \\ & P & \end{array}$$

Поэтому можно определить модуль $\mathcal{J}^\infty(P)$ бесконечных джетов как обратный предел и оператор $j_\infty: P \rightarrow \mathcal{J}^\infty(P)$.

- (4) Композиция $j_l \circ \Delta: P \rightarrow \mathcal{J}^l(Q)$ называется l -м (джет-) продолжением оператора Δ . Таким образом, есть коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{J}^{k+l}(P) & \xrightarrow{\psi_{k+l}^\Delta} & \mathcal{J}^l(Q) \\ \uparrow j_{k+l} & & \uparrow j_l \\ P & \xrightarrow{\Delta} & Q, \end{array}$$

где $\psi_{k+l}^\Delta = \psi_{k+l}^{j_l \circ \Delta}$. Из задачи 19 следует, что соответствие $\mathcal{J}^\infty: P \Rightarrow \mathcal{J}^\infty(P)$ можно понимать как функтор из категории $\text{Mod}(A)$ в категорию $\text{Diff}(A)$, объектами которой являются A -модули, а морфизмами — линейные дифференциальные операторы.

- (5) Пусть $i: A \rightarrow \mathcal{J}^1(A)$ — гомоморфизм, порождённый отображением $a \mapsto a \times 1 \in A \times_{\mathbb{k}} A$ и $\Lambda^1(A) = \text{so ker } i$ (модуль 1-форм). Определим $d: A \rightarrow \Lambda^1(A)$ (дифференциал де Рама) как композицию $j_1: A \rightarrow \mathcal{J}^1(A)$ с естественной проекцией $\mathcal{J}^1(A) \rightarrow \Lambda^1(A)$.

Предложение 3. Дифференциал де Рама является дифференцированием алгебры A со значениями в модуле $\Lambda^1(A)$, обладающим следующим свойством: для любого A -модуля P и дифференцирования $X \in D(P)$ найдётся единственный гомоморфизм ψ_X , для которого диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{X} & P \\ & \searrow d & \nearrow \psi_X \\ & \Lambda^1(A) & \end{array}$$

коммутативна.

Таким образом, функтор $D: P \Rightarrow D(P)$ представим в категории A -модулей и $D(P) = \text{hom}_A(\Lambda^1(A), P)$.

- (6) Рассмотрим свободный A -модуль с образующими d_a , $a \in A$, и соотношениями

$$d_{a+b} = d_a + d_b, \quad d_{\alpha a} = \alpha d_a, \quad d_{ab} = ad_b + bd_a, \quad a, b \in A, \quad \alpha \in \mathbb{k}.$$

Это эксплицитное описание модуля 1-форм, причём $d(a) = d_a$.

- (7) Определим модули i -форм как внешние степени $\Lambda^i(A) = \underbrace{\Lambda^1(A) \wedge \cdots \wedge \Lambda^1(A)}_{i \text{ раз}}$, $i \geq 0$, и комплекс де Рама алгебры A

$$A \xrightarrow{d} \Lambda^1(A) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Lambda^i(A) \xrightarrow{d} \Lambda^{i+1}(A) \longrightarrow \cdots,$$

полагая

$$d(a da_1 \wedge \cdots \wedge da_i) = da \wedge da_1 \wedge \cdots \wedge da_i.$$

Очевидно, $d \circ d = 0$.

- (8) Пусть P — A -модуль. Значением P в точке $\theta \in |A|_{\mathbb{k}}$ называется фактор $P_\theta = P/(\ker \theta \cdot P)$, а значением элемента $p \in P$ — его класс $p(\theta) \in P_\theta$. Элемент называется невидимым, если его значения во всех точках тривиальны. Например, форма $de^x - e^x dx$ является невидимым элементом модуля $\Lambda^1(C^\infty(\mathbb{R}^1))$. По этой причине модуль 1-форм алгебры $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ не совпадает с модулем «геометрических» 1-форм на прямой.

Модуль называется геометрическим, если все его невидимые элементы тривиальны. Пусть $\mathcal{G}\text{Mod}(A)$ — полная подкатегория, состоящая из геометрических A -модулей. Для каждого модуля P положим

$$\mathcal{G}P = P \Big/ \bigcap_{\theta \in |A|_{\mathbb{k}}} \ker \theta \cdot P.$$

Свойства соответствия $P \Rightarrow \mathcal{G}P$ рассмотрены в задаче 24.

Задача 16. Докажите предложение 1.

Задача 17. Докажите предложение 2.

Задача 18. В $\mathcal{J}^k(P)$ две модульных структуры, порождаемые умножениями $a(b \otimes p) = (ab) \otimes p$ и $a^+(b \otimes p) = b \otimes (ap)$. Соответствующий бимодуль обозначается $\mathcal{J}_{(+)}^k(P)$. Докажите, что тождественные отображения $\text{id} : \mathcal{J}^k(P) \rightarrow \mathcal{J}_{(+)}^k(P)$ и $\text{id} : \mathcal{J}_{(+)}^k(P) \rightarrow \mathcal{J}^k(P)$ суть дифференциальные операторы порядка $\leq k$.

Задача 19. Пусть $\Delta : P \rightarrow Q$ — дифференциальный оператор порядка $\leq k$. Докажите, что:

(1) Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{J}^{k+l+1}(P) & \xrightarrow{\psi_{k+l+1}^\Delta} & \mathcal{J}^{l+1}(Q) \\ \downarrow \nu_{k+l+1, k+l} & & \downarrow \nu_{l+1, l} \\ \mathcal{J}^{k+l}(P) & \xrightarrow{\psi_{k+l}^\Delta} & \mathcal{J}^l(Q) \end{array}$$

коммутативна, т.е. определён гомоморфизм $\psi_*^\Delta : \mathcal{J}^\infty(P) \rightarrow \mathcal{J}^\infty(Q)$.

(2) Если $\nabla : Q \rightarrow R$ — ещё один дифференциальный оператор, то $\psi_*^{\nabla \circ \Delta} = \psi_*^\nabla \circ \psi_*^\Delta$.

Задача 20. Докажите предложение 3.

Задача 21. Хотелось бы, чтобы соответствие $A \Rightarrow \Lambda^1(A)$ было функтором. Откуда куда?

Задача 22. Докажите утверждение, сформулированное в п. 6.

Задача 23. Опишите невидимые элементы модулей $\Lambda^1(C^\infty(M))$ и $\mathcal{J}^k(C^\infty(M))$.

Задача 24. Пусть A — $\mathbb{k}$ -алгебра и P — A -модуль. Докажите следующие утверждения.

- (1) Соответствие $P \Rightarrow \mathcal{G}P$ является функтором из категории $\mathcal{M}od(A)$ в $\mathcal{G}Mod(A)$.
- (2) Функторы $D : P \Rightarrow D(P)$ и $\text{Diff}_k(P, \cdot) : Q \Rightarrow \text{Diff}_k(P, Q)$ представимы в категории геометрических модулей и их представляющими объектами являются модули $\mathcal{G}\Lambda^1(A)$ и $\mathcal{G}\mathcal{J}^k(P)$ соответственно.
- (3) Если M — гладкое многообразие, то $\mathcal{G}\Lambda^1(C^\infty(M)) = \Lambda^1(M)$.

Лекция 4 (30.09.2015)

Скобки Схоутена–Нийенхейса и пуассоновы алгебры

- (1) Пусть P — A -модуль. Определим модули $D_i(P)$ полидифференцирований, полагая $D_0(P) = P$, $D_1(P) = D(P)$ и $D_i(P) = \{ X \in D(D_{i-1}(P)) \mid (X(a))(b) + (X(b))(a) = 0, a, b \in A \}$, для всех $i > 1$.

Предложение 4. Соответствие $P \Rightarrow D_i(P)$ является функтором и модуль $\Lambda^i(A)$ — его представляющий объект. Этот функтор представим и в категории геометрических модулей, и представляющим объектом является $\mathcal{G}\Lambda^1(A)$.

- (2) Пусть $X \in D_i(A)$, $Y \in D_j(P)$. Определим элемент $X \wedge Y \in D_{i+j}(P)$, полагая $X \wedge Y = X \cdot Y$, если $i = j = 0$, и по индукции

$$(X \wedge Y)(a) = X \wedge Y(a) + (-1)^j X(a) \wedge Y, \quad i + j > 0.$$

Таким образом определённое внешнее умножение ассоциативно и косокоммутативно,

$$X \wedge Y = (-1)^{ij} Y \wedge X,$$

если $Y \in D_j(A)$.

- (3) Определим операцию внутреннего умножения

$$i: D_j(P) \otimes_A \Lambda^i(A) \rightarrow \begin{cases} P \otimes_A \Lambda^{j-i}(A), & j \geq i, \\ D_{i-j}(P), & i \geq j, \end{cases}$$

полагая $i(X \otimes a) = aX$ и далее по индукции

$$i(X \otimes da \wedge \omega) = i(X(a) \otimes \omega).$$

Мы будем использовать обозначения

$$i_X(\omega) = \begin{cases} i(X \otimes \omega), & i \geq j, \\ 0, & i < j, \end{cases}, \quad i_\omega(X) = \begin{cases} i(X \otimes \omega), & i \leq j, \\ 0, & i > j. \end{cases}$$

- (4) Пусть $X \in D_j(A)$. Определим производную Ли $L_X: \Lambda^i(A) \rightarrow \Lambda^{i-j}(A)$ вдоль X , полагая $L_X = [d, i_X]$, где $[d, i_X]$ — суперкоммутатор:

$$[d, i_X] = d \circ i_X - (-1)^j i_X \circ d.$$

Теорема 1. Для любых двух элементов $X \in D_i(A)$ и $Y \in D_j(A)$ существует такой элемент $[X, Y] \in D_{i+j-1}(A)$, что

$$[L_X, L_Y] = L_{[X, Y]}.$$

Это свойство определяет $[X, Y]$ однозначно.

Набросок доказательства. Положим $[X, a] = X(a)$, $[a, Y] = (-1)^j Y(a)$, $a \in A$, и по индукции

$$[X, Y](a) = [X, Y(a)] + (-1)^{j-1} [X(a), Y], \quad i, j > 0.$$

Далее см. задачу 28. $\square$

Элемент $[X, Y]$ называется скобкой Схоутена–Нийенхейса (или просто скобкой Схоутена) дифференцирований X и Y .

Предложение 5. Пусть $X \in D_i(A)$, $Y \in D_j(A)$, $Z \in D_k(A)$. Тогда

- (a) $[X, Y] + (-1)^{(i-1)(j-1)}[Y, X] = 0,$
- (b) $[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + (-1)^{(i-1)(j-1)}[X, [Y, Z]],$
- (c) $[X, Y \wedge Z] = [X, Y] \wedge Z + (-1)^{(i-1)j}Y \wedge [X, Z],$
- (d) $[X, Y] = [X, Y,],$ если $i = j = 1,$
- (e) $i_{[X, Y]} = [L_X, i_Y].$

Задача 25. Докажите предложение 4.

Задача 26. Докажите, что элемент $X \wedge Y$ действительно лежит в $D_{i+j}(P)$, а внешнее умножение обладает указанными в п. 2 свойствами.

Задача 27. Определите понятие дифференциального оператора в категории модулей над косокоммутативной алгеброй и докажите, что отображения $i_\omega: D_*(P) \rightarrow D_*(P)$ и $i_X: \Lambda^*(A) \rightarrow P \otimes_A \Lambda^*(A)$ являются дифференциальными операторами порядков j и i соответственно, где $\Lambda^*(A) = \bigoplus_{i \geq 0} \Lambda^i(A)$, $D_*(P) = \bigoplus_{j \geq 0} D_j(P)$, $\omega \in \Lambda^i(A)$, $X \in D_j(P)$.

Задача 28. Докажите теорему 1.

Задача 29. Докажите предложение 5.

Продолжение следует...

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Джет Неструев, *Гладкие многообразия и наблюдаемые*, М.: МЦНМО, 2000, 300с, <http://diffiety.ac.ru/books/texts/nestruев.pdf>
- [2] Joseph Krasil'shchik, Barbara Prinari, *Lectures on Linear Differential Operators over Commutative Algebras*, http://diffiety.ac.ru/preprint/99/01_99.pdf
- [3] М. Атья, И. Макдональд, *Введение в коммутативную алгебру*, Факториал Пресс, Серия: XX век. Математика и механика, 2003 г., 144 с.
- [4] С. Маклейн, *Категории для работающего математика*, Москва: Физматлит, 2004, 349 с.