**И.С. Красильщик**

# Линейные дифференциальные операторы над коммутативными алгебрами и геометрия пространств джетов

**Независимый московский университет**
**Осенний семестр 2015–2016 гг.**

*Предуведомление.* Здесь — краткое содержание лекций и задачи к ним. Распределение материала по лекциям не всегда полностью соответствует видеоверсии.

Текст обновляется по мере чтения лекций. Вопросы можно посылать на мою почту.

## Содержание

## Лекция 1 (09.09.2015)

### Основные функторы дифференциального исчисления

(1) $\mathbb{R}$-точки алгебры $C^\infty(M)$, гомеоморфность $M$ и $|C^\infty(M)|_\mathbb{R}$, где $|A|_\Bbbk$ обозначает множество $\Bbbk$-точек $\Bbbk$-алгебры $A$
(2) Кольца, поля, алгебры, модули, категория $\mathscr{M}od(A)$, $\hom_A(P,Q)$, $\hom_\Bbbk(P,Q)$, тензорное произведение, свободные и проективные модули
(3) Категории, функторы, естественные преобразования. Изоморфность $\mathscr{PM}od(C^\infty(M))$ и $\mathscr{V}ect(M)$
(4) Векторные поля и дифференцирования
(5) Линейные дифференциальные операторы $P \to Q$. Случай $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Простейшие свойства

**Задача 1.** Если $M$ — компактное многообразие, то любой максимальный идеал алгебры $C^\infty(M)$ имеет вид $\mu_x = \{\, f \in C^\infty(M) \mid f(x) = 0 \,\}$, $x \in M$. В некомпактном случае это не так. Постройте контрпример.

**Задача 2.** Пусть $A = C^0(\mathbb{R}^1)$ — алгебра непрерывных функций на прямой. Опишите $\mathrm{Diff}_*(A)$.

**Задача 3.** Пусть $A$ — $\Bbbk$-алгебра и $P$, $Q$ — $A$-модули. Докажите, что тождественные отображения

$$\mathrm{id}\colon \mathrm{Diff}_k(P,Q) \to \mathrm{Diff}_k^+(P,Q), \quad \mathrm{id}\colon \mathrm{Diff}_k^+(P,Q) \to \mathrm{Diff}_k(P,Q)$$

являются дифференциальными операторами порядка $\le k$.

**Задача 4.** Мы привыкли к тому, что любой дифференциальный оператор можно построить из дифференцирований и функций, т.е. алгебра $\mathrm{Diff}_*(C^\infty(\mathbb{R}^n))$ порождается элементами из $\mathrm{Diff}_1(C^\infty(\mathbb{R}^n))$. Для произвольной алгебры это не так. Постройте контрпример.

Более сложный вопрос: какие условия на алгебру $A$ обеспечивают порождаемость всех операторов операторами первого порядка?

**Задача 5.** Пусть $A$ — $\mathbb{R}$-алгебра линейных дифференциальных операторов $\Delta\colon C^\infty(\mathbb{R}^1) \to C^\infty(\mathbb{R}^1)$ с постоянными коэффициентами.

(1) Опишите $|A|_\mathbb{R}$.
(2) Опишите $\mathrm{Diff}_*(A)$.

**Задача 6.** Рассмотрим $\mathbb{R}$-алгебру полиномиальных функций на кресте $A = \mathbb{R}[x,y]/(xy)$.

(1) Опишите $|A|_\mathbb{R}$.
(2) Опишите $\mathrm{Diff}_*(A)$.

**Задача 7.** Пусть $m$ и $n > 1$ — натуральные и $A = \mathbb{Z}_n[x]/(x^m)$.

(1) Опишите $|A|_{\mathbb{Z}_n}$.
(2) Опишите $\mathrm{Diff}_*(A)$.

Лекция 2 (16.09.2015)

## Символы

(1) Зафиксируем обозначения:
- $\Bbbk$ — поле, $A$ — $\Bbbk$- алгебра, $|A|_{\Bbbk} = \{\, \varphi\colon A \to \Bbbk \mid \varphi - \text{эпи}\,\}$ — пространство $\Bbbk$-точек
- $\operatorname{Diff}_k^{(+)}(P,Q) = \{\, \Delta \in \hom_{\Bbbk}(P,Q) \mid (\delta_{a_0} \circ \dots \circ \delta_{a_k})(\Delta) = 0\,\}$ — бимодуль дифференциальных операторов порядка $\leq k$
- В частности, $\operatorname{Diff}_k^{(+)}(P) = \operatorname{Diff}_k^{(+)}(A,P)$
- $\operatorname{Diff}_*^{(+)}(P,Q) = \cup_{k\geq 0} \operatorname{Diff}_k^{(+)}(P,Q)$
- $D(P) = \{\, X \in \hom_{\Bbbk}(A,P) \mid X(ab) = aX(b) + bX(a)\,\} \subset \operatorname{Diff}_1(P)$ — модуль $P$-значных дифференцирований

(2) $\operatorname{Diff}_*^{(+)}(P,P)$ — ассоциативная алгебра с фильтрацией, $\operatorname{Diff}_*^{(+)}(P,Q)$ — левый $\operatorname{Diff}_*^{(+)}(P,P)$- и правый $\operatorname{Diff}_*^{(+)}(Q,Q)$-модуль с фильтрацией. При этом $a(\Delta \cdot \nabla) = (a\Delta) \cdot \nabla$, $a^+(\Delta \cdot \nabla) = \Delta \cdot (a^+\nabla)$, $(a^+\Delta) \cdot \nabla = \Delta \cdot (a\nabla)$.

(3) Соответствующий градуированный объект $\operatorname{Smbl}_*(P,Q) = \oplus_{k=0}^{\infty} \operatorname{Smbl}_k(P,Q)$, где $\operatorname{Smbl}_k(P,Q) = \operatorname{Diff}_k^{(+)}(P,Q)/\operatorname{Diff}_{k-1}^{(+)}(P,Q)$ называется модулем символов. Если $\Delta \in \operatorname{Diff}_k^{(+)}(P,Q)$ то класс смежности $\sigma_k(\Delta) \in \operatorname{Smbl}_k(P,Q)$ называется его символом. Если $s = \sigma_k(\Delta) \in \operatorname{Diff}_k^{(+)}(P,Q)$ и $s' = \sigma_{k'}(\Delta') \in \operatorname{Diff}_{k'}^{(+)}(Q,R)$, то по определению $s' \cdot s = \sigma_{k+k'+1}(\Delta' \circ \Delta)$

(4) Рассмотрим коммутативную алгебру $S = \operatorname{Smbl}_*(A)$ (задача 9). Пусть $s = \sigma_k(\Delta) \in \operatorname{Smbl}_k(A)$ и $s' = \sigma_{k'}(\Delta') \in \operatorname{Smbl}_{k'}(A)$. Определим скобку Пуассона $\{s,s'\} = \sigma_{s+s'}(\Delta \circ \Delta' - \Delta' \circ \Delta)$. Она $\Bbbk$-линейна, кососимметрична и удовлетворяет тождеству Якоби.

(5) Скобка Пуассона определяет отображение $\partial\colon S \to D(S)$, $s \mapsto \{s,\cdot\}$, являющееся $D(S)$-значным дифференцированием. Его ядро $\ker \partial = H_P^0(S)$ называется пуассоновым центром, а элементы ядра — казимирами пуассоновой структуры. Элементы образа $X_s = \{s,\cdot\}$ — это гамильтоновы векторные поля. В силу тождества Якоби $X_{\{s,s'\}} = [X_s, X_{s'}]$.

Дифференцирование $X \in D(S)$ — симметрия пуассоновой структуры, если $X\{s,s'\} = \{X(s),s'\} + \{s,X(s')\}$, и можно определить группу $H_P^1(S) = \{\text{симметрии}\}/\operatorname{im}\partial$

(6) Вот ещё ситуация, в которой возникают пуассоновы структуры: пусть $\mathfrak{g}$ — $\Bbbk$-алгебра Ли и $U(\mathfrak{g})$ — её универсальная обёртывающая. Тогда в присоединённой градуированной алгебре $S(\mathfrak{g})$ определяется естественная пуассонова структура.

Как определить $H_P^i(S)$ при $i > 1$?

**Задача 8.** Докажите, что при переходе к символам бимодульная структура в $\operatorname{Diff}_k^{(+)}(P,Q)$ сливается в одну.

**Задача 9.** Докажите, что алгебра $\mathrm{Smbl}_*(A)$ коммутативна.

**Задача 10.** Опишите алгебры $\mathrm{Smbl}_*(A)$ и пространства $|\mathrm{Smbl}_*(A)|_{\Bbbk}$ для алгебр $A$ из задач 5–7.

**Задача 11.** Докажите, что в случае $A = C^\infty(M)$ алгебра $\mathrm{Smbl}_*(A)$ совпадает с алгеброй гладких функций на $T^*M$, полиномиальных по слоям.

**Задача 12.** Докажите, что если $A = C^\infty(M)$, то $H^1_P(S)$ изоморфна первой группе когомологий де Рама многообразия $M$.

**Задача 13.** Пусть $X \in D(A) \subset \mathrm{Diff}_1(A)$. Положим $\varrho(X) = \sigma_1(X) \in \mathrm{Smbl}_1(A)$. Докажите, что при $A = C^\infty(M)$ эта конструкция даёт каноническую форму $p\,dq$ на $T^*M$.

**Задача 14.** Пусть $a \in A$, $s = \sigma_k(\Delta) \in \mathrm{Smbl}_k(A)$. Определим $\varphi_a\colon \mathrm{Smbl}_k(A) \to A$, полагая $\varphi_a(s) = \delta_a^k(\delta)$. Докажите, что

(1) $\varphi_a(ss') = \varphi_a(s)\varphi_a(s')$.
(2) Если $A = C^\infty(M)$, то $\varphi_a = \psi^*_{da}$, где $\psi_{da}\colon M \to T^*M$ — сечение, соответствующее форме $da$.

**Задача 15.** Вычислите $H^1_P(\mathfrak{g})$ (см. п. 6), если

(1) $\mathfrak{g}$ — двумерная разрешимая алгебра Ли.
(2) $\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & k_{12} & k_{13} \\ 0 & 0 & k_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid k_{ij} \in \Bbbk \right\}$ — алгебра Гейзенберга.
(3) $\mathfrak{g}$ полупростая.

## Лекция 3 (23.09.2015)

### Представляющие объекты

(1) Пусть $Q$ — $A$-модуль. Определим отображение $\square_k\colon \mathrm{Diff}_k^+(Q) \to Q$, полагая $\square_k(\Delta) = \Delta(1)$.

**Предложение 1.** *Оператор $\square_k$ является дифференциальным оператором порядка $\leq k$ и обладает следующим универсальным свойством: для любого $\Delta \in \mathrm{Diff}_k(P, Q)$ найдётся такой единственный гомоморфизм $\psi_\Delta$, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "\Delta"] \arrow[dr, "\psi_\Delta"'] & & Q \\ & \mathrm{Diff}_k^+(Q) \arrow[ur, "\square_k"'] & \end{tikzcd}$$

*коммутативна.*

Таким образом, функтор $\mathrm{Diff}_k(\bullet, Q)\colon P \Rightarrow \mathrm{Diff}_k^{(+)}(P, Q)$ представим.

(2) Зафиксируем модуль $P$ и рассмотрим тензорное произведение $A \otimes_{\Bbbk} P$. Пусть $\delta_a(b \otimes p) = ab \otimes p - b \otimes ap$, $a$, $b \in A$, $p \in P$; определим модуль $k$-джетов $\mathscr{J}^k(P) = A \otimes_{\Bbbk} P / \operatorname{im}(\delta_{a_0} \circ \dots \circ \delta_{a_k})$ и $j_k(p) = p \bmod \operatorname{im}(\delta_{a_0} \circ \dots \circ \delta_{a_k}) \in \mathscr{J}^k(P)$.

**Предложение 2.** *Оператор $j_k$ является дифференциальным оператором порядка $\le k$ и обладает следующим универсальным свойством: для любого $\Delta \in \mathrm{Diff}_k(P,Q)$ найдётся такой единственный гомоморфизм $\psi_k^\Delta$, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "\Delta"] \arrow[dr, "j_k"'] & & Q \\ & \mathscr{J}^k(P) \arrow[ur, "\psi_k^\Delta"'] & \end{tikzcd}$$

*коммутативна.*

Итак, функтор $\mathrm{Diff}_k(P,\bullet)\colon Q \Rightarrow \mathrm{Diff}_k(P,Q)$ представим. Соответствие соответствие $\mathscr{J}^k_{(+)}\colon P \Rightarrow \mathscr{J}^k_{(+)}(P)$ — функтор из категории $A$-модулей в категорию $A$-бимодулей.

(3) Поскольку всякий оператор порядка $\le k$ есть оператор порядка $\le k+l$, имеют место коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd} \mathscr{J}^{k+l}(P) \arrow[rr, "\nu_{k+l,k}=\psi_{k+l}^{j_k}"] & & \mathscr{J}^k(P) \\ & P \arrow[ul, "j_{k+l}"] \arrow[ur, "j_k"'] & \end{tikzcd}$$

Поэтому можно определить модуль $\mathscr{J}^\infty(P)$ бесконечных джетов как обратный предел и оператор $j_\infty\colon P \to \mathscr{J}^\infty(P)$.

(4) Композиция $j_l \circ \Delta\colon P \to \mathscr{J}^l(Q)$ называется $l$-м (джет-) продолжением оператора $\Delta$. Таким образом, есть коммутативная диаграмм

$$\begin{tikzcd} \mathscr{J}^{k+l}(P) \arrow[r, "\psi_{k+l}^\Delta"] & \mathscr{J}^l(Q) \\ P \arrow[u, "j_{k+l}"] \arrow[r, "\Delta"] & Q, \arrow[u, "j_l"'] \end{tikzcd}$$

где $\psi_{k+l}^\Delta = \psi_{k+l}^{j_l\circ\Delta}$. Из задачи 19 следует, что соответствие $\mathscr{J}^\infty$ можно понимать как функтор из категории $\mathscr{M}od(A)$ в категорию $\mathscr{D}i\!f\!f(A)$, объектами которой являются $A$-модули, а морфизмами — линейные дифференциальные операторы.

(5) *Продолжение следует…*

**Задача 16.** Докажите предложение 1.

**Задача 17.** Докажите предложение 2.

**Задача 18.** В $\mathscr{J}^k(P)$ две модульных структуры, порождаемые умножениями $a(b\otimes p) = (ab)\otimes p$ и $a^+(b\otimes p) = b\otimes(ap)$. Соответствующий бимодуль обозначается $\mathscr{J}^k_{(+)}(P)$. Докажите, что тождественные отображения id : $\mathscr{J}^k(P) \to \mathscr{J}^k_+(P)$ и id : $\mathscr{J}^k_+(P) \to \mathscr{J}^k(P)$ суть дифференциальные операторы порядка $\le k$.

**Задача 19.** Пусть $\Delta\colon P \to Q$ — дифференциальный оператор порядка $\le k$. Докажите, что:

(1) Диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathscr{J}^{k+l+1}(P) \arrow[r, "\psi^{\Delta}_{k+l+1}"] \arrow[d, "\nu_{k+l+1,k+l}"'] & \mathscr{J}^{l+1}(Q) \arrow[d, "\nu_{l+1,l}"] \\ \mathscr{J}^{k+l}(P) \arrow[r, "\psi^{\Delta}_{k+l}"] & \mathscr{J}^{l}(Q) \end{tikzcd}$$

коммутативна, т.е. определён гомоморфизм $\psi^{\Delta}_*\colon \mathscr{J}^\infty(P) \to \mathscr{J}^\infty(Q)$.

(2) Если $\nabla\colon Q \to R$ — ещё один дифференциальный оператор, то $\psi^{\nabla\circ\Delta}_* = \psi^{\nabla}_* \circ \psi^{\Delta}_*$.

**Задача 20.** *Продолжение следует…*

## Список литературы

[1] Джет Неструев, *Гладкие многообразия и наблюдаемые*, М.: МЦНМО, 2000, 300с, `http://diffiety.ac.ru/books/texts/nestruev.pdf`

[2] Joseph Krasil′shchik, Barbara Prinari, *Lectures on Linear Differential Operators over Commutative Algebras*, `http://diffiety.ac.ru/preprint/99/01_99.pdf`

[3] М. Атья, И. Макдональд, *Введение в коммутативную алгебру*, Факториал Пресс, Серия: XX век. Математика и механика, 2003 г., 144 с.

[4] С. Маклейн, *Категории для работающего математика*, Москва: Физматлит, 2004, 349 с.