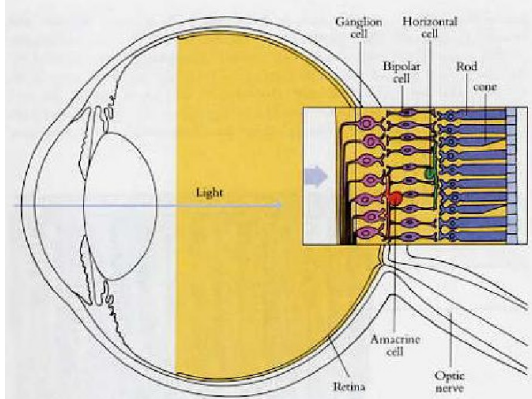


Нейрогеометрия. Математические модели зрительной системы. II

Дмитрий Алексеевский

29 апреля 2015 г.



CENTRAL PROJECTION. EUCLIDEAN CASE

We give formula for the central projection $\pi_F : M \rightarrow S^2$ of a parametrized surface $M = \{A = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))\} \subset \mathbb{R}^3$ into the sphere

$$S^2 = \{A, \vec{OA}^2 = r_0^2\}$$

with respect to the point $F = (r, 0, 0)$. It maps a point $A \in M$ to the second point of intersection $(AF) \cap S^2$ of the ray (AF) with the sphere S^2 .

Formula for central projection

Identifying a point $A = (x, y, z)$ with the position vector $\vec{OA} = (x, y, z)$, we have

$$\pi_F : M \ni A \mapsto \bar{A} = F - f(A)(A - F) = f(A)A + (1 - f(A))F$$

where the function $f(A)$ is the positive solution of the quadratic equation

$$(A - F)^2 f^2 - 2F \cdot (A - F)f + F^2 - r_0^2 = 0.$$

If $F \in S^2$, i.e. $r_0 = r$, the equation becomes linear and

$$f(A) = \frac{2F \cdot (A - F)}{(A - F)^2} = \frac{2r(x - r)}{(x - r)^2 + y^2 + z^2}$$

$$\begin{aligned} \pi_F : (x, y, z) &\mapsto \bar{A} = (r, 0, 0) - \frac{2r(x-r)}{R^2}(x-r, y, z) \\ &= \frac{r}{R^2}(-(x-r)^2 + y^2 + z^2, 2(x-r)y, 2(x-r)z), \end{aligned}$$

where $R^2 := (A - F)^2 = (x - r)^2 + y^2 + z^2$.

Relation between metrics on M and S^2

We calculate the metric $g_{S^2} = (d\bar{A})^2$ of the sphere S^2 in coordinates u, v , where $\bar{A}(u, v) = \pi_F A(u, v)$. We have

$$d\bar{A} = -d(f(A - F)) = -df(A - F) - fdA,$$

$$\begin{aligned} g_{S^2} &= (d\bar{A})^2 = f^2(dA)^2 + fdf(d(R^2)) + R^2 df^2 \\ &= f^2(dA)^2 + df(d(R^2f)) \\ &= f^2(dA)^2 + 2rdxd f. \end{aligned}$$

Corollary

The central projection $\pi_F : M \rightarrow S^2$ is a conformal map if and only if $dx = 0$ i.e. M is a part of the plane orthogonal to $i = (1, 0, 0)$ or a part of the plane $x = r$ or a part of the sphere $f := \frac{2r(x-r)}{R^2} = \frac{r}{\lambda}$ that is

$$(x - (r + \lambda))^2 + y^2 + z^2 = r^2 + \lambda^2$$

for some $\lambda \neq 0$.

Rotation lemma

Let $R \in SO_3$ be a rotation around the center of the sphere S^2 . It preserves the sphere S^2 and transform the point F into $F' = RF$. We denote by $\pi_{RF} : M \rightarrow RS^2 = S^2$ the central projection of the surface into the sphere RS^2 .

ROTATION LEMMA The central projections $\pi_F : M \rightarrow S^2$ and $\pi_{RF} : M \rightarrow RS^2$ are related by

$$\pi_{RF} = \pi_F \circ R^{-1} : M \rightarrow S^2.$$

In other words, the rotation of the sphere by R is equivalent to the rotation on the surface M by the inverse transformation R^{-1} .

(We identify a point $A \in S^2$ with the point $RA \in RS^2$.)

Proof. We set $f_F(A) = \frac{(A-F) \cdot F}{(A-F)^2}$. Then $f_{RF}(A) = f_F(R^{-1}A)$ and

$$\begin{aligned}\pi_{RF}(A) &= R^{-1}(RF + f_{RF}(A - RF)) = F + f_F(R^{-1}A)(R^{-1}A - F) \\ &= \pi_F(R^{-1}A).\end{aligned}$$

Central projection of a plane to sphere

Let $\Sigma = \Pi = \Pi_n^\rho = \{A, n \cdot A = \rho\}$ is the plane with normal vector $n = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$ where $\rho = \text{dist}(\Pi, O)$ and coordinates (y, z) .
Then

$$\Pi_n^\rho = \{A = \rho n + (\sin \varphi y, -\cos \varphi y, z) = \\ (\rho \cos \varphi + \sin \varphi y, \rho \sin \varphi - \cos \varphi y, z)\}$$

The central projection is

$$\pi_F : A \mapsto \bar{A} = F - f(A)(A - F) = F - \frac{2F \cdot (A - F)}{(A - F)^2}(A - F).$$

When the central projection of a plane is a conformal map?

The induces metric g_{S^2} of the sphere S^2 w.r.t. the local coordinates y, z s.t. $\bar{A}(y, z) = \pi_F A(y, z)$ is

$$g_{S^2} = d\bar{A}^2 = f^2 dA^2 - 2r \sin \varphi dy dz$$

where $dA^2 = dy^2 + dz^2$ is the metric of the plane Π_ρ^n

$$f = -\frac{2F \cdot (A-F)}{(A-F)^2} = -\frac{2r(\sin \varphi y + \beta)}{R^2},$$

$$R^2 = |A - F|^2 := (y - \sin \varphi)^2 + z^2 + (\rho - \sin \varphi)^2, \quad \beta = \rho \cos \varphi - r$$

and

$$df = \frac{2r}{R^4} [\{\rho^2 - 2r^2 + y^2 + z^2 + 2y(r - 2\rho \cos \varphi)\} dy - 2z(\beta + \sin \varphi y) dz]$$

It is a conformal map iff the plane is frontal (i.e. orthogonal to the frontal direction , i.e. $\varphi = 0$).

A small rotation $R = R_O^\alpha$ of eye (which is equivalent to a rotation R^{-1} of the external space in opposite direction) produces (approximately) a conformal transformation of the eye sphere.

Problem of conformal invariant perception of contours (problem of stability) as the main problem of conformal geometry of curves

Importance of conformal group in vision (Hoffman, 1989)

The main problem of differential geometry of curves in a homogeneous manifold $M = G/H$ is to construct the full system of G -invariants of a curve $C \subset M$ which determines it up to a transformation from G . For Euclidean plane $E^2 = SE(2)/SO_2$, a solution given by Frenet associates with a curve γ the natural equation $K = K(s)$ where s is the natural parameter (arc-length) and $K(s) = |\ddot{z}(s)|$ (the curvature = acceleration of the path $z(s)$). For conformal geometry $S^2 = SO_{1,3}/Conf(E^2)$ of sphere similar solution is known (A. Fialkov, J. Haantjes, R. Sharp, F.Brustall and D. Calderbank.) The natural equation of a curve $\gamma \subset S^2$ is $K = K(s)$ where s is a "conformal parameter "along a curve γ (defined up to a fractional linear transformations) and K is the conformal curvature which depends on 5-jet of γ .

CONFORMAL GEOMETRY OF SPHERE

Let $(V = \mathbb{R}^{1,3}, g)$ be the Minkowski vector space, V^0 the light cone of isotropic vectors and

$$S^2 := PV^0 = \{[p] := \mathbb{R}p, p \in V_0\} \simeq S^2$$

the celestial sphere. The metric g induces a conformal structure $[g^0]$ in S^2 and the connected Lorentz group $G = SO(V) \simeq SO_{1,3}$ acts transitively on S^2 as the group of conformal transformations (the Möbius group).

Gauss decomposition of conformal Lie algebra and conformal group

The gradation

$$V = V_{-1} + V_0 + V_1 = \mathbb{R}p + E^2 + \mathbb{R}q,$$

$g(p, p) = g(q, q) = g(\mathbb{R}p + \mathbb{R}q, E^2) = 0$, $g(p, q) = 1$ defines a gradation of the Lie algebra

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(V) = \mathfrak{g}_{-1} + \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1 = p \wedge E + \mathfrak{so}(E) + q \wedge E.$$

It defines the Gauss decomposition of the conformal group

$$G = SO(V) = G_{-1} \cdot G_0 \cdot G_+.$$

$$S^2 = G/B = G/G_0 \cdot G_+, \quad G_+ \simeq \text{Sim}(E^2) = \mathbb{R}^+ \cdot SO_2 \cdot \mathbb{R}^2.$$

Sphere S^2 as Riemannian sphere $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$

In terms of the holomorphic coordinate $z \in S^2 \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$,

$$SO(V) = SL_2(\mathbb{C})/(\pm 1) \ni \pm A = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}.$$

The Lie algebra $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \{(b + az + cz^2)\partial_z\}$. The gradation is

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \mathfrak{g}^{-1} + \mathfrak{g}^0 + \mathfrak{g}^1 = \{b\partial_z\} + \{a\partial_z\} + \{cz^2\partial_z\}.$$

The (local) Gauss decomposition is

$$\begin{aligned} G = SL_2(\mathbb{C}) &= G_- \cdot G_0 \cdot G_+ \\ &= \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Note that $S^2 = G/B = SL_2(\mathbb{C})/G^0 \cdot G^+$ where $B = G^0 \cdot G^+$ is the Borel subgroup of upper triangular matrices.

Tits model of the conformal sphere

Since $N_G(B) = B$, the conformal sphere S^2 can be identified with the set of all Borel subgroups in $G = SO(V) = SL_2(\mathbb{C})$

In terms of real coordinates x, y of the sphere, where $z = x + iy$, the generators of G are

generators of G^0 : (dilatation) $E = r\partial_r = x\partial_x + y\partial_y$,

(rotation) $R = x\partial_y - y\partial_x$,

generators of G^- : (translations) ∂_x, ∂_y ,

generators of G^+ : (special fields)

$$Y^1 = (x^2 - y^2)\partial_x + 2xy\partial_y = 2xE - r^2\partial_x = 2xr\partial_r - r^2\partial_x,$$

$$Y^2 = 2xy\partial_x - (x^2 - y^2)\partial_y = 2yE - r^2\partial_y = 2yr\partial_r - r^2\partial_y.$$

Differential geometry teaches that the most important object associated with a conformal geometry is the (normal) Cartan connection (a principal bundle with an absolute parallelism). In the case of conformal sphere, the Cartan connection is the principal bundle

$$\pi : SO_{1,3} \rightarrow S^2 = SO_{1,3}/\text{Sim}(E^2) = G/G_0 \cdot G_+$$

of second order frames with the absolute parallelism, defined by the Maurer-Cartan form $\mu : TSO_{1,3} \rightarrow \mathfrak{so}_{1,3}$.

Какую локальную информацию детектируют нейроны и как они ее перерабатывают?

Видимый мир состоит из поверхностей и кривых, которые движутся во времени.

Элемент поверхности 1-го порядка - касательная плоскость. Она параметризуется точками \mathbb{P}^2 т.е. широтой (slant) и долготой (tilt).

Положение твердого тела с точностью до параллельных переносов параметризуется точками SO_3 , например, углами Эйлера (углами поворота относительно осей $z - x' - z''$ или углами Tait-Bryant (углами поворота относительно $x - y' - z'$). (Rosenberg, Cowan, Visual Representation of 3D objects in cortex.)

Вопрос: зачем глаз вращается относительно трех осей, когда достаточно двух?

Клетки распознающие касательные плоскости и вращение твердого тела находятся в области CIP - caudal intraparental area в теменной доле (parental lobe). Там равномерно распределены клетки которые меряют один, два или три угла Эйлера.

В раннем зрении измеряются инфинитезимальные характеристики кривых - k -джеты $j_x^k y \in J^k(C, R) = J^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ или, лучше, k -джеты локальных слоений. Кроме направления, важной характеристикой является пространственная частота. Заметим, что 1-джет кривой описывается в терминах 1-джетов функций.

Простые клетки работают как линейные фильтры Габора или, более обще, как фильтры с рецептивным профилем вида

$$G(x, y) = b + ke^{-\left(\frac{(x')^2}{\sigma^2(x')} + \frac{(y')^2}{\sigma^2(y')}\right)}$$

где

$$x' = (x - x_0 \sin \theta - (y - y_0)) \cos \theta$$

$$y' = (x - x_0 \cos \theta - (y - y_0)) \sin \theta.$$

Абсолютное значение функции I не важно, т.к. в сетчатке вычисляется средняя освещенность и INPUT функцией является отклонение от средней освещенности (Глезер, Зрение и мышление).

Дифференциальная модель сложных клеток (M.Hansard and R.Horaud, 2011)

Since the radius r of an eye S^2 is very big with respect to the diameter of RF of V1 cells near fovea and the curvature $K = \frac{1}{r^2}$ of the induces physical metric g on S^2 is small, we may assume that the metric is flat. We can choose a holomorphic coordinate $z = \rho e^{i\varphi}$ in retina centered at any point such that $g = dzd\bar{z}$.

Then ∂_z is the covariant derivative w.r.t. Levi-Civita connection and we can represent the k -jet of the Gauss function

$G = G_0^\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z\bar{z}}{2\sigma^2}}$ at the origin as sum of symmetric forms G^j of degree $j = 0, \dots, k$ as follows

$$j_0^k G = G^0 + G^1 + G^2 + \dots + G^k$$

$$G^0 = G(0), \quad G^1 = dG|_0 = G_z dz + G_{\bar{z}} d\bar{z} = -\frac{G}{2\sigma^2}(\bar{z}dz + zd\bar{z}),$$

$$\begin{aligned} G^2 &= G_{zz} dz^2 + 2G_{z\bar{z}} dzd\bar{z} + G_{\bar{z}\bar{z}} d\bar{z}d\bar{z} \\ &= \frac{G}{4\sigma^4}(\bar{z}^2 dz^2 + z^2 d\bar{z}^2) + \frac{G}{\sigma^2} \left(\frac{1}{2\sigma^2} r^2 - 1 \right) dzd\bar{z}, \text{ etc} \end{aligned}$$

Evaluated symmetric forms G^j on a parallel unit vector field

$$V_\theta := \cos \theta \partial_x + \sin \theta \partial_y = \frac{1}{2}(e^{i\theta} \partial_z + e^{-i\theta} \partial_{\bar{z}})$$

we get functions $G_j := G_j(V_\theta, \dots, V_\theta)$. M.Hansard and R. Horaud proposed to consider them as RP of simple cells. In particular,

$$G_1 = (G_1)^{\sigma, \theta}(z, \bar{z}) = -\frac{G}{4\sigma^2}(\bar{z}e^{i\theta} + ze^{-i\theta}) = -\frac{G}{2\sigma^2}(x \cos \theta + y \sin \theta)$$

Up to higher order in $|z|$, this function coincides with the odd Gabor function. $G_{ab}^{\sigma, \theta} = -\frac{G}{2\sigma^2} \sin(x \cos \theta + y \sin \theta)$. Also $\partial \bar{\partial} G = G_{z\bar{z}}(\sigma, \theta)$ give the Marr filter.

Model of complex cell by Hansard and Horand

Let $S_1(z, \sigma, \theta) = G_1^{\sigma\theta} * I(z)$ be the response by the first order simple cell with parameters σ, θ . It will be large if there is a contour through z in direction perpendicular to $V_\theta = (\cos \theta, \sin \theta)$. A model of a complex cell, constructed from simple cells is defined (following the idea by Hubel and Wiesel) by the non linear formula

$$C(z, \sigma, \theta) := \max_{t, |t| < t_0} |S_1(z + tv, \sigma, \theta)|.$$

Then

$$S_1(x + tv, \sigma, \theta) \approx \sum_{i=1}^k P_i(t) S_i(z, \sigma, \theta)$$

where $P_i(t)$ are some polynomials.

Functionals associated with conformal vector fields

We describe the receptive profiles $X \cdot G$ where

$G = G_0^\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$ and X is one of the basic conformal vector fields $\partial_z, z\partial_z, z^2\partial_z$.

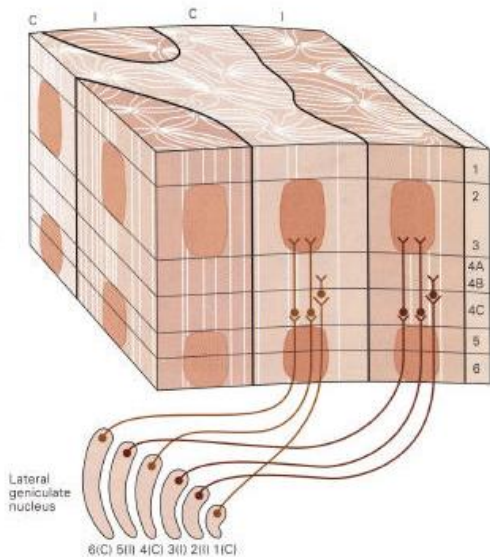
$$z = x + iy = re^{i\theta}.$$

$$\begin{aligned} G = G^\sigma &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \\ \partial_z G &= -\frac{\bar{z}}{2\sigma^2} G, \\ \partial_{\bar{z}} G &= -\frac{z}{2\sigma^2} G, \\ z\partial_z G = \bar{z}\partial_{\bar{z}} G &= -\frac{r^2}{2\sigma^2} G \\ z^2\partial_z G &= -\frac{r^2}{2\sigma^2} zG = -\frac{r^3}{2\sigma^2} e^{i\theta} G \end{aligned}$$

Первичная зрительная кора VI. Поле пинвиллов, простые и сложные клетки, гиперколонки

Первичная зрительная кора это поверхность толщины $\approx 1,5 - 2\text{mm}$ состоящая из 6 слоев. Каждый слой образован колонками клеток, имеющих приблизительно одно и то же рецептивное поле.

Retinotopic map to VI



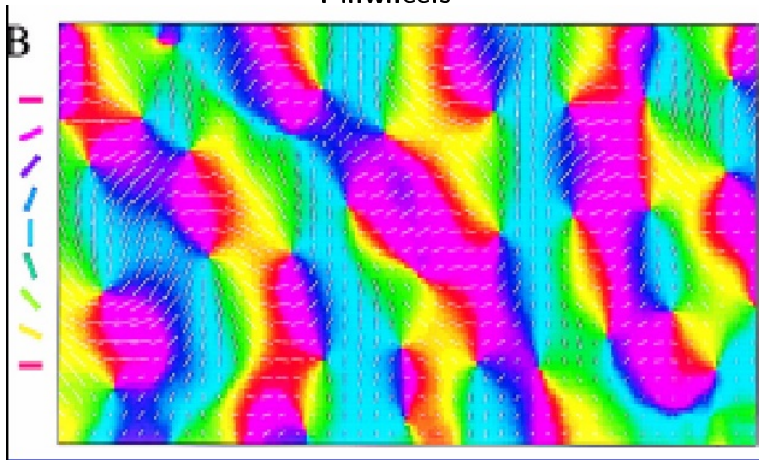
D.Hubel и T. Wiesel:

1. Клетки делятся на простые и сложные. Простые клетки работают как фильтры Габора $Gab(z_0, \sigma, \theta)$ и регистрируют контуры, проходящие через точку z_0 в направлении θ (с точностью до 10-20 градусов). (2-джет контура).

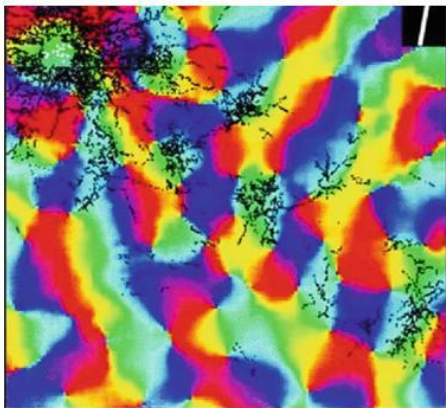
2. Все простые клетки несингулярной колонки имеют одинаковую ориентацию θ но разный масштабный множитель σ (величину отклика). (= пространственная частота)

Сингулярная колонка ([pinwheel](#)) состоит из простых клеток со всевозможными ориентациями. В VI имеется [поле Г направлений](#) с большим числом особых точек (пинвиллов).

Pinwheels



Pinwheels and horizontal connections



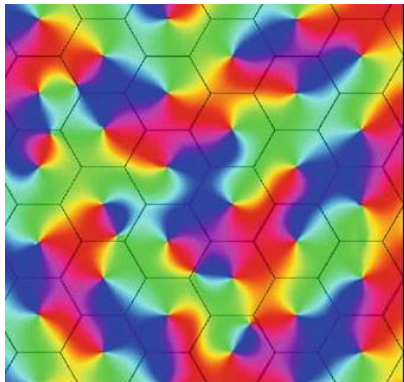
Динамические модели возникновения и эволюции поля направлений с наблюдаемым универсальным распределением особенностей предложены F.Wolf с соавторами.

Два локальных параметра коры : ориентация θ и величина отклика ρ как функции положения $x = (x_1, x_2)$ нейрона в коре VI объединяются в комплексную функцию $z = z(x) = \rho e^{2i\theta}$, которая удовлетворяет уравнению Swift-Hohenberg'a

$$\partial_t z = (r - (k_c^2 - \Delta)^2)z + N_3(z, z, z)$$

где r - параметр бифуркации, N_3 - кубическая нелинейность. Оператор Swift-Hohenberg'a - простейший $E(2)$ инвариантный оператор, который приводит к бифуркации Turing'ова типа пространственных образов. Качественная картина не меняется, если заменить его сверткой с мексиканской шляпой.

Pinwheels and hexagonal lattice



W. Hoffman (1989) "Visual cortex is a contact bundle"

Отождествляя простые клетки колонки, которые детектируют одинаковую ориентацию (направление) θ . Петито заметил, что пространство простых клеток можно отождествить с поверхностью, полученной из поверхности коры раздутием (blow up) в особых колонках (пинвилах). В аппроксимации, что все колонки особые, получается в качестве модели коры трехмерное контактное пространство $M = PT^*R$ с координатами $(z = (x, y), \theta)$ и контактной структурой $H = \ker(\cos \theta dy - \sin \theta dx)$ которое отождествляется с пространством 1-джетов

$$J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{(x, y), p = \operatorname{tg} \theta\}, H = \ker(dy - p dx).$$

Согласно Петито, кора VI осуществляет Лежандров лифт контура $\gamma \subset R$ до горизонтальной кривой в PT^*R .

Оптические иллюзии (см. например, иллюзии Kaniza) показывают, что мозг часто продолжает контуры за пределы, которые не видны глазами.

Имеется две простейшие модели такого продолжения: как геодезические субримановой метрики на горизонтальном распределении и как экстремали функционала эластичности, предложенного Д. Мамфордом.

Возбуждение простой клетки зависит не только от предпочтительной ориентации θ , но и от масштабного множителя σ (величины отклика). Поэтому естественно в качестве пространства простых клеток рассмотреть расслоение $\mathbb{R}^+ \times PT^*R = T^*R$ (симплектизацию PT^*R) с естественной симплектической структурой. Это пространство можно отождествить с многообразием конформных реперов на сетчатке R относительно конформной структуры $R \subset S^2$ и с группой конформных преобразований плоскости $Conf(E^2) = \mathbb{R}^+ \cdot SO_2 \cdot \mathbb{R}^2$.

Проблема локальных внутренних параметров коры VI

Клетки коры VI избирательно реагируют не только на положение z_0 светового пятна, на направление (ориентацию) контура θ , но и на многие другие локальные характеристики. К таким параметрам относятся пространственная частота ρ , временная частота ν , окулярная доминантность (ocular dominance), трехмерное пространство параметров цвета, различные характеристики связанные с движущимися объектами (величина и направление скорости), характеристики, связанные со стереоскопическим восприятием, кривизна контура, конец контура и т.д. Поэтому адекватная модель коры должна описываться расслоением со слоем большой размерности (равной числу внутренних параметров) над поверхностью сетчатки (т.е. сферы).

Идея описания коры как расслоенного пространства была высказана уже в работах Хьюбеля и Визеля, которые указали на необходимость введения дополнительных "engrafted variables" ("Привитых или импланированных переменных"): "What the cortex does is to map not just two but many variables on its two-dimensional surface. It does so by specifying as the basic parameters the two variables that specify the visual field coordinates (distance out and up or down from the fovea) and on this map it engrafts other variables such as orientation and eye preference, by finer subdivisions".

Идея гиперколонок (Hubel-Wiesel)

Рассматривая клетки коры VI как детекторы ориентации и глазодоминантности, Хюбель и Визель предположили, что колонки ориентации группируются в **гиперколонок** ($1 - 2\text{mm}^2$), которые содержат локальную информацию о контуре. Они определяются как набор несингулярных колонок, которые содержат простые клетки с любым направлением.

Гипотеза. Благодаря фиксационным движениям глаза локальный контур двигается по совместному RF гиперколонок и детектируется некоторой колонкой.

Сферическая модель гиперколонки Paul Bressloff и Jack Cowan, 2002, Visual cortex as a crystal

Кора VI обладает квази-кристаллической структурой, где пинвилы являются узлами решетки, а гиперколонки являются фундаментальными областями. Клетки коры детектируют ориентацию θ и пространственную частоту p . Центры пинвиллов характеризуются максимальной и минимальной пространственной частотой. Рассматривая как внутренние параметры ориентацию θ и пространственную частоту p , Bressloff и Cowan предложили модель гиперколонки как 2-сферы S^2 со сферическими координатами θ (широта) и $\varphi = \pi \frac{p/p_L}{p_H/p_L}$ (долгота) ассоциированную с двумя пинвилами: N с максимальным значением p_H и S с минимальным значением p_L пространственной частоты. На полюсах N, S , соответствующих двум пинвилам, ориентация не определена, т.к. имеются клетки любой ориентации.

Распространение возбуждения в гиперколонке

Распространение возбуждения в гиперколонке S^2 описывается уравнением Wilsona-Cowan'a

$$\partial_t u(\theta, \varphi, t) = -u(\theta, \varphi, t) + \int_0^\pi \int_0^\pi W(\theta, \varphi | \theta', \varphi') \sigma(u(\theta', \varphi', t)) d\nu + h(\theta, \varphi)$$

где W плотность взаимодействия между двумя гиперколонками, σ - сигмоидальная функция, h стимул от НКТ.

Предполагается, что весовая функция $W \in C^\infty(S^2 \times S^2)$ SO_3 -инвариантна, т.е. разлагается по сферическим гармоникам, например, есть функция расстояния.

Проблема конформной инвариантности

Мозг компенсирует конформные преобразования образа на сетчатке, вызванные фиксационными движениями глаза и воспринимает неподвижные образы как неподвижные. Другими словами, он решает задачу описания кривой на конформной сфере с точностью до конформных преобразований.

Имеется два подхода к этой задаче:

1. Вычисление инфинитезимальных конформных инвариантов кривой (грубо говоря, конформной кривизны как функции проективного параметра). Это требует вычисления производных INPUT функции до пятого порядка.

2. Второй подход основан на следующем замечании: если расположить детекторы вдоль орбиты группы преобразований G , то суммарная информация, которую они передают в общий центр, будет инвариантна относительно группы G .

Например, если $G = SO_2$ есть группа вращений плоскости, то информация, которую некоторый центр получает от системы наблюдателей, расположенная вдоль окружности, будет инвариантна относительно вращений.

Конформную сферу можно рассматривать как сферу Римана $S^2 = \mathbb{C} \cup \infty$ с дробно-линейным действием группы $SL_2(\mathbb{C})$, т.е. как однородное пространство $S^2 = SL_2(\mathbb{C})/G_0 \cdot G_+$ где $SL_2(\mathbb{C}) = G_- \cdot G_0 \cdot G_+$ есть Гауссово разложение в произведение нижних треугольных, диагональных и верхних треугольных матриц. Точку сферы можно отождествить со стационарной подгруппой (модель Титса).

Согласно модели Петито-Читти-Сарти простые клетки VI параметризуются локально группой

$$G_0 \cdot G_- \simeq \text{Conf}(E^2) = CO_2 \cdot \mathbb{R}^2.$$

Предположим, что простые клетки гиперколонки локально параметризуются группой $G_0 \cdot G_+ \simeq \text{Conf}(E^2)$, т.е.

стационарной подгруппой этой точки. Разница с моделью Petitot-Citti-Sarti состоит в том, что вместо координат $z = (x, y)$ центра колонки рассматриваются параметры $\text{grad } \sigma = (x', y')$ зависящие от джета второго порядка (градиент изменения масштабного множителя).

Тогда информация, которую простые клетки посылают на следующий уровень, (например сложным клеткам) будет инвариантна относительно четырехмерной стационарной подгруппы $G_0 \cdot C_+$ группы Мобиуса $GL_2(\mathbb{C})$.
Геометрически мы получим локально главное расслоение реперов 2-го порядка со связностью Картана

$$GL_2(\mathbb{C}) \rightarrow S^2 = (GL_2(\mathbb{C}))/G_0 \cdot G_+.$$

На следующем уровне достигается инвариантность относительно группы параллельных переносов $G_- \simeq \mathbb{R}^2$.

Известно, что реакция простых клеток не инвариантна относительно сдвигов и инвариантность относительно сдвигов появляется только на уровне сложных клеток.

(M. Hansard, R. Heraud, A differentail model of complex cells, 2011).

Отметим что простые клетки гиперколонки параметризуются точками группы $G_0 \cdot G_+ = CO_2 \cdot \mathbb{R}^2$. Игнорируя градиентные параметры соответствующие подгруппе G_+ , мы получим параметризацию простых клеток группой

$G_0 = CO_2 = \mathbb{R}^+ \times SO_2 \simeq S^2 \setminus \{N, S\}$, что согласуется с моделью Bressloff-Cowan.