Обобщённое уравнение Хантера–Сакстона: структуры, связанные с интегрируемостью

Олег Морозов

Доклад на семинаре
по геометрии дифференциальных уравнений,
Независимый Московский Университет,
30 октября 2019

Обобщённое уравнение Хантера–Сакстона

$$u_{tx} = u\, u_{xx} + \beta\, u_x^2 \qquad \text{(gHS)}$$

- $\beta = \frac{1}{2}$: физика жидких кристаллов, J.K. Hunter, R. Saxton, 1991;
- $\beta \neq \frac{1}{2}$:
  - геометрия структур Эйнштейна–Вейля, V.S. Dryuma, 1999, K.P. Tod, 2000;
  - гидродинамика, S.V. Golovin, 2004.

Уравнение Хантера–Сакстона

Случай $\beta = \frac{1}{2}$: лагранжиан $L = (u_t - u\, u_x)\, u_x$,

- бигамильтонова структура, представление Лакса, нелокальный оператор рекурсии, последовательность законов сохранения, J.K. Hunter, Y.X. Zheng, 1994;
- тригамильтонова структура, P.J. Olver, Ph. Rosenau, 1996;
- нелокальные симметрии и законы сохранения, E.G. Reyes, 2002;
- геодезическое уравнение, связанное с правоинвариантной метрикой на группе Вирасоро, B. Khesin, G. Misiołek, 2003;
- высшие симметрии, локальные и нелокальные операторы рекурсии, J.P. Wang, 2010.

Обобщённое уравнение Хантера–Сакстона

Случай $\beta \neq \frac{1}{2}$:

- формула для общего решения, использующая нелокальную замену переменных, F. Calogero, 1984, М.В. Павлов, 2001;
- контактная эквивалентность линейному уравнению Эйлера–Пуассона, интегрируемость методом Лапласа, локальная формула для общего решения, О.М., 2004.

Представление Лакса

Удобное обозначение: $\beta = \dfrac{1}{\alpha+2}$

ТЕОРЕМА 1. Обобщённое уравнение Хантера–Сакстона допускает представление Лакса

$$\begin{cases} w_t = \left(\lambda\, u\, u_x^{\alpha} + \dfrac{1}{\alpha+2}\right) w^2 + \dfrac{2}{\alpha+2}\, u_x\, w - u\, u_{xx}, \\ w_x = \lambda\, u_x^{\alpha}\, w^2 - u_{xx} \end{cases}$$

с неустранимым параметром $\lambda \neq 0$.

Контактные симметрии

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Алгебра контактных симметрий $\mathrm{Sym}_0(gHS)$ образована генераторами

$$
\begin{aligned}
\phi_{0,0} &= x\,u_x - u, \\
\phi_{1,0} &= u_t, \\
\phi_{1,1} &= -2\,t\,u_t - (\alpha+2)\,x\,u_x + \alpha\,u, \\
\phi_{1,2} &= -t^2\,u_t - (\alpha+2)\,t\,x\,u_x + \alpha\,t\,u - (\alpha+2)\,x,
\end{aligned}
$$

и семейством решений $U = U(t, u_x)$ линейного уравнения

$$U_{t u_x} = -\tfrac{1}{\alpha+2}\,u_x^2\,U_{u_x u_x} - u_x\,U_{u_x} + U. \tag{1}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Уравнение (1) эквивалентно уравнению (gHS) относительно псевдогруппы контактных преобразований, поэтому задача нахождения общего решения уравнения (1) эквивалентна задаче нахождения общего решения уравнения (gHS).

Контактные симметрии

Таблица коммутаторов:

$$
\begin{array}{rclcrcl}
\{\phi_{0,0}, \phi_{1,i}\} & = & 0, & \qquad & \{\phi_{1,0}, \phi_{1,1}\} & = & 2\,\phi_{1,0}, \\
\{\phi_{1,0}, \phi_{1,2}\} & = & -\phi_{1,1}, & \qquad & \{\phi_{1,1}, \phi_{1,2}\} & = & 2\,\phi_{1,2},
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\{\phi_{0,0}, U\} & = & U, \\
\{\phi_{1,0}, U\} & = & -U_t, \\
\{\phi_{1,1}, U\} & = & 2\,t\,U_t - 2\,u_x\,U_{u_x} - \alpha U, \\
\{\phi_{1,2}, U\} & = & t^2\,U_t - (2\,t\,u_x + \alpha + 2)\,U_{u_x} - \alpha t\,U, \\
\{U, \tilde{U}\} & = & 0.
\end{array}
$$

$\Rightarrow$

$$\mathrm{Sym}_0(gHS) = \mathfrak{gl}_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathfrak{a}_\infty$$

где $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R}) = \langle\, \phi_{0,0}, \phi_{1,0}, \phi_{1,1}, \phi_{1,0}\,\rangle$, а бесконечномерный абелевый идеал $\mathfrak{a}_\infty$ порождён решениями уравнения (1).

Контактные симметрии

Уравнение (1) имеет решения вида $\psi(A) = A\, u_x + A'$, $A = A(t)$, на идеале таких симметрий действие $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})$ имеет вид

$$\begin{array}{rcl}
\{\phi_{0,0}, \psi(A)\} & = & \psi(A), \\
\{\phi_{1,0}, \psi(A)\} & = & \psi(-A_t), \\
\{\phi_{1,1}, \psi(A)\} & = & \psi(2\,t\,A_t - (\alpha+2)\,A), \\
\{\phi_{1,2}, \psi(A)\} & = & \psi(t^2\,A_t - (\alpha+2)\,t\,A).
\end{array}$$

Операторы рекурсии для симметрий

Оператор рекурсии $\mathcal{R}$ для симметрий уравнения $\mathcal{E}$:

$$\ell_{\mathcal{E}} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R}' \circ \ell_{\mathcal{E}},$$

где $\ell_{\mathcal{E}}$ — оператор линеаризации для уравнения $\mathcal{E}$. Для нахождения операторов рекурсии используется метод, изложенный в монографиях

- J. Krasil′shchik, P.H.M. Kersten, “Symmetries and Recursion Operators for Classical and Supersymmetric Differential Equations”, Kluwer, 2000;
- J. Krasil′shchik, A. Verbovetsky, R. Vitolo, “The Symbolic Computation of Integrability Structures for Partial Differential Equations”, Springer, 2017.

Операторы рекурсии для симметрий

А именно, рассматривается касательное накрытие

$$\begin{cases} u_{tx} & = & u\,u_{xx} + \beta\,u_x^2, \\ \ell_{\mathcal{E}}(q) & = & q_{tx} - u\,q_{xx} - 2\,\beta\,u_x\,q_x - u_{xx}\,q = 0 \end{cases}$$

и ищутся тени симметрий в этом накрытии, то есть решения уравнения $\ell_{\mathcal{E}}(\sigma) = 0$ вида

$$\sigma = \sigma(t, x, u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xx}, \ldots, q, q_t, q_x, q_{tt}, q_{xx}, \ldots).$$

Операторы рекурсии для симметрий

В частном случае

$$\sigma = Q_1\, q_t + Q_2\, u_x + Q_3,$$

с $Q_i = Q_i(t, x, u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xx})$ получаются три решения

$$\sigma_0 = -q_t + \frac{(\alpha+2)\, u\, u_{xx} + u_x^2}{(\alpha+2)\, u_{xx}}\, q_x,$$

$$\sigma_1 = 2\, t\, q_t - 2\, \frac{t\,((\alpha+2)\, u\, u_{xx} + u_x^2) + (\alpha+2)\, u_x}{(\alpha+2)\, u_{xx}}\, q_x - \alpha\, q,$$

$$\sigma_2 = t^2\, q_t - \frac{t^2\,((\alpha+2)\, u\, u_{xx} + u_x^2) + (\alpha+2)\,(2\, t\, u_x + \alpha + 2)}{(\alpha+2)\, u_{xx}}\, q_x - \alpha\, t\, q.$$

$\Rightarrow$

Операторы рекурсии для симметрий

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Дифференциальные операторы

$$\mathcal{R}_0 = -D_t + \frac{(\alpha+2)\,u\,u_{xx} + u_x^2}{(\alpha+2)\,u_{xx}}\,D_x,$$

$$\mathcal{R}_1 = 2\,t\,D_t - 2\,\frac{t\,((\alpha+2)\,u\,u_{xx} + u_x^2) + (\alpha+2)\,u_x}{(\alpha+2)\,u_{xx}}\,D_x - \alpha,$$

$$\mathcal{R}_2 = t^2\,D_t - \frac{t^2\,((\alpha+2)\,u\,u_{xx} + u_x^2) + (\alpha+2)\,(2\,t\,u_x + \alpha + 2)}{(\alpha+2)\,u_{xx}}\,D_x - \alpha\,t$$

задают локальные операторы рекурсии первого порядка для симметрий уравнения (gHS).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.

$$[\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1] = 2\,\mathcal{R}_0, \quad [\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_2] = -\mathcal{R}_1, \quad [\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2] = 2\,\mathcal{R}_2.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. $\phi_{1,k} = \mathcal{R}_k(\phi_{0,0}),\ k \in \{0, 1, 2\}.$

Рассмотрим подпространство $\mathfrak{s}_\infty \subset \mathrm{Sym}(gHS)$, определённое условием

$$\mathfrak{s}_\infty = \langle\, \mathcal{R}^{(p,q,r)}(\phi_{0,0}) \mid p,q,r \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,\rangle$$

где $\mathcal{R}^{(p,q,r)} = \mathcal{R}_0^p \circ \mathcal{R}_1^q \circ \mathcal{R}_2^r$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.

$$\{\mathcal{R}^{(p,q,r)}(\phi_{0,0}), \psi(A)\} = \mathrm{ad}^p_{\phi_{1,0}}(\mathrm{ad}^q_{\phi_{1,1}}(\mathrm{ad}^r_{\phi_{1,2}}(\psi(A)))) =$$
$$= \psi(T_0^p(T_1^q(T_2^r(A)))),$$

где

$$T_0 = -\partial_t,\ \ T_1 = 2\,t\,\partial_t - (\alpha+2),\ \ T_2 = t^2\,\partial_t - (\alpha+2)\,t.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Дифференциальные операторы T_i образуют алгебру Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$.

- Б.Л. Фейгин, УМН 43:2 (260), 1988, 157–158
- G. Post, N. van den Hijligenberg. Acta Appl. Math. 44 (1996), 257–268

Пусть $\mathfrak{d}$ — алгебра Ли дифференциальных операторов вида $p_n(t)\,\partial_t^n + p_{n-1}(t)\,\partial_t^{n-1} + \cdots + p_1(t)\,\partial_t + p_0(t)$ где $p_k \in \mathbb{C}[t]$ при $k \in \{0, \ldots, n\}$ и $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, со скобкой Ли, определённой коммутатором операторов. Для фиксировнного $\lambda \in \mathbb{C}$ рассмотрим подалгебру $\mathfrak{gl}(\lambda) \subset \mathfrak{d}$, образованную операторами

$$T_0 = -\partial_t, \qquad T_1 = 2\,t\,\partial_t - \lambda + 1, \qquad T_2 = t^2\,\partial_t - (\lambda - 1)\,t.$$

Алгебра Ли $\mathfrak{gl}(\lambda)$ изоморфна $\mathfrak{U}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))/I_\lambda$, где $\mathfrak{U}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ — универсальная обёртывающая алгебра алебры $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ и I_λ — идеал в $\mathfrak{U}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$, образованный элементом

$$2\,T_2 \circ T_0 + 2\,T_0 \circ T_2 + T_1 \circ T_1 + (\lambda - 1)^2.$$

Высшие симметрии

ТЕОРЕМА 2. $\mathfrak{s}_\infty \cong \mathfrak{gl}(\alpha+3)$.

СЛЕДСТВИЕ (Post & van den Hijligenberg, §4.1). Симметрии $\phi_{0,0}$, $\phi_{1,0}$, $\phi_{1,1}$, $\phi_{1,2}$,

$$\phi_{n,2n-k} = \mathrm{ad}^k_{\phi_{1,0}}\left(\mathcal{R}_2^n(\phi_{0,0})\right) = c_{n,2n-k}\, t^{2n-k}\, u_{\underbrace{t\ldots t}_{n}} + \ldots,$$

$n \geq 2$, $k \in \{0, \ldots, 2\,n\}$, образуют базис алгебры $\mathfrak{s}_\infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5 (J.P. Wang, 2010). $\alpha = 0 \Rightarrow \mathfrak{s}_\infty \subsetneq \mathrm{Sym}(gHS)$, например, семейство симметрий

$$u_{xx}^m\, u_x^{-4m-7}\, \left((m+2)\, u_x\, u_{xxx} - (2\,m+3)\, u_{xx}^2\right), \;\; m \in \mathbb{R},$$

не содержится в $\mathfrak{s}_\infty$.

НЕРЕШЁННАЯ ЗАДАЧА. $\mathfrak{s}_\infty \;\substack{=\\ \neq}\; \mathrm{Sym}(gHS)$ при $\alpha \neq 0$?

Нелокальные операторы рекурсии для симметрий

Для нахождения нелокальных операторов рекурсии рассмотрим сумму Уитни касательного накрытия и кокасательного накрытия, определённого системой

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_{tx} & = & u\,u_{xx} + \dfrac{1}{\alpha+2}\,u_x^2, \\ \ell^*_{\mathcal{E}}(p) & = & p_{tx} - u\,p_{xx} - \dfrac{2\,(\alpha+1)}{\alpha+2}\,(u_x\,p_x - u_{xx}\,p) = 0. \end{array}\right.$$

Тогда Формула Грина

$$\left(q\,\ell^*_{\mathcal{E}}(p) - p\,\ell_{\mathcal{E}}(q)\right)\,dt\wedge dx =$$

$$d\,(q\,p_x)\wedge dx + dt\wedge d\left(p\,q_t - u\,p\,q_x - \left(\frac{\alpha}{\alpha+2}\,p\,u_x - u\,p_x\right)\,q\right)$$

задает канонический закон сохранения

$$\left\{\begin{array}{lcl} S_t & = & p\,q_t - u\,p\,q_x - \left(\dfrac{\alpha}{\alpha+2}\,p\,u_x - u\,p_x\right)\,q, \\ S_x & = & q\,p_x. \end{array}\right.$$

В частности, косимметрия $p = u_x^{-2}$ дает задает функцию s_1 с помощью системы

$$
\left\{
\begin{array}{lcl}
s_{1,t} & = & \dfrac{q_t - u\,q_x}{u_x^2} - \dfrac{2\,(\alpha+2)\,u\,u_{xx} - \alpha\,u_x^2}{(\alpha+2)\,u_x^3}\,q, \\[2ex]
s_{1,x} & = & -2\,\dfrac{u_{xx}}{u_x^2}\,q.
\end{array}
\right.
$$

а косимметрия $p = u_x^{\alpha+1}$ определяет функцию s_2 с помощью системы

$$
\left\{
\begin{array}{lcl}
s_{2,t} & = & u_x^{\alpha+1}(q_t - uq_x) + \dfrac{1}{\alpha+2} u_x^{\alpha}\left(\alpha u_x^2 + (\alpha+1)(\alpha+2)uu_{xx}\right) q, \\
s_{2,x} & = & (\alpha+1)\,u_x^{\alpha}\,u_{xx}\,q.
\end{array}
\right.
$$

Тени симметрий в касательном накрытии вида

$$\sigma = Q_1\, q_t + Q_2\, q_x + Q_3\, q + Q_4\, s_1 + Q_5\, s_2 :$$

$$\sigma_3 = u_x\, s_1 - \frac{t\, u_x + \alpha + 2}{(\alpha + 2)\, u_x}\, q,$$

$$\sigma_4 = (t\, u_x + 1)\, s_1 + \frac{t^3}{(\alpha + 2)^2}\, q_t - \frac{(2\,\alpha + 1)\, t^2\, u_x^2 + (\alpha + 2)^2\, (t\, u_x + 1)}{(\alpha + 2)^2 u_x^2}\, q$$

$$- \frac{t^3\, u_x\, ((\alpha + 2)\, u\, u_{xx} + u_x^2) + 3\, (\alpha + 2)\, t u_x\, (t u_x + \alpha + 2) + (\alpha + 2)^3}{(\alpha + 2)^3\, u_x\, u_{xx}}\, q_x,$$

$$\sigma_5 = u_x^{-\alpha - 2}\, s_2 - \frac{t\, u_x + \alpha + 3}{(\alpha + 2)\, u_x}\, q,$$

$$\sigma_6 = \frac{(\alpha + 4)\, t\, u_x + (\alpha + 2)^2}{(\alpha + 2)^2\, u_x^{\alpha + 3}}\, s_2 + \frac{t\, u_x + 1}{\alpha + 2}\, s_1$$

$$- \frac{(\alpha + 3)\, (t\, u_x + \alpha + 2)^2}{(\alpha + 2)^3\, u_x^2}\, q.$$

Подставляя

$$s_1 = -2\,D_x^{-1}\left(u_{xx}u_x^{-2}\,q\right), \qquad s_2 = (\alpha+1)\,D_x^{-1}\,(u_x^{\alpha}\,u_{xx}\,q),$$

получаем соответствующие теням σ_3, ... , σ_6 нелокальные операторы рекурсии

$$\mathcal{R}_3 = -2\,u_x\,D_x^{-1}\circ\frac{u_{xx}}{u_x^2} - \frac{t\,u_x+\alpha+2}{(\alpha+2)\,u_x},$$

$$\mathcal{R}_4 = -2\,(t\,u_x+1)\,D_x^{-1}\circ\frac{u_{xx}}{u_x^2} + \frac{t^3}{(\alpha+2)^2}\,D_t$$
$$-\frac{t^3u_x((\alpha+2)uu_{xx}+u_x^2)+3(\alpha+2)tu_x(tu_x+\alpha+2)+(\alpha+2)^3}{(\alpha+2)^3u_xu_{xx}}\,D_x$$
$$-\frac{(2\,\alpha+1)\,t^2\,u_x^2+(\alpha+2)^2\,(t\,u_x+1)}{(\alpha+2)^2u_x^2},$$

Нелокальные операторы рекурсии для симметрий

$$\mathcal{R}_5 = (\alpha+1)\, u_x^{-\alpha-2}\, D_x^{-1} \circ u_x^{\alpha}\, u_{xx} - \frac{t\, u_x + \alpha + 3}{(\alpha+2)\, u_x},$$

$$\mathcal{R}_6 = (\alpha+1)\, \frac{(\alpha+4)\, t\, u_x + (\alpha+2)^2}{(\alpha+2)^2\, u_x^{\alpha+3}}\, D_x^{-1} \circ u_x^{\alpha}\, u_{xx}$$

$$-2\, \frac{t\, u_x + 1}{\alpha+2}\, D_x^{-1} \circ \frac{u_{xx}}{u_x^2} - \frac{(\alpha+3)\,(t\, u_x + \alpha + 2)^2}{(\alpha+2)^3\, u_x^2}.$$

Действие на симметрии $\phi_{n,k}$??

Косимметрии

$\alpha = 0 \quad \Rightarrow$ косимметрии совпадают с симметриями.
Рассмотрим случай $\alpha \neq 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Все косимметрии уравнения (gHS), зависящие от t, x, u, u_t, u_x, имеют вид $V(t, u_x)$, где V — решение уравнения

$$V_{tu_x} + \frac{1}{\alpha+2}\, u_x^2\, V_{u_x u_x} + \frac{2-\alpha}{\alpha+2}\, u_x\, V_{u_x} - \frac{2\,(\alpha+1)}{\alpha+2}\, V = 0.$$

Это уравнение эквивалентно уравнению (gHS) относительно псевдогруппы контактных преобразований.

Частные решения: $V_t = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_1 = u_x^{-2}$, $\psi_2 = u_x^{\alpha+1}$.

Косимметрия порядка 3:

$$\psi_3 = \begin{cases} u_{xx}^{-(\alpha+6)/(\alpha+4)}\, u_{xxx}, & \alpha \neq -4, \\[2ex] H'\, u_x^{-2}\, u_{xxx} - 2\, H\, u_x^{-3}, & \alpha = -4,\ H = H(u_{xx}). \end{cases}$$

Косимметрии

Пусть $\mathcal{R}$ — оператор рекурсии для симметрии, тогда

$$\ell_{\mathcal{E}} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R}' \circ \ell_{\mathcal{E}} \Rightarrow (\ell_{\mathcal{E}} \circ \mathcal{R})^* = (\mathcal{R}' \circ \ell_{\mathcal{E}})^* \Rightarrow$$

$$\mathcal{R}^* \circ \ell_{\mathcal{E}}^* = \ell_{\mathcal{E}}^* \circ (\mathcal{R}')^* \Rightarrow$$

$(\mathcal{R}')^*$ — оператор рекурсии для косимметрий.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Операторы

$$\mathcal{S}_0 = (\mathcal{R}_0')^* = -\mathcal{R}_0,$$

$$\mathcal{S}_1 = (\mathcal{R}_1')^* = -\mathcal{R}_1 - 2\,\alpha,$$

$$\mathcal{S}_2 = (\mathcal{R}_2')^* = -\mathcal{R}_2 - 2\,\alpha\,t$$

являются операторами рекурсии для косимметрий уравнения (gHS).

ПРИМЕР 1.

$$\mathcal{S}_0(\psi_1) = 0,$$

$$\mathcal{S}_1(\psi_1) = -(\alpha+3)\,\psi_1,$$

$$\mathcal{S}_2^k(\psi_1) = (-1)^k\,k!(\alpha+1)^k\,u_x^{-k-2} + \ldots,\ k \ge 2,$$

$$\mathcal{S}_0(\psi_2) = 0,$$

$$\mathcal{S}_1(\psi_2) = (\alpha+2)\,\psi_2,$$

$$\mathcal{S}_2^k(\psi_2) = a_k\,t^k\,\psi_2 + \ldots,\ k \ge 2,$$

$$\mathcal{S}_0^k(\psi_3) = (\alpha+2)^{-k}\,u_x^{2k}\,u_{xx}^{b_k}\,u_{(k+3)x} + \ldots,$$

$$\mathcal{S}_1^k(\psi_3) = 2^{k-1}(\alpha+2)^{1-k}\,u_x^k\,(t\,u_x+\alpha+2)^k\,u_{xx}^{b_k}\,u_{(k+3)x} + \ldots,$$

$$\mathcal{S}_2^k(\psi_3) = (\alpha+2)^{-k}\,(t\,u_x+\alpha+2)^{2k}\,u_{xx}^{b_k}\,u_{(k+3)x} + \ldots,$$

$$b_k = -((k+1)\,\alpha + 4\,k + 6)/(\alpha+4),$$

ПРИМЕР 2. Решение, инвариантное относительно симметрии $\phi_{2,0} = u_{tt} - \dfrac{(u\, u_{xx} + (\alpha+2)^{-1}\, u_x^2)^2}{u_{xx}}$.

Условия совместности системы (gHS), $\phi_{2,0} = 0$ можно записать в виде:

$$u_t = u\, u_x - \frac{u_x^3}{(\alpha+2)^2\, u_{xx}^3}\, (u_x\, u_{xxx} - 2\,(\alpha+3)\, u_{xx}^2), \qquad (*)$$

$$u_{xxxx} = \frac{3\, u_{xxx}^2}{u_{xx}} - \frac{2\,(\alpha+5)\, u_{xx}\, u_{xxx}}{u_x} + \frac{(\alpha+4)\,(\alpha+5)\, u_{xx}^3}{u_x^2}. \qquad (**)$$

Если $u = S(x, c_1, c_2, c_3, c_4)$ – общее решение $(**)$, то решение (gHS) ищем в виде $u = S(x, s_1(t), s_2(t), s_3(t), s_4(t))$, подставляем в $(*)$, получаем систему ОДУ на для функций s_i.

Уравнение $(**)$ инегрируется в квадратурах при любом α, окончательные формулы выглядят проще всего при $\alpha = -7/2$:

Инвариантные решения

Решение

$$u = \frac{s_1}{s_3^2}\,\left((x+s_2)^2+s_3\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{s_1}{s_3^2}\,(x+s_2)^3 - \frac{3\,s_1}{2\,s_3}\,x + s_4,$$

где

$$\left\{\begin{array}{rcl} s_{1,t} & = & 0, \\ s_{2,t} & = & \dfrac{3\,s_1 s_2 + 2\,s_3 s_4}{2\,s_3}, \\ s_{3,t} & = & s_1, \\ s_{4,t} & = & -\dfrac{3\,s_1\,(s_1 s_2 + 2\,s_3 s_4)}{4\,s_3^2}. \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$

$$u = \frac{a_1\,\left((x+a_3t+a_4)^2+a_1t+a_2\right)^{3/2}}{(a_1t+a_2)^2} - \frac{a_1\,(x+a_3t+a_4)^3}{(a_1t+a_2)^2}$$
$$-\frac{3\,a_1}{2\,(a_1t+a_2)}\,x + \frac{a_3\,(2\,a_2-a_1t)-3\,a_1a_4}{2\,(a_1t+a_2)}, \quad a_1,\ldots,a_4 \in \mathbb{R}.$$