ИНВАРИАНТНОЕ СВОЙСТВО ФУНКЦИИ РИМАНА. МЕТОД ЕЁ ПОСТРОЕНИЯ

Аксенов А.В.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

Семинар «Когомологические аспекты геометрии дифференциальных уравнений» под руководством А. Вербовецкого и И. Красильщика.

27 марта 2019 г.

1. Метод Римана

Рассмотрим общее линейное гиперболическое уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными

$$\boldsymbol{Lu = u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y)\,.} \tag{1.1}$$

Метод Римана основывается на следующем тождестве

$$\boldsymbol{2(vLu - uL^*v) = (vu_y - uv_y + 2auv)_x + (vu_x - uv_x + 2buv)_y}$$

и вытекающей из него формулы Грина

$$\boldsymbol{2\iint\limits_G (vLu - uL^*v)\,dxdy = \oint\limits_\Gamma [-(vu_x - uv_x + 2buv)\,dx + (vu_y - uv_y + 2auv)\,dy].}$$

Здесь $\boldsymbol{L^*v = v_{xy} - (av)_x - (bv)_y + cv}$ – сопряженное с $\boldsymbol{Lu}$ дифференциальное выражение; $\boldsymbol{G}$ – область интегрирования с кусочно-гладким контуром Г.

Метод Римана сводит задачу интегрирования уравнения (1.1) к построению вспомогательной функции Римана $v = R(x, y; x', y')$, удовлетворяющей однородному сопряженному уравнению (по переменным x, y)

$$L^* R = 0$$

и следующим условиям на характеристиках:

$$\begin{aligned} &(R_y - aR)\big|_{x=x'} = 0\,, \\ &(R_x - bR)\big|_{y=y'} = 0\,, \\ &R(x', y'; x', y') = 1\,. \end{aligned}$$

С помощью функции Римана для уравнения (1.1) строятся общие решения задачи Коши и характеристической задачи Коши (задачи Гурса).

Функция Римана обладает следующим свойством взаимности

$$\boldsymbol{R}^*(x,y;x',y') = \boldsymbol{R}(x',y';x,y)\,, \tag{1.2}$$

где $\boldsymbol{R}^*(x,y;x',y')$ – функция Римана сопряженного уравнения, которая является решением следующей характеристической задачи Коши:

$$\begin{aligned} &LR^* = 0\,,\\ &(R^*_y + aR^*)\Big|_{x=x'} = 0\,,\\ &(R^*_x + bR^*)\Big|_{y=y'} = 0\,,\\ &R^*(x',y';x',y') = 1\,. \end{aligned} \tag{1.3}$$

2. Симметрии фундаментальных решений

Пусть дано линейное дифференциальное уравнение с частными производными p-го порядка

$$Lu \equiv \sum_{|\alpha|=0}^{p} A_\alpha(x)\, D^\alpha u = 0\,, \qquad x \in R^m\,. \tag{2.1}$$

Здесь приняты стандартные обозначения: $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ – мультииндекс с целочисленными неотрицательными компонентами, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$,

$$D^\alpha \equiv \left(\frac{\partial}{\partial\, x^1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial\, x^m}\right)^{\alpha_m}\,.$$

Фундаментальными решениями уравнения (2.1) мы называем решения уравнения

$$Lu = \delta(x - x_0) \equiv \delta(x^1 - x_0^1) \cdots \delta(x^m - x_0^m)\,. \tag{2.2}$$

Основная алгебра Ли операторов симметрии уравнения (2.1) как векторное пространство есть прямая сумма двух подалгебр: подалгебры, состоящей из операторов вида

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\xi}^{i}(\boldsymbol{x}) \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}\, \boldsymbol{x}^{i}} + \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{u} \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}\, \boldsymbol{u}}, \tag{2.3}$$

и бесконечномерной подалгебры, порожденной операторами

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}\, \boldsymbol{u}}, \tag{2.4}$$

где $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$ – произвольное решение уравнения (2.1). Отметим, что операторы (2.4), очевидно, являются операторами симметрии уравнения (2.2). В дальнейшем рассматриваются лишь операторы вида (2.3).

Предложение 1. *Для того, чтобы инфинитезимальный оператор вида* (2.3) *являлся оператором симметрии уравнения* (2.1), *необходимо и достаточно, чтобы существовала функция* $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}(x)$, *удовлетворяющая тождеству*

$$\underset{p}{X}(Lu) \equiv \lambda(x)\, Lu \tag{2.5}$$

для любой функции $u = u(x)$ *из области определения уравнения* (2.1).

Сформулируем теорему (Аксенов, 1995).

Теорема 1. *Алгебра Ли операторов симметрии уравнения* (2.2) *является подалгеброй алгебры Ли операторов симметрии уравнения* (2.1), *выделяемой соотношениями*

$$\xi^i(x_0) = 0, \qquad i = 1, \ldots, m\,, \tag{2.6}$$

$$\lambda(x_0) + \frac{\partial\, \xi^i(x_0)}{\partial\, x_0^i} = 0\,. \tag{2.7}$$

3. Основной результат

Оператор симметрии однородного уравнения (1.1) имеет вид

$$\boldsymbol{X} = \xi^1(x)\,\frac{\partial}{\partial x} + \xi^2(y)\,\frac{\partial}{\partial y} + \zeta(x,y)\,u\,\frac{\partial}{\partial u} \tag{3.1}$$

и при этом должны быть выполнены следующие соотношения

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial\,(b\,\xi^1)}{\partial\,x} + \xi^2\,\frac{\partial b}{\partial y} = 0\,,\\
\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial\,(a\,\xi^2)}{\partial\,y} + \xi^1\,\frac{\partial a}{\partial x} = 0\,,\\
\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} + a\,\frac{\partial\,\zeta}{\partial\,x} + b\,\frac{\partial\,\zeta}{\partial\,y} + \frac{\partial\,(c\,\xi^1)}{\partial\,x} + \frac{\partial\,(c\,\xi^2)}{\partial\,y} = 0\,.
\end{gathered} \tag{3.2}$$

Функция $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}(x,y)$, удовлетворяющая тождеству $\underset{2}{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{L}u) = \boldsymbol{\lambda}\,\boldsymbol{L}u$, имеет вид

$$\boldsymbol{\lambda} = \zeta - \frac{d\,\xi^1}{d\,x} - \frac{d\,\xi^2}{d\,y}\,. \tag{3.3}$$

Рассмотрим уравнение

$$\boldsymbol{Lu = \delta(x - x')\,\delta(y - y')}\,, \tag{3.4}$$

описывающее фундаментальные решения уравнения (1.1). Тогда операторы симметрии фундаментальных решений (или симметрии уравнения (3.4)) удовлетворяют в силу теоремы 1 следующим дополнительным соотношениям

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\xi^1(x') = 0\,, \qquad \xi^2(y') = 0\,,} \\ \boldsymbol{\lambda(x', y') + \frac{d\,\xi^1(x')}{d\,x'} + \frac{d\,\xi^2(y')}{d\,y'} = \zeta(x', y') = 0\,.} \end{gathered} \tag{3.5}$$

Покажем, что соотношения на характеристиках для задачи Коши (1.3), инвариантны относительно оператора симметрии (3.1) при условиях (3.5). Отметим, что характеристики $\boldsymbol{x = x'}$, $\boldsymbol{y = y'}$ инвариантны относительно операторов симметрии фундаментальных решений. Из соотношений (3.3) и (3.5) следует, что $\boldsymbol{\zeta(x', y') = 0}$. Условие $\boldsymbol{\zeta(x', y') = 0}$ означает инвариантность последнего соотношения характеристической задачи Коши (1.3).

Запишем условие инвариантности соотношения на характеристике $x = x'$

$$\underset{1}{X}(u_y + au)\Big|_{\substack{x = x' \\ u = R^*}} = 0$$

или

$$\left\{\left(\zeta - \frac{d\xi^2}{dy}\right)(u_y + au) + u\left[\frac{\partial\zeta}{\partial y} + \frac{\partial\,(a\,\xi^2)}{\partial\,y} + \xi^1\,\frac{\partial a}{\partial x}\right]\right\}\Bigg|_{\substack{x = x' \\ u = R^*}} = 0 \tag{3.6}$$

Условие инвариантности (3.6) выполнено в силу второго соотношения (3.2). Аналогично доказывается инвариантность соотношения на характеристике $y = y'$.

Таким образом, доказана теорема, представляющая основной результат настоящего раздела.

Теорема 2. *Симметрии фундаментальных решений линейного гиперболического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными оставляют инвариантной функцию Римана сопряженного уравнения.*

Из теоремы 2 следует, что функция Римана сопряженного уравнения является инвариантным относительно симметрий фундаментальных решений решением исходного уравнения. Тогда функция Римана исходного уравнения находится из соотношения взаимности (1.2).

Алгоритм построения функции Римана

Сформулируем алгоритм построения функции Римана на основе использования симметрий фундаментальных решений:

1. Нахождение симметрий линейного однородного уравнения (1.1).
2. Вычисление симметрий фундаментальных решений.
3. Построение инвариантных решений с помощью симметрий фундаментальных решений.
4. Выделение функции Римана из найденных инвариантных решений, используя условие непрерывности функции Римана и ее первых производных в точке $(\boldsymbol{x'}, \boldsymbol{y'})$ и условие, что $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x'}, \boldsymbol{y'}; \boldsymbol{x'}, \boldsymbol{y'}) = 1$.

Замечание 1. Данный алгоритм позволяет находить функцию Римана гиперболического уравнения, не переходя к характеристическим переменным. Это подчеркивает инвариантную природу данного метода построения функции Римана.

4. Пример построения функции Римана

Рассмотрим уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{2\lambda + 1}{r}\frac{\partial t}{\partial r} - \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0\,. \tag{4.1}$$

Построим функцию Римана уравнения (4.1). При этом не будем переходить к характеристическим переменным.

Предложение 2. *Уравнение* (4.1) *допускает при* $\boldsymbol{\lambda \neq \pm 1/2}$ *следующий базис алгебры Ли операторов симметрии*

$$\boldsymbol{Y_1 = \frac{\partial}{\partial z}\,, \qquad Y_2 = r\,\frac{\partial}{\partial r} + z\,\frac{\partial}{\partial z}\,,}$$

$$\boldsymbol{Y_3 = 2rz\,\frac{\partial}{\partial r} + (r^2 + z^2)\,\frac{\partial}{\partial z} - (2\lambda + 1)zt\,\frac{\partial}{\partial t}\,,}$$

$$\boldsymbol{Y_4 = t\,\frac{\partial}{\partial t}\,, \qquad Y_\infty = b(r,z)\frac{\partial}{\partial t}\,,}$$

где $\boldsymbol{b(r,z)}$ *– произвольное решение уравнения*

$$\boldsymbol{\frac{\partial^2 b}{\partial r^2} + \frac{(2\lambda + 1)}{r}\,\frac{\partial b}{\partial r} - \frac{\partial^2 b}{\partial z^2} = 0\,.}$$

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{2\lambda + 1}{r}\frac{\partial t}{\partial r} - \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = \delta(r - r_0)\delta(z - z_0)\,. \tag{4.2}$$

Предложение 3. *Уравнение* (4.2) *допускает оператор симметрии*

$$Y = 2r(z - z_0)\frac{\partial}{\partial r} + \left[r^2 + (z - z_0)^2 - {r_0}^2\right]\frac{\partial}{\partial z} - (2\lambda + 1)(z - z_0)t\frac{\partial}{\partial t}\,. \tag{4.3}$$

Построим инвариантное относительно оператора симметрии (4.3) решение уравнения (4.1).

Предложение 4. *Оператор симметрии* (4.3) *имеет два функционально независимых инварианта*

$$\boldsymbol{\xi} = \frac{\boldsymbol{r}^2 - (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_0)^2 + \boldsymbol{r_0}^2}{2\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}_0}, \qquad \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r}^{\boldsymbol{\lambda}+\frac{1}{2}}\,\boldsymbol{t}\,.$$

Инвариантные решения ищем в виде

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi})\,,$$

или

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{r}^{-\boldsymbol{\lambda}-\frac{1}{2}}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi})\,.$$

Предложение 5. *Решения Эйлера–Пуассона–Дарбу* (4.1), *инвариантные относительно оператора симметрии* (4.3), *имеют следующий вид*

$$t = r^{-\lambda-\frac{1}{2}}\left[C_1\, P_{-\lambda-\frac{1}{2}}(\xi) + C_2\, Q_{-\lambda-\frac{1}{2}}(\xi)\right], \tag{4.4}$$

где $P_{-\lambda-1/2}(\xi)$, $Q_{-\lambda-1/2}(\xi)$ *– функции Лежандра первого и второго рода;* C_1, C_2 *– произвольные постоянные.*

Из инвариантных решений (4.4) можно легко выделить функцию Римана уравнения (4.1).

Предложение 6. *Функция Римана уравнения, сопряженного уравнению* (4.1), *имеет следующий вид*

$$R^*(r, z; r_0, z_0) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\lambda-\frac{1}{2}} P_{-\lambda-\frac{1}{2}}(\xi)\,. \tag{4.5}$$

Функция Римана (4.5) описывает с точностью до постоянного множителя t_0 решение характеристической задачи для взаимного проникновения двух центрированных волн разряжения.

СИММЕТРИИ И ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ В ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Симметриями фундаментальных решений (или симметриями уравнения (2.2)) будем называть симметрии уравнения (2.1), удовлетворяющие соотношениям (2.6), (2.7).

Алгоритм построения инвариантных фундаментальных решений

Сформулируем алгоритм нахождения фундаментальных решений на основе использования симметрий:

1. Нахождение общего вида оператора симметрии линейного дифференциального уравнения (2.1) и соответствующей ему функции $\boldsymbol{\lambda(x)}$, удовлетворяющей тождеству (2.5).
2. Получение на основе ограничений (2.6), (2.7) алгебры Ли операторов симметрии уравнения (2.2).
3. Построение инвариантных фундаментальных решений с помощью симметрий уравнения (2.2).
4. Получение новых фундаментальных решений из известных с помощью симметрий уравнения (2.2) (производство решений).

Замечание 2. При нахождении обобщенных инвариантных фундаментальных решений, необходимо искать инварианты в классе обобщенных функций.

Пример 1. Рассмотрим одномерное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,. \tag{4.6}$$

Фундаментальные решения уравнения теплопроводности удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \delta(x)\delta(t)\,. \tag{4.7}$$

Выпишем конечномерную часть базиса алгебры Ли операторов симметрии уравнения (4.6)

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}\,, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial t}\,, \qquad X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t}\,,$$
$$X_4 = 4xt\frac{\partial}{\partial x} + 4t^2\frac{\partial}{\partial t} - (x^2 + 2t)u\frac{\partial}{\partial u}\,,$$
$$X_5 = 2t\frac{\partial}{\partial x} - xu\frac{\partial}{\partial u}\,, \qquad X_6 = u\frac{\partial}{\partial u}\,.$$

Найдем операторы симметрии, допускаемые уравнением (4.7). Для этого запишем общий вид оператора симметрии, допускаемого уравнением (4.2),

$$\boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^{6} a_i\, X_i\,, \tag{4.8}$$

где a_i – произвольные постоянные. Оператору симметрии (4.8) соответствует функция $\lambda(x,t)$

$$\lambda = -\left[2a_3 + a_4(x^2 + 10t) + a_5 x - a_6\right].$$

Тогда, используя теорему 1, находим

$$a_1 = a_2 = 0\,, \qquad a_3 + a_6 = 0\,.$$

Предложение 7. *Уравнение* (4.3) *допускает алгебру Ли операторов симметрии с базисом конечномерной части*

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Y}_1 &= x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial u}\,,\\
\boldsymbol{Y}_2 &= 4xt\frac{\partial}{\partial x} + 4t^2\frac{\partial}{\partial t} - (x^2 + 2t)u\frac{\partial}{\partial u}\,,\\
\boldsymbol{Y}_3 &= 2t\frac{\partial}{\partial x} - xu\frac{\partial}{\partial u}\,.
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

Предложение 8. *Фундаментальное решение уравнения теплопроводности инвариантное относительно операторов симметрии* (4.9) *имеет вид*

$$
u = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{x^2}{4t}}\,,
$$

Пример 2. Рассмотрим двумерное бигармоническое уравнение

$$\boldsymbol{\Delta\Delta u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0\,.} \tag{4.10}$$

Фундаментальные решения двумерного бигармонического уравнения удовлетворяют уравнению

$$\boldsymbol{\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = \delta(x)\delta(y)\,.} \tag{4.11}$$

Выпишем конечномерную часть базиса алгебры Ли операторов симметрии уравнения (4.10)

$$\boldsymbol{X_1 = \frac{\partial}{\partial x}\,, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}\,, \qquad X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\,,}$$

$$\boldsymbol{X_4 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\,, \qquad X_5 = (x^2 - y^2)\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y} + 2xu\frac{\partial}{\partial u}\,,}$$

$$\boldsymbol{X_6 = 2xy\frac{\partial}{\partial x} + (y^2 - x^2)\frac{\partial}{\partial y} + 2yu\frac{\partial}{\partial u}\,, \qquad X_7 = u\frac{\partial}{\partial u}\,.}$$

Найдем операторы симметрии, допускаемые уравнением (4.11). Для этого запишем общий вид оператора симметрии, допускаемого уравнением (4.10)

$$\boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^{7} \boldsymbol{a_i\, X_i}\,, \tag{4.12}$$

где $\boldsymbol{a_i}$ – произвольные постоянные. Оператору симметрии (4.12) соответствует функция $\boldsymbol{\lambda(x, y)}$

$$\boldsymbol{\lambda = a_7 - 4a_3 - 6a_5x - 6a_6y\,.}$$

Тогда, используя теорему 1, находим

$$\boldsymbol{a_1 = a_2 = 0\,, \qquad a_7 - 2a_3 = 0\,.}$$

Предложение 9. *Уравнение* (4.11) *допускает алгебру Ли операторов симметрии с базисом конечномерной части*

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Y}_1 &= x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + 2u\frac{\partial}{\partial u}\,,\\
\mathbf{Y}_2 &= y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\,,\\
\mathbf{Y}_3 &= (x^2 - y^2)\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y} + 2xu\frac{\partial}{\partial u}\,,\\
\mathbf{Y}_4 &= 2xy\frac{\partial}{\partial x} + (y^2 - x^2)\frac{\partial}{\partial y} + 2yu\frac{\partial}{\partial u}\,.
\end{aligned}
$$

Предложение 10. *Фундаментальное решение бигармонического уравнения, инвариантное относительно оператора симметрии* $\mathbf{Y}_2$ *имеет вид*

$$u = \frac{x^2 + y^2}{16\pi}\,\ln\left(x^2 + y^2\right). \tag{4.13}$$

Оператору симметрии $\boldsymbol{Y}_1$ соответствует однопараметрическая группа неоднородных растяжений

$$\begin{aligned} x' &= e^a\, x\,, \\ y' &= e^a\, y\,, \\ u' &= e^{2a}\, u\,, \end{aligned}$$

где a – групповой параметр.

Под действием этой однопараметрической группы фундаментальное решение (4.13) преобразуется в фундаментальное решение

$$u = \frac{x^2+y^2}{16\pi}\left[\ln\left(x^2+y^2\right)+2a\right].$$

Оператору симметрии $\boldsymbol{Y_3}$ соответствует однопараметрическая группа преобразований

$$\boldsymbol{x' = \frac{x - a(x^2 + y^2)}{1 - 2ax + a^2(x^2 + y^2)}},$$
$$\boldsymbol{y' = \frac{y}{1 - 2ax + a^2(x^2 + y^2)}},$$
$$\boldsymbol{u' = \frac{u}{1 - 2ax + a^2(x^2 + y^2)}},$$

где $\boldsymbol{a}$ – групповой параметр.

Под действием этой группы преобразований фундаментальное решение (4.13) преобразуется в нетривиальное фундаментальное решение

$$\boldsymbol{u = \frac{[x - a(x^2 + y^2)]^2 + y^2}{16\pi[1 - 2ax + a^2(x^2 + y^2)]} \cdot \ln\left[\frac{\big(x - a(x^2 + y^2)\big)^2 + y^2}{\big(1 - 2ax + a^2(x^2 + y^2)\big)^2}\right]}.$$

Оператору симметрии $\boldsymbol{Y}_4$ соответствует однопараметрическая группа преобразований

$$\boldsymbol{x}' = \frac{\boldsymbol{x}}{1 - 2\boldsymbol{a}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{a}^2(\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2)},$$
$$\boldsymbol{y}' = \frac{\boldsymbol{y} - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2)}{1 - 2\boldsymbol{a}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{a}^2(\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2)},$$
$$\boldsymbol{u}' = \frac{\boldsymbol{u}}{1 - 2\boldsymbol{a}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{a}^2(\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2)},$$

где $\boldsymbol{a}$ – групповой параметр.

Под действием этой группы преобразований фундаментальное решение (4.13) преобразуется в нетривиальное фундаментальное решение

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{16\pi} \cdot \frac{\boldsymbol{x}^2 + \big(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2)\big)^2}{1 - 2\boldsymbol{a}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{a}^2(\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2)} \cdot \ln\left[\frac{\boldsymbol{x}^2 + \big(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2)\big)^2}{\big(1 - 2\boldsymbol{a}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{a}^2(\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2)\big)^2}\right].$$

Замечание 3. Можно рассмотреть композицию преобразований, соответствующих операторам симметрии $\boldsymbol{Y}_1$, $\boldsymbol{Y}_3$, $\boldsymbol{Y}_4$. Тогда можно получить трехпараметрическое семейство фундаментальных решений бигармонического уравнения.

5. Основные уравнения

Рассмотрим линейные дифференциальные уравнения четвертого порядка (Георгиевский, 2015)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L_1 u} &\equiv \boldsymbol{u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy} + B_1(u_{xxzz} + u_{yyzz}) + B_2 u_{zzzz} = 0}\,, \\ \boldsymbol{L_2 u} &\equiv \boldsymbol{B_3(u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy}) + B_4(u_{xxzz} + u_{yyzz}) + u_{zzzz} = 0}\,. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Здесь $\boldsymbol{B_1}$, $\boldsymbol{B_2}$, $\boldsymbol{B_3}$, $\boldsymbol{B_4}$ – положительные постоянные, характеризующие линейно-упругую среду. Фундаментальные решения уравнений (5.1) являются решениями уравнений

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L_1 u} &= \boldsymbol{\delta(x)\delta(y)\delta(z)}\,, \\ \boldsymbol{L_2 u} &= \boldsymbol{\delta(x)\delta(y)\delta(z)}\,. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Заменой переменных уравнения (5.1) и, соответственно, уравнения (5.2) можно свести к одинаковым уравнениям. В уравнениях, соответствующих дифференциальному оператору L_1, перейдем к новым переменным

$$\bar{z} = \frac{z}{\sqrt[4]{B_2}}, \qquad \bar{u} = \sqrt[4]{B_2}u\,.$$

Убирая черты над новыми переменными, соответствующие уравнения (5.1), (5.2) примут вид

$$L_3 u \equiv u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy} + b(u_{xxzz} + u_{yyzz}) + u_{zzzz} = 0\,, \tag{5.3}$$

$$L_3 u = \delta(x)\delta(y)\delta(z)\,. \tag{5.4}$$

Здесь $b = B_1/\sqrt{B_2}$. Аналогично уравнения, соответствующие дифференциальному оператору L_2, заменой переменных

$$\bar{x} = \frac{x}{\sqrt[4]{B_3}}, \qquad \bar{y} = \frac{y}{\sqrt[4]{B_3}}, \qquad \bar{u} = \sqrt{B_3}u$$

также сводятся, соответственно, к уравнениям (5.3), (5.4) при $b = B_4/\sqrt{B_3}$.

Предполагается, что уравнение (5.3) является эллиптическим уравнением. Тогда должно быть выполнено неравенство $b \geqslant 2$.

Осесимметричные решения уравнения (5.3) удовлетворяют уравнению

$$L_4 u \equiv u_{rrrr} + b u_{rrzz} + u_{zzzz} + \frac{2}{r} u_{rrr} + \frac{b}{r} u_{rzz} - \frac{1}{r^2} u_{rr} + \frac{1}{r^3} u_r = 0\,, \quad (5.5)$$

а осесимметричные фундаментальные решения (или осесимметричные решения уравнения (5.4)) удовлетворяют уравнению

$$r L_4 u = \frac{1}{\pi}\, \delta(r)\delta(z)\,. \quad (5.6)$$

Здесь $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и

$$\int\limits_0^\infty \delta(r) dr = \frac{1}{2}\,.$$

Уравнение (5.6) можно записать в дивергентном виде

$$\Big(r u_{rrr} + b r u_{rzz} + u_{rr} - \frac{1}{r} u_r \Big)_r + \Big(r u_{zzz} \Big)_z = \frac{1}{\pi}\, \delta(r)\delta(z)\,. \quad (5.7)$$

6. Симметрии основных уравнений

Предложение 11. *Уравнение* (5.3) *при произвольном параметре* b *допускает следующий базис алгебры Ли операторов симметрии*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_3 = \frac{\partial}{\partial z},$$

$$X_4 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_5 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z},$$

$$X_6 = u\frac{\partial}{\partial u}, \qquad X_\infty = \varphi(x, y, z)\frac{\partial}{\partial u}.$$

При $b = 2$ *базис алгебры Ли расширяется операторами симметрии*

$$X_7 = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\,, \qquad X_8 = z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}\,,$$

$$X_9 = (x^2 - y^2 - z^2)\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y} + 2xz\frac{\partial}{\partial z} + xu\frac{\partial}{\partial u}\,,$$

$$X_{10} = 2xy\frac{\partial}{\partial x} + (y^2 - x^2 - z^2)\frac{\partial}{\partial y} + 2yz\frac{\partial}{\partial z} + yu\frac{\partial}{\partial u}\,,$$

$$X_{11} = 2xz\frac{\partial}{\partial x} + 2yz\frac{\partial}{\partial z} + (z^2 - x^2 - y^2)\frac{\partial}{\partial z} + zu\frac{\partial}{\partial u}\,.$$

Здесь $u = \varphi(x, y, z)$ *– произвольное решение уравнения* (5.3).

Найдем симметрии уравнения (5.4). Воспользуемся результатами работы (Аксенов, 1995). Используя конечномерную часть алгебры Ли операторов симметрии уравнения (5.3), рассмотрим оператор симметрии общего вида

$$\boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^{6} \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{X}_i \,.$$

Здесь $\boldsymbol{a}_i$ – произвольные постоянные.

Предложение 12. *Справедливо следующее соотношение*

$$\underset{4}{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{L}_3 \boldsymbol{u} = (\boldsymbol{a}_6 - 4\boldsymbol{a}_5) \boldsymbol{L}_3 \boldsymbol{u} \,.$$

Тогда, используя теорему 1, находим, что

$$\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_3 = 0 \,, \qquad \boldsymbol{a}_5 - \boldsymbol{a}_6 = 0 \,.$$

Предложение 13. *Уравнение* (5.4) *допускает следующий базис алгебры Ли операторов симметрии*

$$\boldsymbol{Y}_1 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \boldsymbol{Y}_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} + u\frac{\partial}{\partial u}. \tag{6.1}$$

Замечание 4. Можно также показать, что при $b = 2$ уравнение (5.4) допускает операторы симметрии (6.1), оператор симметрии

$$\boldsymbol{Y}_3 = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}, \tag{6.2}$$

и операторы симметрии $\boldsymbol{X}_8$, $\boldsymbol{X}_9$, ..., $\boldsymbol{X}_{11}$.

7. Фундаментальное решение

Найдем решение уравнения (5.3), инвариантное относительно операторов симметрии (6.1). Инвариантами допускаемой группы преобразований являются $\boldsymbol{J_1 = r^2/z^2 = \tau}$ и $\boldsymbol{J_2 = u/z}$. Тогда инвариантное решение ищем в следующем виде

$$\boldsymbol{u = zf(\tau)\,.} \tag{7.1}$$

Подставляя выражение (7.1) в уравнение (5.3) (или в уравнение (5.5)), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$\begin{gathered}\boldsymbol{4\tau^2(\tau^2+b\tau+1)\frac{d^4 f}{d\,\tau^4}+2\tau(14\tau^2+11b\tau+8)\frac{d^3 f}{d\,\tau^3}+}\\ \boldsymbol{+\,(39\tau^2+22b\tau+8)\frac{d^2 f}{d\,\tau^2}+2(3\tau+b)\frac{d\,f}{d\,\tau}=0\,.}\end{gathered} \tag{7.2}$$

Предложение 14. *Обыкновенное дифференциальное уравнение* (7.2) *обладает следующей фундаментальной системой решений*

$$
\begin{aligned}
f_1 &= 1\,,\\
f_2 &= \sqrt{\frac{\tau}{a}+1} - \operatorname{arcth}\sqrt{\frac{\tau}{a}+1} + \sqrt{a\tau+1} - \operatorname{arcth}\sqrt{a\tau+1}\,,\\
f_3 &= \frac{a}{a^2-1}\left(\sqrt{\frac{\tau}{a}+1} - \operatorname{arcth}\sqrt{\frac{\tau}{a}+1} - \sqrt{a\tau+1} + \operatorname{arcth}\sqrt{a\tau+1}\right),\\
f_4 &= \frac{a}{a^2-1}\left(\sqrt{\frac{\tau}{a}+1}\operatorname{arcth}\sqrt{\frac{\tau}{a}+1} - \frac{1}{2}\operatorname{arcth}^2\sqrt{\frac{\tau}{a}+1} - \right.\\
&\qquad\left. - \sqrt{a\tau+1}\operatorname{arcth}\sqrt{a\tau+1} + \frac{1}{2}\operatorname{arcth}^2\sqrt{a\tau+1}\right),
\end{aligned}
$$

где параметр a удовлетворяет соотношению $b = a + 1/a$.

Рассмотрим общее решение уравнения (7.2)

$$f = \sum_{i=1}^{4} c_i f_i \,, \tag{7.3}$$

где c_i $(i = 1, \ldots, 4)$ – произвольные постоянные. Найдем среди решений (7.3) решения, принимающие вместе со своей первой производной конечное значение при $\tau = 0$.

Предложение 15. *При $\tau \to 0$ справедливо разложение*

$$f = \left[c_2 + \frac{a \ln a}{2(a^2-1)}\, c_4\right] \ln \tau + O(1)\,,$$

$$\frac{df}{d\tau} = \left[c_2 + \frac{a \ln a}{2(a^2-1)}\, c_4\right] \frac{1}{\tau} + \frac{c_4}{8} \ln \tau + O(1)\,.$$

Откуда следует, что $c_2 = 0$, $c_4 = 0$. Положим также $c_1 = 0$.

Получаем следующее однопараметрическое семейство решений уравнения (7.2)

$$f = \frac{c_3 a}{a^2 - 1}\left(\sqrt{\frac{\tau}{a} + 1} - \sqrt{a\tau + 1} - \operatorname{arcth}\sqrt{\frac{\tau}{a} + 1} + \operatorname{arcth}\sqrt{a\tau + 1}\right).$$

Тогда, используя выражение (7.1), получаем однопараметрическое семейство решений уравнения (5.3) (или уравнения (5.5))

$$u = \frac{c_3 a}{a^2 - 1}\left(\sqrt{\frac{r^2}{a} + z^2} - \sqrt{ar^2 + z^2} - z \operatorname{arcth}\frac{\sqrt{\frac{r^2}{a} + z^2}}{z} + \right.$$
$$\left. + z \operatorname{arcth}\frac{\sqrt{ar^2 + z^2}}{z}\right). \tag{7.4}$$

Покажем, что среди решений (7.4), содержится фундаментальное решение. Для этого проинтегрируем обе части уравнения (5.7) по прямоугольной области $\Pi = \{0 \leqslant r \leqslant r_0,\ -z_1 \leqslant z \leqslant z_2,\ r_0 > 0,\ z_1 > 0,\ z_2 > 0\}$. Используя формулу Стокса, запишем интеграл от левой части через интеграл вдоль границы области Π. Затем в полученное подынтегральное выражение подставим решение (7.4). В результате находим, что $c_3 = 1/(4\pi)$.

Сформулируем основной результат работы (Аксенов, 2016).

Теорема 3. *Фундаментальное решение уравнения* (5.3) *можно записать в виде*

$$\boldsymbol{u}_{\text{ф}} = \frac{\boldsymbol{a}}{4\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{a}^2 - 1)}\left[\sqrt{\frac{\boldsymbol{r}^2}{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{z}^2} - \sqrt{\boldsymbol{a}\boldsymbol{r}^2 + \boldsymbol{z}^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{\boldsymbol{z}}{2}\ln\frac{\left(\sqrt{\frac{\boldsymbol{r}^2}{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{z}^2} - \boldsymbol{z}\right)\left(\sqrt{\boldsymbol{a}\boldsymbol{r}^2 + \boldsymbol{z}^2} + \boldsymbol{z}\right)}{\left(\sqrt{\frac{\boldsymbol{r}^2}{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{z}^2} + \boldsymbol{z}\right)\left(\sqrt{\boldsymbol{a}\boldsymbol{r}^2 + \boldsymbol{z}^2} - \boldsymbol{z}\right)}\right]. \tag{7.5}$$

Замечание 5. При $a = 1$ (или $b = 2$) фундаментальное решение (7.5) принимает вид

$$u_{\text{ф}} = -\frac{1}{8\pi}\sqrt{r^2 + z^2}$$

и совпадает с фундаментальным решением бигармонического уравнения (Владимиров, 1979).

Замечание 6. В случае $b = 2$ построение фундаментального решения на основе использования симметрий особенно эффективно. В этом случае решение уравнения (5.3), инвариантное относительно операторов симметрии (6.1) и (6.2) сразу определятся с точностью до постоянного множителя и имеет вид

$$u = c\sqrt{r^2 + z^2} \tag{7.6}$$

(в этом случае допускаемая уравненем (5.4) группа преобразований имеет только один инвариант $J = u/\sqrt{r^2 + z^2}$). Аналогично изложенному выше находим, что решение (7.6) является фундаментальным решением при $c = -1/(8\pi)$.

Литература

1. ***Copson E.T.*** On the Riemann–Green Function // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1957/58. V. 1. No. 1. P. 324–348.

2. ***Ибрагимов Н.Х.*** Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике // Успехи математических наук. 1992 Т.47. Вып. 4. С. 83–144.

3. ***Аксенов А.В.*** Симметрии линейных уравнений с частными производными и фундаментальные решения // Доклады АН. 1995. Т. 342. № 2. С. 151–153.

4. ***Аксенов А.В.*** Фундаментальное решение уравнений в перемещениях для трансверсально изотропной упругой среды // Доклады АН. 2016. Т. 470. № 5. С. 514–518.